MỘT SỐ PHƯƠNG THỨC RÈN LUYỆN CHO SINH VIÊN SƯ PHẠM TOÁN KỸ NĂNG BIẾN ĐỔI THÔNG TIN KHI DẠY HỌC CÁC MÔN TOÁN SƠ CẤP

NGUYỄN CHIẾN THẮNG*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi phân tích vai trò của các học phần Toán sơ cấp ở trường đại học sư phạm, tìm hiểu kỹ năng biến đổi thông tin và đề xuất một số phương thức cũng như xây dựng môi trường sư phạm nhằm rèn luyện kỹ năng đó cho sinh viên khi dạy học các môn học này.

ABSTRACT

Some ways to cultivate the skills of information processing for math teacher students to teach elementary mathematics subjects

In this article, we analyze the role of elementary mathematics units at pedagogical university, study the skills of information processing, and propose some ways to cultivate them for students to teach these subjects.

1. Kỹ năng biến đổi thông tin

Theo [1] thì *Bài toán* là vấn đề cần được giải đáp bằng suy luận logic và phương pháp khoa học. Theo [4] thì *phương pháp tư duy khoa học* gồm: phép tổng hợp và phép phân tích, phép quen thuộc hóa (quy lạ về quen) và phép biến đổi vấn đề. Cũng theo [4] thì phép quen thuộc hóa chủ yếu là thông qua liên tưởng so sánh để thực hiện.

Lại theo [1], *Thông tin* là mọi yếu tố có thể mang lại sự hiểu biết về một đối tượng, một biến cố nào đó. Thông tin là cơ sở của sự trao đổi các tri thức.

Thông tin được thể hiện theo hai khía cạnh:

- Khía cạnh ý nghĩa được gọi là nội dung ngữ nghĩa;
- Khía cạnh cấu trúc được gọi là cú pháp.

Như vậy, thông tin của bài toán là mọi yếu tố có thể mang lại sự hiểu biết về bài toán đó. Thông tin này được thể hiện ở hai khía cạnh: Khía cạnh ngữ nghĩa và khía cạnh cú pháp, do đó cần biến đổi thông tin từ hai khía cạnh: nội dung của bài toán và cấu trúc logic của bài toán.

Theo quan điểm của Thuyết phát sinh nhận thức thì hoạt động nhận thức của con người liên quan đến việc tổ chức thông tin và thích nghi với môi trường mà người đó tri giác nó. *Tổ chức thông tin* là cách mà thông tin được tổ chức trong đầu óc của con người liên quan đến các đối tượng cụ thể, ý tưởng, hoặc hành động. *Sơ đồ (nhận thức)* là những kinh nghiệm mà chủ thể tích lũy được trong mỗi giai đoạn nhất định, bao gồm

---

* ThS, Khoa Toán Trường Đại học Vinh

không những một phạm trù kiến thức mà cả quá trình đạt được kiến thức đó. Sự phát triển nhận thức gồm ba quá trình cơ bản: đồng hóa, điều ứng và cân bằng. *Đồng hóa* bao gồm sát nhập thông tin mới vào sơ đồ đã có, còn *điều ứng* bao gồm sự thay đổi của sơ đồ để ăn khớp với thông tin mới; như vậy, đồng hóa không làm thay đổi nhận thức mà nó chỉ mở rộng cái đã biết còn điều ứng mới giúp chủ thể phát triển nhận thức. *Cân bằng* là tự cân bằng của chủ thể giữa hai quá trình đồng hóa và điều ứng. Khi chủ thể tiếp xúc với một thông tin mới, sự cân bằng sẽ bị phá vỡ do các sơ đồ đã có không áp dụng được buộc chủ thể phải tiến hành quá trình đồng hóa và điều ứng mới, tạo ra trạng thái cân bằng mới - dẫn đến sự thích nghi mới - cao hơn. Học tập là một quá trình thích nghi chức năng nhận thức của chủ thể với môi trường nhằm tạo lập những sơ đồ nhận thức mới.

Từ những phân tích trên đây chúng tôi cho rằng: *Kỹ năng biến đổi thông tin của SV khi học tập các môn Toán sơ cấp* ***là kỹ năng tổ chức thông tin thu nhận được từ các bài toán, đồng hóa vào sơ đồ nhận thức đã có và điều ứng sơ đồ đó bằng cách bổ sung thông tin nhờ phép liên tưởng và các thao tác trí tuệ nhằm tạo lập sự cân bằng để có một sơ đồ nhận thức mới.***

2. Vai trò của các học phần Toán sơ cấp đối với việc rèn luyện kĩ năng biến đổi thông tin cho sinh viên sư phạm Toán

Ở bậc đại học, sinh viên (SV) sư phạm Toán phải nhìn nhận vốn kiến thức Toán sơ cấp của mình bằng "con mắt" của người thầy giáo tương lai về môn học đó ở trường phổ thông (PT). Do vậy, theo chúng tôi việc dạy học các môn Toán sơ cấp ở bậc đại học có các vai trò sau:

- Giúp SV ôn tập và thông hiểu một cách có phê phán những tài liệu Toán học ở trường PT.
- Bổ sung những kiến thức cần thiết của Toán sơ cấp mà chưa được trình bày trong sách giáo khoa.
- Phát triển thói quen giải các bài tập Toán sơ cấp mà SV đã có được khi học ở trường PT.
- Phát triển tư duy, khả năng suy luận logic, năng lực tự học và có thái độ phê phán đối với những điều đọc được từ tài liệu hoặc nghe được từ bài dạy của giảng viên.
- Giúp SV khai thác mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán phổ thông.
- Tích hợp một số phần mềm Toán học nhằm hỗ trợ việc dạy học Toán phổ thông.

3. Một số phương thức rèn luyện cho SV sư phạm toán kỹ năng biến đổi thông tin thông qua dạy học các học phần Toán sơ cấp ở bậc đại học

Trong mục này, chúng tôi xét khái niệm *Bài toán* với nghĩa hẹp là bài tập toán học ở trường PT. Theo [3] thì có thể phân loại các bài toán ở trường phổ thông gồm: Những bài toán tìm tòi (mục đích cuối cùng của bài toán này là tìm ra (dựng, thu được, xác định, …) một đối tượng nào đó, tức là tìm ra ẩn số của bài toán) và những bài toán chứng minh (mục đích cuối cùng của bài toán chứng minh là xác định xem một kết luận nào đó là đúng hay sai, là xác nhận hay bác bỏ kết luận đó).

Có nhiều phương thức rèn luyện cho SV kỹ năng biến đổi thông tin. Trong bài báo này chúng tôi tập trung vào bốn phương thức cơ bản, đó là: rèn luyện khả năng liên tưởng, rèn luyện kỹ năng biến đổi tương đương, rèn luyện kỹ năng chuyển hóa từ mô hình này sang mô hình khác, rèn luyện kỹ năng thiết lập mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán sơ cấp.

3.1. Rèn luyện khả năng liên tưởng

Liên tưởng là từ sự việc này sẽ nhớ đến sự việc khác; trong hoạt động giải bài toán có thể liên tưởng về cái gần với nó hoặc trái với nó. Việc liên tưởng cần dựa vào các tiền đề về mặt hình thức nội dung và về mặt phương pháp của bài toán. Sự liên tưởng này quy định việc biến đổi thông tin, tức là biến đổi thông tin như thế nào để được bài toán có lợi cho mình (có thể liên tưởng được).

Theo [4], phương thức liên tưởng thường gặp có ba dạng:

- Liên tưởng định nghĩa, nguyên lý, định lý và quy tắc;
- Liên tưởng đến những vấn đề đã từng giải quyết;
- Liên tưởng đến phương pháp, kĩ xảo thường dùng.

Để rèn luyện khả năng liên tưởng, giảng viên (GV) lựa chọn những bài toán có nhiều cách giải hoặc có cách giải độc đáo, yêu cầu SV phân tích đặc điểm của bài toán và trình bày các hướng huy động kiến thức theo ba dạng trên nhằm tìm cách giải quyết bài toán.

Ví dụ: Giải phương trình $5\sqrt{2x^3+16}=2(x^2+8)$

Rõ ràng từ thông tin của bài toán này: vế trái chỉ có một căn bậc hai, SV có thể liên tưởng ngay đến phương pháp thường dùng là bình phương hai vế. Tuy nhiên, phương trình thu được sau khi bình phương và rút gọn là: $4x^4 - 50x^3 + 64x^2 - 144 = 0$. Việc giải phương trình bậc 4 này theo phương pháp thông thường là rất khó khăn: không nhẩm được nghiệm đặc biệt, không có dạng phương trình đặc biệt đã biết cách giải như phương trình trùng phương hay phương trình đối xứng,... Cũng có thể liên tưởng đến phương pháp đánh giá nhưng khó khăn nằm ở chỗ hai vế của phương trình đều đồng biến khi $x \geq 0$ và hai vế không có cấu trúc của bất đẳng thức nào đã biết. Sau khi không thể tìm cách giải theo hai phương pháp trên thì SV sẽ liên tưởng đến phương pháp đặt ẩn phụ và liên tưởng đầu tiên để đặt ẩn phụ thường là căn thức bậc 2: đặt $t = \sqrt{2x^3+16}$. Tuy nhiên, vì 2 và 3 là nguyên tố cùng nhau nên vế trái lại chứa căn thức của t dẫn đến một phương trình cũng phức tạp tương đương với phương trình ban đầu. Do đó, cần phải phân tích kỹ đặc điểm của bài toán để đặt ẩn phụ thích hợp. Thông tin cần xử lý đó là biểu thức dưới dấu căn: $2x^3 + 16 = 2(x^3 + 8)$, liên tưởng đến hằng đẳng thức ta có: $2x^3 + 16 = 2(x + 2)(x^2-x+4)$. Tìm mối liên hệ giữa các nhân tử của tích này với biểu thức x^2+8 ở vế trái ta thấy: $(2x+4) + (x^2 - x +4) = x^2 + 8$. Từ đó đặt $u=\sqrt{2x+4}$ và $v=\sqrt{x^2-x+4}$ ta đưa phương trình đã cho về dạng: $5uv=2(u^2+v^2)$. Hai vế của phương trình này đều là bậc hai và có dạng đối xứng nên ta chia cả hai vế cho tích uv (dĩ nhiên thấy u = 0 và v = 0 không thoả mãn phương trình) ta được: 5 = $\frac{2(u^2+v^2)}{uv}=2\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)$.

Vì $\frac{u}{v}$ và $\frac{v}{u}$ có tích bằng 1 nên liên tưởng đến kỹ xảo thường dùng đưa về phương trình bậc hai ta đặt t=$\frac{u}{v}$ thì được: 5 = $2\left(t+\frac{1}{t}\right)\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$ có nghiệm t =$\frac{1}{2}$ và t = 2. Đến đây thay trở lại u và v ta tìm được hai nghiệm của phương trình đã cho là x $=5\pm\sqrt{37}$. Rõ ràng kết quả này cho thấy nhẩm nghiệm của phương trình bậc 4 ở trên là không thể làm được.

3.2. Rèn luyện kỹ năng biến đổi tương đương

Việc rèn luyện kỹ năng biến đổi tương đương có thể được tiến hành theo hai hướng: Sử dụng phép biến đổi tương đương logic để giải và diễn đạt bài toán theo các cách tương đương để tìm lời giải.

Hướng 1: Sử dụng phép biến đổi tương đương để giải. Việc làm này cần tuân thủ các quy tắc về logic. Đó là các mệnh đề về phép biến đổi tương đương.

Ví dụ: Cho a, b, c là ba số thỏa mãn $a^{2011}(a+b+c) < 0$, với $a \neq 0$. Chứng minh rằng $b^2 – 4ac>0$.

Thông tin từ bài toán (xuất phát từ kết luận của bài toán): $b^2 – 4ac$ liên tưởng đến tam thức bậc hai nhưng vế trái của giả thiết: $a^{2011}(a+b+c) < 0$ (1) không phải là một bậc hai, nên sơ đồ nhận được không thích hợp.

Biến đổi thông tin: Chia hai vế của (1) cho a^{2010}, vì $a^{2010} > 0$ nên (1) tương đương với a(a+b+c) < 0. Để xuất hiện vế phải của kết luận ta xét hàm số f(x) = $ax^2 + bx + c$.

Ta có: a.f(1) < 0 nên phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt và hơn thế nữa ta có số 1 ở giữa hai nghiệm của phương trình f(x) = 0. Suy ra $\Delta > 0$ nên ta có kết luận của bài toán.

Cũng có thể biến đổi trực tiếp từ (1) đến kết luận như sau:

$a(a+b+c)=a^2+ab+ac=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4}<0\Leftrightarrow\frac{b^2-4ac}{4}>\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow b^2–$

$4ac>0$.

Hướng 2: Diễn đạt bài toán theo các cách tương đương để tìm lời giải. Theo hướng này cần biến đổi thông tin từ bài toán theo nhiều cách khác nhau để tìm tòi nhiều lời giải, cũng có thể cho tới khi tìm được bài toán có lợi cho chủ thể. Sau đó sử dụng những phương pháp có ích để bổ sung thông tin nhằm biến đổi bài toán, chẳng hạn như: quy về định nghĩa, phân tích và lập tổ hợp mới, đưa vào những phần tử phụ, tổng quát hóa, đặc biệt hóa và sử dụng tương tự.

Ví dụ: Chứng minh rằng (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e) $\geq$ 1+a+b+c+d+e (1), trong đó a, b, c, d, e cùng dấu và đều lớn hơn -1.

Rõ ràng việc chứng minh trực tiếp bất đẳng thức (1) tương đối khó khăn về mặt phương pháp vì việc khai triển hay nhóm vế trái là bất khả thi. Với quy luật của bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể phát biểu bài toán tổng quát và chứng minh bài toán tổng quát có thể dễ hơn vì ta có phương pháp quy nạp toán học rất hữu hiệu. Bài toán tổng quát như sau: Chứng minh rằng $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+ x_1+x_2+\dots+x_n$ (2), trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số cùng dấu và đều lớn hơn -1.

Bất đẳng thức (2) đúng với n = 1, 2 vì:

Với n=1 thì: $1+x_1 \geq 1+x_1$ và

Với n = 2 thì: $(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2$ vì $x_1x_2 \geq 0$.

Giả sử (2) đúng với n = k (k≥3) ta chứng minh (2) cũng đúng với n = k+1. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp thì: $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k) \geq 1+ x_1+x_2+\dots+x_k$ (3). Do $x_{k+1}>-1$ nên $x_{k+1}+1 > 0$, do đó (3) $\Leftrightarrow$ $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+ x_1+x_2+\dots+x_k)(1+x_{k+1})$.

Ta có: $(1+ x_1+x_2+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) = (1+ x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+ x_2x_{k+1}+\dots+ x_kx_{k+1}) \geq 1+ x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}$, vì $x_1x_{k+1}+ x_2x_{k+1}+\dots+ x_kx_{k+1} \geq 0$. Vậy bài toán tổng quát đúng nên bất đẳng thức (1) đúng.

3.3. Rèn luyện kỹ năng chuyển hóa từ mô hình này sang mô hình khác

Trong một số trường hợp đôi khi hình thức của bài toán gây khó khăn cho chủ thể khi muốn chiếm lĩnh nội dung của nó. Với những bài toán như vậy thì chủ thể cần biến đổi hình thức của nó sang dạng khác để dễ dàng tìm lời giải hơn. Do đó, trong dạy học các môn Toán sơ cấp, GV cần chú trọng các dạng toán có thể chuyển đổi từ mô hình này sang mô hình khác, chẳng hạn như: chuyển từ đại số sang lượng giác và ngược lại, chuyển từ làm việc trên mô hình tứ diện sang làm việc trên mô hình hình hộp, chuyển từ đại số sang hình học và ngược lại, v.v... Muốn giải quyết các dạng toán đó, SV cần nắm được các quy tắc và tính chất của việc chuyển từ mô hình cũ sang mô hình mới, chẳng hạn muốn chuyển từ mô hình tứ diện sang mô hình hình hộp SV cần biết quy tắc tạo ra các kiểu hình hộp từ tứ diện và nắm được đặc điểm của hình hộp tương ứng với đặc điểm của tứ diện.

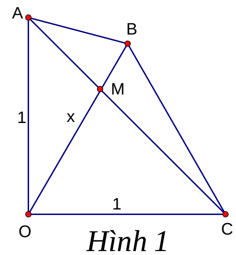
Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$.

Thông tin bài toán: Tổng của hai căn thức bậc hai của hai biểu thức $x^2 - x + 1$ và $x^2 - x\sqrt{3} + 1$. Liên tưởng đến các phương pháp đại số thường dùng ta thấy: Nếu đánh giá hai vế bằng bất đẳng thức thì ta chưa có dấu hiệu nào cho thấy sử dụng được bất đẳng thức đã biết; nếu phân tích các biểu thức trong căn thành tổng các bình phương để đánh giá thì dấu bằng không xảy ra. Nếu liên tưởng đến phương pháp giải tích thì việc xét dấu của đạo hàm khá phức tạp. Tóm lại nếu giải bài này bằng phương pháp đại số thông thường thì rất khó khăn. Do đó, ta nên biến đổi thông tin từ bài toán sao cho có thể chuyển sang mô hình khác để dễ tìm lời giải hơn, ở đây ta thử chọn mô hình hình học. Biểu thức có chứa căn nên có thể biến đổi để chuyển về tổng hai độ dài của đoạn thẳng và sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Biến đổi thông tin:

$x^2 - x + 1 = 1^2 + x^2 - 2.1.x.\frac{1}{2} = 1^2 + x^2 - 2.1.x.\cos 60^{\circ}$ và

$x^2 - x\sqrt{3} + 1 = 1^2 + x^2 - 2.1.x.\frac{\sqrt{3}}{2} = 1^2 + x^2 - 2.1.x.\cos 30^{\circ}$.



Hình 1

Từ đó, ta dựng các điểm A, B, C, O như hình vẽ (hình 1) với $\widehat{AOB} = 30^0$ và $\widehat{COB} = 60^0$, OA=OC=1, OB=x. Khi đó, tam giác AOC vuông cân. Theo định lý côsin ta có AB = $\sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$ và BC = $\sqrt{x^2 - x + 1}$.

Nên P = AB + BC ≥ AC = $\sqrt{2}$. Vậy P min = $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC (hay B trùng M). Khi đó, áp dụng định lí sin trong tam giác OCM ta có: $\frac{x}{\sin 45^0} = \frac{1}{\sin 75^0}$ suy ra x= $\frac{\sin 45^0}{\sin 75^0}$ hay x = $\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

3.4. Rèn luyện kỹ năng thiết lập mối liên hệ giữa Toán cao cấp và Toán phổ thông

Việc thiết lập mối liên hệ này giúp SV biết phê phán khi nghiên cứu Chương trình, SGK Toán PT đồng thời giúp họ thực hiện tốt vai trò thể chế hóa của người GV Toán trong tương lai.

Có thể rèn luyện cho SV thiết lập mối liên hệ này theo các hướng sau đây:

- Các khái niệm của Toán cao cấp là công cụ để nhìn nhận Toán phổ thông theo quan điểm thống nhất, đầy đủ hơn và sâu sắc hơn.

Ví dụ: GV yêu cầu SV tìm các thể hiện của khái niệm ánh xạ trong Toán phổ thông. Với việc thực hiện nhiệm vụ này, SV sẽ thấy được rằng các phép toán số học, khái niệm hàm số, các phép biến hình, … đều có chung một cấu trúc ánh xạ.

- Sử dụng kiến thức Toán cao cấp để giải thích một số kiến thức khó trong chương trình Toán phổ thông, đồng thời chính xác hóa một số kiến thức Toán phổ thông (vì lý do sư phạm mà những kiến thức này không được trình bày một cách chặt chẽ, logic).

Ví dụ: Khi giải các bài toán hình học phổ thông bằng phương pháp tọa độ, trong đó giả thiết và kết luận chứa đựng các bất biến afin và các bất biến về lượng, tại sao kết quả các bài toán đó không phụ thuộc vào cách chọn hệ tọa độ? (nhờ đó mà ta cố gắng chọn một hệ tọa độ thích hợp với mỗi bài toán để giải sao cho các dữ kiện của bài toán dịch sang ngôn ngữ tọa độ đơn giản).

Để giải thích được hiện tượng đó, SV phải nắm được các bất biến của phép biến đổi đẳng cự. Các bất biến afin và bất biến về lượng đều là các bất biến của phép đẳng cự. Và hệ tọa độ này có thể biến thành hệ tọa độ khác nhờ một phép biến đổi đẳng cự (ứng với ma trận chuyển giữa hai cơ sở đó). Do đó, kết quả bài toán không thay đổi khi ta chọn hệ tọa độ này hay hệ tọa độ khác để giải.

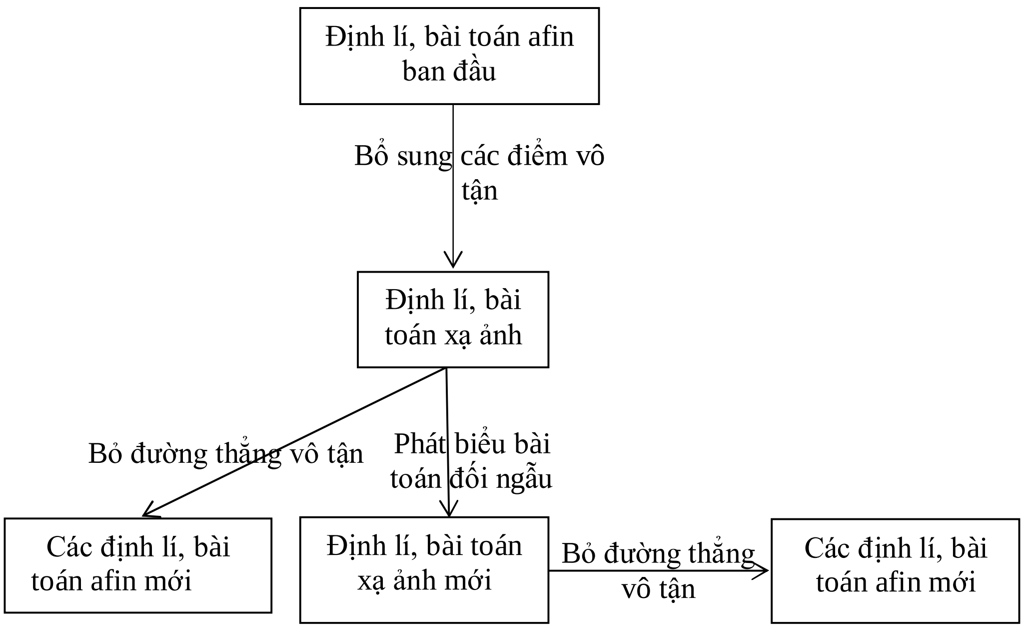
- Vận dụng kiến thức Toán cao cấp định hướng tìm tòi lời giải cho một số loại Toán phổ thông.

Ví dụ: Các bất biến afin đều thể hiện được qua biểu thức tọa độ trong hệ tọa độ afin. Do đó, nếu bài toán chứa hoàn toàn các bất biến afin thì có thể sử dụng hệ tọa độ afin để giải.

- Sử dụng kiến thức Toán cao cấp để sáng tạo các bài Toán phổ thông.

Ví dụ: Trong Chương trình Toán phổ thông có chứa đựng những yếu tố của Hình học afin và Hình học xạ ảnh, do đó từ lí thuyết về Hình học xạ ảnh mà SV đã được học ở bậc đại học trước đó ta rút ra con đường sáng tạo bài toán phổ thông như sau:

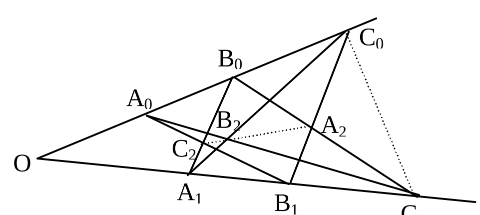
Xuất phát từ định lí, bài toán afin trong mặt phẳng afin (hình học afin 2 - chiều) của Toán phổ thông để tạo ra các định lí, bài toán mới theo hai hướng dưới dạng sơ đồ sau đây:



Chẳng hạn, xét bài toán phẳng: “ Cho hai đường thẳng song song a, b. Trên a lấy ba điểm A_0, B_0, C_0. Trên B lấy ba điểm A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng B_0C_1 và B_1C_0, A_0C_1 và A_1C_0, B_0A_1 và B_1A_0. Khi đó, A_0, B_0, C_0 thẳng hàng ”.

Trong mặt phẳng xạ ảnh P^2, bài toán trên trở thành định lí Papus:

“Trong P^2 cho sáu điểm phân biệt A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, trong đó A_0, B_0, C_0 thẳng hàng và A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Khi đó ba giao điểm A_2, B_2, C_2 của các cặp đường thẳng B_0C_1 và B_1C_0, A_0C_1 và A_1C_0, B_0A_1 và B_1A_0 thẳng hàng”. (hình 2)



Hình 2

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng A_0C_0 và A_1C_1.

Sau đây ta sẽ tạo ra ba bài toán phẳng mới:

b1) Chọn đường thẳng đi qua hai điểm C_0 và C_1 làm đường thẳng vô tận W và xét mặt phẳng afin $A^2= P^2\setminus W$. Khi đó, ta có bài toán: "Cho hình bình hành $OB_0A_2B_1$. Trên OB_0, OB_1 lần lượt lấy hai điểmA_0, A_1. Dựng hình bình hành $OA_0B_2A_1$; B_0A_1 cắt B_1A_0 tại C_2. Khi đó, ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng".

b2) Chọn đường thẳng đi qua các điểm A_2, B_2, C_2 làm đường thẳng vô tận W và xét mặt phẳng afin $A^2= P^2\setminus W$. Trong A^2 ta có $A_0B_1 // A_1B_0$, $A_0C_1 // A_1C_0$ và $B_0C_1 // B_1C_0$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Trong P^2 đường thẳng W đi qua điểm O. Khi đó, trong A^2 ta có $A_0C_0 // A_1C_1$, tức là $A_0C_0A_1C_1$ là hình bình hành. Vậy ta có bài toán: "Cho hình bình hành $A_0C_0A_1C_1$. Gọi B_0, B_1 là hai điểm lần lượt thuộc A_0C_0 và A_1C_1 sao cho $A_0B_1 // A_1B_0$. Chứng minh rằng $B_0C_1 // B_1C_0$".

Trường hợp 2: Trong P^2 đường thẳng W không đi qua điểm O. Khi đó, trong A^2 ta có A_0C_0 cắt A_1C_1 tại O.

Vậy ta có bài toán: "Cho tam giác OA_1C_0. Trên OC_0 lấy hai điểm A_0, B_0 và trên OA_1 lấy hai điểm C_1, B_1 sao cho A_0B_1 song song với A_1B_0, A_0C_1 song song với A_1C_0. Chứng minh rằng $B_0C_1 // B_1C_0$ ".

Bài toán đối ngẫu của định lí Papus trong P^2:

" Trong P^2 cho ba đường thẳng a, b, c đi qua một điểm D và ba đường thẳng m, n, p đi qua một điểm D'.

Khi đó, ba đường thẳng sau đây đồng quy tại một điểm O: đường thẳng nối hai giao điểm $M=a\cap n$ với $N = b\cap m$, đường thẳng nối hai giao điểm $K = a\cap p$ với $L = c\cap m$, đường thẳng nối hai giao điểm $H = b\cap p$ với $I = c\cap n$".

Sau đây ta sẽ tạo ra hai bài toán phổ thông khác:

b3) Chọn đường đi qua điểm M làm đường thẳng vô tận W sao cho toàn bộ hệ thống đang xét nằm về một phía đối với W. Xét mặt phẳng afin $A^2 = P^2 \setminus W$. Khi đó, a//n. Vậy ta có bài toán: "Cho ba đường thẳng a, b, c đi qua một điểm D và ba đường thẳng m, n, p đi qua một điểm D' sao cho a // n. Gọi $N = b\cap m$, $K = a\cap p$, $L = c\cap m$, $H = b\cap p$ và $I = c\cap n$. Gọi $O=HI\cap KL$. Chứng minh rằng NO // a // n".

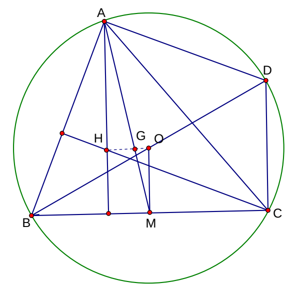
b4) Chọn đường thẳng MH là đường thẳng vô tận W và xét mặt phẳng afin $A^2 = P^2 \setminus W$. Khi đó, a // n và b // p. Vậy ta có bài toán: " Cho ba đường thẳng a, b, c đi qua một điểm D và ba đường thẳng m, n, p đi qua một điểm D' sao cho a // n và b // p. Gọi $N = b\cap m$, $K = a\cap p$, $L = c\cap m$, và $I = c\cap n$. Gọi d là đường thẳng đi qua I và song song với b. Gọi $O=d\cap KL$. Chứng minh rằng NO // a // n".

4. Xây dựng môi trường sư phạm để SV thực hành các phương thức đã đề ra

Môi trường sư phạm tốt nhất để SV rèn luyện các phương thức đã đề ra là môi trường hoạt động nhóm. Vấn đề mà GV đặt ra cho các nhóm phải được lựa chọn kỹ càng với những nhiệm vụ đòi hỏi sự điều ứng sơ đồ nhận thức đã có thông qua các phương thức rèn luyện ở trên. Với mỗi bài toán đưa ra, GV cần yêu cầu các nhóm như sau: Giải bài toán; trình bày suy nghĩ cách tìm tòi lời giải (tức là nêu cơ sở cho việc biến đổi thông tin bài toán); đề xuất hướng tổng quát bài toán (xét mối liên hệ với Toán cao cấp); những kết luận rút ra được từ việc giải quyết bài toán này.

Ví dụ: GV đưa ra các yêu cầu ở trên với một nhóm khi giải bài toán sau: "Chứng minh rằng trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng".

Có thể lập luận biến đổi thông tin của bài toán theo các hướng khác nhau để tìm các phương pháp giải khác nhau, chẳng hạn giải bằng phương pháp tổng hợp, sử dụng phép biến hình (bất biến của phép vị tự) hoặc sử dụng vectơ (biến đổi đẳng thức vectơ).



Hình 3

Ta có thể mô phỏng tiến trình suy nghĩ biến đổi thông tin của bài toán này bằng phương pháp tổng hợp theo phương thức liên tưởng kết hợp các thao tác trí tuệ (phân tích, tổng hợp, so sánh,...) như sau: Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng thông thường sử dụng một trong các kết quả về: cộng đoạn thẳng, hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh, bổ đề hình thang, biến hình, véctơ, ... Từ hình vẽ ta đã có A, G, M thẳng hàng nên có thể nghĩ đến chứng minh $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$. Để chứng minh hai góc bằng nhau ta có thể nghĩ đến hai tam giác đồng dạng, ở đây thích hợp nhất là hai tam giác AGH và MGO vì hai tam giác này chứa hai góc đã cho và có một số đặc điểm thuận lợi để chứng minh tính đồng dạng của chúng là: $\widehat{GAH} = \widehat{GMO}$ (vì so le trong) và tỉ số AG:GM = 2:1. Như vậy, để chứng minh hai tam giác AGH và MGO đồng dạng ta chỉ cần chứng minh tỉ số AH:OM = 2:1. Vì AH và OM song song với nhau nên để chứng minh tỉ số đó ta cần chuyển OM thành đường trung bình của một tam giác mà có cạnh tương ứng bằng AH. Ta đã có M là trung điểm BC rồi nên để OM là đường trung bình chỉ cần tạo ra một cạnh có O là trung điểm, vì O là tâm đối xứng của đường tròn ngoại tiếp nên ta lấy D đối xứng với B qua O. Khi đó OM là đường trung bình của tam giác BCD. Vấn đề còn lại là chứng minh AH = CD. Vì AH song song với CD nên việc chứng minh AH = CD đồng nghĩa với chứng minh tứ giác AHCD là hình bình hành. Vì đã có AH song song với CD nên ta chỉ cần chứng minh CH song song với AD. Yêu cầu cuối cùng này được thoả mãn vì CH và AD cùng vuông góc với AB. (xem Hình 3)

Đề xuất bài toán tổng quát hơn để thu được kiến thức mới:

- Liên tưởng đến các kiến thức của môn Hình học cao cấp đã được học ở năm đầu bậc đại học (Tam giác và tứ diện là các đơn hình, đường tròn và mặt cầu là các siêu cầu trong không gian Euclide, khái niệm trọng tâm của hệ điểm và thẳng hàng là các bất biến afin nên cũng là bất biến Euclide) SV có thể phát biểu một bài toán tổng quát cho tứ diện. Tuy nhiên, tứ diện thông thường thì chưa chắc có trực tâm nên ta phải xét cho tứ diện có các đường cao đồng quy là tứ diện trực tâm và ta có bài toán: "Chứng minh rằng trong một tứ diện trực tâm thì trực tâm, trọng tâm, tâm mặt cầu ngoại tiếp thẳng hàng". Việc chứng minh bài toán trong tứ diện có thể sử dụng kết quả của bài toán phẳng ở trên.

- Với một sự liên tưởng cao hơn SV có thể đưa ra một bài toán cho không gian n - chiều: Trong không gian Euclide n-chiều cho đơn hình n-chiều $S(A_0A_1A_2...A_n)$ thoả mãn hai điều kiện:

(i) đơn hình (S) có siêu cầu ngoại tiếp với tâm O (điều kiện này luôn thỏa mãn vì ta biết rằng n+1 điểm độc lập trong không gian Euclide n-chiều luôn thuộc một siêu cầu);

(ii) các đường thẳng đi qua một đỉnh và vuông góc với siêu mặt đối diện đồng quy tại một điểm H.

Khi đó, chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng, với G là trọng tâm của hệ n+1 điểm $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$.

Qua dạy học ví dụ này SV cần rút ra được những đặc điểm sau:

- Bài toán này sau khi đã chứng minh sẽ trở thành công cụ giải các bài toán khác về chứng minh thẳng hàng, đó là tiền đề cho sự liên tưởng khi giải các bài toán sau này.
- Một yếu tố rất quan trọng quyết định hoạt động của người học đó là thu nhận thông tin và xử lý thông tin một cách thích hợp. Chẳng hạn, thông tin "ba điểm thẳng hàng" đòi hỏi người học phải liên tưởng đến các kiến thức liên quan đến thẳng hàng, thông tin "A, G, M thẳng hàng và hai góc $\widehat{AGH}$, $\widehat{MGO}$ bằng nhau" dẫn đến chọn hai tam giác AGH và MGO để chứng minh đồng dạng, v.v...
- Liên tưởng với những tri thức đã biết kết hợp với các thao tác tư duy (phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, tổng quát hóa) để thu được những kết quả mới.

5. Kết luận

Trong quá trình định hướng lời giải bài toán thì việc thu nhận thông tin và xử lý thông tin đóng vai trò quan trọng. Hơn nữa, để SV tạo ra được các sơ đồ nhận thức mới - bằng chứng của việc học cái mới - họ cần biết sử dụng các thao tác trí tuệ trên lượng thông tin đã xử lý, kết hợp với phép liên tưởng. Do đó, thông qua việc dạy học môn Toán sơ cấp, GV nên tận dụng mọi cơ hội để rèn luyện cho SV - với vai trò là chủ thể của hoạt động học - kỹ năng biến đổi thông tin trên các bài toán - với vai trò là đối tượng của hoạt động học - nhằm giúp họ nâng cao kỹ năng nghề nghiệp sau này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Thúc Lanh (chủ biên), Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí (2000), *Từ điển toán học thông dụng*, Nxb Giáo dục.
2. Nguyễn Phú Lộc (2008), "Sự "thích nghi" trí tuệ trong quá trình nhận thức theo quan điểm của J.Piaget", Tạp chí Giáo dục, (183), tr. 11-13.
3. G. Polya (1997), *Giải bài toán như thế nào*, Nxb Giáo dục.
4. Đào Văn Trung (1996), *Làm thế nào để học tốt toán phổ thông*, Nxb Giáo dục.