# MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CÁC HIỆN TƯỢNG BIẾN THIÊN TRONG DẠY HỌC NHỜ HÌNH HỌC ĐỘNG DỰ ÁN NGHIÊN CỨU MIRA

ANNIE BESSOT[*], NGUYỄN THỊ NGA[**]

**TÓM TẮT**

*Mô hình hóa giữ vị trí ngày càng quan trọng trong cộng đồng toán học của nhiều nước. Song song đó, những nhiệm vụ mô hình hóa toán học giữ tầm quan trọng ngày càng tăng trong xã hội chúng ta. Trước hết, chúng tôi sẽ trình bày những điều mà chúng tôi mong đợi ở việc mô hình hóa toán học các hiện tượng biến thiên và cuộc sống khó khăn của nó trong giảng dạy ở trường trung học. Tiếp đó, chúng tôi sẽ giới thiệu những nội dung của dự án nghiên cứu Mira mà một trong những mục tiêu là xây dựng đồ án sư phạm cho phép chuyển giao cho học sinh một phần trách nhiệm trong quá trình mô hình hóa. Điều này thể hiện một sự ngắt quãng với mối quan hệ thể chế thống trị, đó là giảng dạy các mô hình đã được cho sẵn. Đồ án sư phạm của chúng tôi tổ chức quá trình chuyển giao việc mô hình*

**ABSTRACT**

***Mathematical modeling of variations in teaching thanks to dynamic geometry – Mira research project***

*Modeling is playing an increasingly important role in mathematics communities in many countries. At the same time, the mathematical modeling tasks play an increasingly important role in our society. Firstly, we present what we expect from mathematical modeling of variable phenomena, and its difficulties in secondary schools. Then, we introduce the contents of the research Mira project, one of its goals is to design a didactic plan to hand over some responsibilities in the modeling process to students. This expresses the breaking with the dominant institutional relation – teaching with given teaching models. This didactic plan organizes a transition process of modeling in a dynamic geometry environment.*

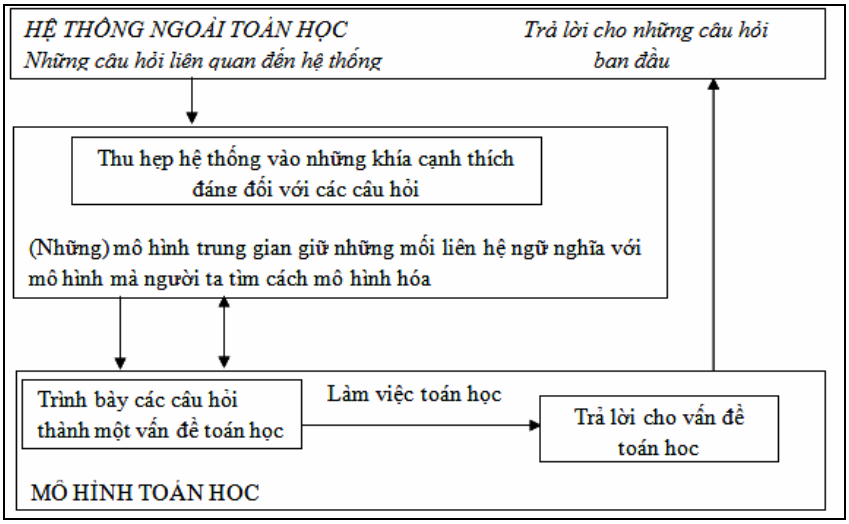
Mô hình hóa cho phép làm rõ sự hữu ích của toán học, phát triển ở học sinh (HS) khả năng phê phán đối với việc giải quyết các vấn đề trong cuộc sống thực tiễn, chuẩn bị cho họ những hoạt động nghề nghiệp đa dạng và cuối cùng là nối liền toán học với các môn học khác.

Việc mô hình hóa giữ vị trí ngày càng quan trọng trong chương trình môn toán của nhiều nước. Song song đó, những nhiệm vụ mô hình hóa toán học giữ tầm quan trọng ngày càng tăng trong xã hội chúng ta.

[*] PGS TS, Đại học Joseph Fourier
[**] ThS, Đại học Sư phạm TP HCM, NCS Đại học Joseph Fourier, Grenoble1, Pháp

## 1. Thuật ngữ mô hình hóa bao hàm một cách chính xác cái gì?

Theo Chevallard (1992), một mô hình là "một *cái máy* mà hoạt động của nó cho phép *tạo ra những kiến thức* liên quan đến hệ thống được mô hình hóa". Người ta xây dựng cái máy đó như thế nào? Sau đây, chúng tôi giới thiệu một sơ đồ tóm tắt quá trình mô hình hóa.




***Sơ đồ 1. Quá trình mô hình hóa (theo Coulange 1998)***

Sơ đồ này chia quá trình mô hình hóa thành 4 pha:

- Pha 1: Chuyển hệ thống ngoài toán học thành một mô hình trung gian;

Mô hình trung gian giữa tình huống ngoài toán học và mô hình toán học cần xây dựng biểu thị một cấp độ trừu tượng hóa đầu tiên của "thực tiễn". Mô hình này tiến triển từ từ qua việc mô hình hóa: một mô hình trung gian có thể gần về ngữ nghĩa ít hoặc nhiều hơn so với tình huống thực tế được xem xét hoặc so với mô hình toán học cần xây dựng.

- Pha 2: Chuyển mô hình trung gian thành mô hình toán học;
- Pha 3: Hoạt động toán học trong mô hình toán học;
- Pha 4: Trở lại tình huống được nghiên cứu để chuyển câu trả lời của vấn đề toán học thành câu trả lời của những câu hỏi ban đầu và đối chiếu chúng với thực tiễn được mô hình hóa.

## 2. Vị trí của sự mô hình hóa trong các hệ thống dạy học khác nhau?

### *2.1. Khuynh hướng dạy học các mô hình*

Trong dạy học toán ở trường phổ thông, có một khuynh hướng dạy học các mô hình có sẵn. Trong các mô hình này, những yếu tố tri thức đã được xác định rõ và việc dạy học chúng có thể là đối tượng của một sự thương lượng xã hội tường minh. Việc tổ chức các hoạt động mô hình hóa thực sự trong giờ học toán bị cản trở bởi sự ngăn cách

lĩnh vực tri thức đặc trưng của các thể chế trường học. Hơn nữa Chevallard (1989) đã viết:

> "…mặc dù được chấp nhận theo nguyên tắc của nó, hoạt động này, vì cần được tham chiếu với một thực tế ngoài toán học, nên vẫn đặt ra vấn đề với các nhà toán học, trong chừng mực mà nó đưa vào *cái không toán học trong việc dạy học toán học*" [2, tr.147].

### *2.2. Tại sao những bài toán thuộc loại hiếm trong các sách giáo khoa toán không phải là những bài tập mô hình hóa?*

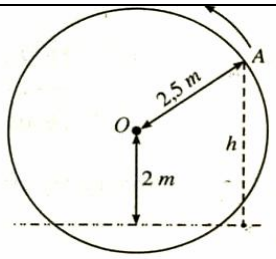
Trong phần này, chúng tôi sẽ chỉ ra sự thiếu vắng quá trình mô hình hóa trong những đề toán xuất phát từ một thực tế ngoài toán học, hiện diện trong dạy học toán ở trung học Việt Nam và Pháp. Điều này xác nhận việc thu hẹp dạy học mô hình hóa thành dạy học các mô hình đã có sẵn.

**Dạy học toán ở trung học Việt Nam**

Ví dụ bài tập 25 trang 32 sách giáo khoa [1]lớp 11:

**25.** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m ; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (h. 1.24). Khi guồng quay đều, khoảng cách $h$ (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm $A$ của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó

$$y = 2 + 2{,}5 \sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right],$$



*Hình 1.24*

với $x$ là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút ; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước (xem *bài đọc thêm* về dao động điều hoà trang 15). Hỏi :

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào ?

***Minh họa 1. Bài tập ở lớp 11 Việt Nam***

Các mô hình hình học (hình vẽ 1.24) và đại số ($y = 2+2{,}5\sin[2\pi(x - \frac{1}{4})]$) không được yêu cầu xây dựng mà được cho sẵn. Việc trở lại mô hình hình học để trả lời các câu hỏi đặt ra không phải là mong đợi của thể chế mà nó chỉ đóng vai trò minh họa. Bài tập này đưa HS vào hợp đồng sư phạm của việc giải các phương trình lượng giác (nghiên cứu đang được thực hiện bởi Nguyễn Thị Nga).

**Dạy học toán ở trung học Pháp**

Ví dụ bài tập 46 trang 292 sách giáo khoa[2] lớp 2$^{de}$ (tương đương lớp 10 của Việt Nam):

> Dòng điện được sử dụng trong các thiết bị điện trong gia đình là dòng điện xoay chiều, nghĩa là nó truyền đi luân phiên hai chiều bên trong dây điện. Cường độ dòng điện I của dòng điện truyền trong một thiết bị cho trước được cho bởi biểu thức sau: $I(t) = 2\sin(100\pi t)$ với cường độ dòng điện I tính bằng Ampère (A) và t, thời gian, tính bằng giây.

1) Tìm chu kì của hàm số $t \mapsto I(t)$ ?

Tìm giá trị của tần số ? (Ta gọi tần số là nghịch đảo của chu kì : F = 1/T ; nó được biểu thị bằng Hertz : Hz)

2) Tìm giá trị lớn nhất của I ? giá trị nhỏ nhất của I ?

3) Ở thời điểm t = 0,1025 s, cường độ dòng điện là bao nhiêu ?

4) Biểu diễn hàm số I trong một hệ trục tọa độ vuông góc mà chúng ta lấy đơn vị là : 1 cm tương ứng 0,01 giây trên trục hoành và 1 cm tương ứng 1 ampère trên trục tung.

***Minh họa 2. Bài tập ở lớp 2$^{de}$ Pháp***

Ở bài tập này, mô hình đại số cũng được cho sẵn. Câu hỏi thứ tư không phục vụ gì cả nhưng đó là cái có thể quan sát của hợp đồng sư phạm đang được áp dụng trong bài tập này - hợp đồng của việc nghiên cứu hàm số.

Trong cả hai thể chế, ẩn đằng sau các bài tập là một mô hình hàm được biểu thị bằng ngôn ngữ đại số, với những cái phô bày đặc biệt trong mỗi thể chế: y = f(x) trong dạy học toán ở trung học Việt Nam và $t \mapsto f(t)$ trong dạy học toán ở trung học Pháp.

## 3. Dự án Mira[3]

Theo Coulange (1998), người ta phân biệt hai hướng có thể để dạy học toán trong mối quan hệ với việc mô hình hóa toán học:

- Mô hình hóa như một phương tiện sư phạm để đưa vào những khái niệm toán học;
- Dạy học chính quá trình mô hình hóa.

Trong dự án Mira, chúng tôi thực hiện đồng thời cả hai hướng: dạy học mô hình hóa và dạy học các khái niệm toán học bằng mô hình hóa. Hai hướng này tác động qua lại một cách biện chứng.

### *3.1. Lựa chọn của dự án Mira: tình huống ngoài toán học về sự đồng biến thiên của các đại lượng định lượng được. Tại sao?*

Quá trình mô hình hóa các hiện tượng biến thiên dẫn đến xem xét các hiện tượng này như những tình huống đồng biến thiên của các đại lượng định lượng được. Vì vậy, nó dẫn đến việc tìm cách đạt tới một mô hình hàm.

Thế nhưng, các nghiên cứu về khái niệm hàm số lại phân biệt hai quan niệm cơ bản sau đây mà chúng ta có thể xác định như chúng tiếp nối nhau trong lịch sử:

- Sự đồng biến thiên của hai đại lượng cần thiết việc mô hình hóa theo những thuật ngữ biến phụ thuộc và/hoặc biến độc lập. Euler đã viết năm 1755 như sau:

> "Nếu một số đại lượng phụ thuộc vào các đại lượng khác sao cho nếu các đại lượng khác thay đổi, các đại lượng này cũng thay đổi theo, lúc đó chúng ta gọi các đại lượng này là hàm số của các đại lượng khác".

Ở đây, chúng ta đang nói về quan niệm động của khái niệm hàm số.

- Sự tương ứng: một hàm số liên kết một số duy nhất với một số cho trước. Hankel (1870) định nghĩa hàm số như sau:

> "Ta nói y là hàm số của x nếu với mỗi giá trị của x thuộc một khoảng nào đó tương ứng một giá trị xác định của y mà không vì thế mà đòi hỏi y xác định với mọi khoảng bởi cùng một quy luật theo x, cũng

> không cần thiết y được xác định bởi một biểu thức toán học tường minh của x. Tôi sẽ gọi định nghĩa này theo tên Dirichlet vì định nghĩa này, định nghĩa đã loại bỏ tất cả những quan niệm cũ hơn, là cơ bản trong những công trình nghiên cứu trên chuỗi Fourier" (Hankel (1870), p.49).

Chúng ta đang nói về quan niệm tĩnh của khái niệm hàm số.

Quan niệm tĩnh dựa trên sự tương ứng được áp đặt trong dạy học hiện nay, làm mờ đi nghĩa của khái niệm biến và hàm số. Thế nhưng, nhiều nghiên cứu lại chỉ ra rằng các khái niệm biến và khái niệm phụ thuộc (biến độc lập và biến phụ thuộc) đặt ra những khó khăn đối với HS.

> "Các khái niệm biến và khái niệm phụ thuộc chỉ mang nghĩa trong những tình huống biến thiên. Cách duy nhất để nhận thấy cái này phụ thuộc cái khác là làm cho chúng thay đổi lần lượt từng cái một để ghi nhận sự biến thiên có hiệu quả nào nhưng chừng nào mà không có sự biến thiên, gần như không thể biết có sự phụ thuộc hay không" (René de Cotret, 1988).

Dự án nghiên cứu của chúng tôi dựa trên giả thuyết sau đây:

Giả thuyết 1. Sự mô hình hóa một tình huống đồng biến thiên của hai đại lượng có thể cho phép mang lại nghĩa cho khái niệm biến và khái niệm hàm số.

### *3.2. Tại sao lại nhờ đến môi trường hình học động?*

Giáo viên (GV) không có phương tiện để tạo ra các tình huống mô hình hóa vắng mặt trong sách giáo khoa và điều hành những tình huống như vậy trong lớp học. Hơn nữa, việc đi vào quá trình mô hình hóa dường như là một giai đoạn khó khăn đối với HS.

Vì vậy, khi GV ở trong tình trạng đối diện với một tình huống oái ăm: hoặc là anh ta không giúp đỡ HS, lúc đó HS ở trong tình trạng tình huống thất bại; hoặc anh ta cho sẵn lời giải và HS không học được gì cả. Thực ra, giải pháp thường được chấp nhận bởi GV là đề nghị sẵn cho HS những mô hình.

Giả thuyết thứ hai của chúng tôi là:

Môi trường hình học động có khả năng thực hiện giai đoạn đầu tiên của quá trình mô hình hóa bằng việc xây dựng một mô hình *trung gian* của tình huống đồng biến thiên của các đại lượng.

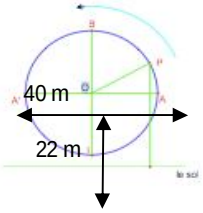
Trong môi trường hình học động này, sự mô hình hóa các đại lượng biến thiên được thực hiện bởi việc tạo ra các điểm di động. Một điểm di động có thể mô hình hóa các đại lượng biến thiên khác nhau (khoảng cách, diện tích, thời gian). Vì thế, sự thiết lập mô hình trung gian nhờ vào hình học động cho phép cụ thể hóa các đại lượng biến thiên bằng việc chuyển giao cho HS trách nhiệm lựa chọn các đại lượng thích đáng trong tình huống được nghiên cứu. Chúng ta có thể đưa vào khái niệm điểm điều khiển một điểm khác - tiền đề của các khái niệm biến độc lập và biến phụ thuộc. Cuối cùng, việc mô hình hóa hình học trung gian này giữ lại tri giác vết vật chất của hiện tượng biến thiên (gần về ngữ nghĩa), mà ngược lại biến mất trong các kí hiệu đại số (ngắt quãng ngữ nghĩa) trong giai đoạn cuối cùng của quá trình mô hình hóa.

### *3.3. Khái quát về đồ án sư phạm*

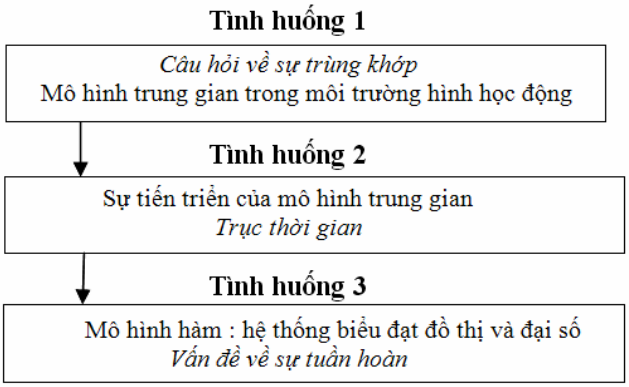
Chúng tôi lấy lại ý tưởng của Burgermeister (2009) là điều chỉnh các đề toán trong phạm vi trường học biểu thị một mối quan hệ thể chế nào đó với sự mô hình hóa,

để xây dựng những tình huống cho phép chuyển giao cho HS một phần trách nhiệm trong quá trình mô hình hóa. Trong dự án này, chúng tôi lựa chọn đề toán về đu quay.

Bài toán về đu quay được phát biểu theo hai mối quan hệ thể chế (Việt Nam và Pháp) như sau:

| **Như dạng bài tập 25 của Việt Nam** | **Như dạng bài tập 46 của Pháp** |
|---|---|
| Một công viên giải trí ở TP Hồ Chí Minh có một đu quay lớn có đường kính 40m và tâm quay của nó cách mặt đất 22m (hình 1). Bắt đầu lượt chơi, bạn Minh bước vào một cabin.<br>  <br><br>Khi đu quay quay đều đặn theo một chiều nhất định, khoảng cách y (mét) từ cabin của Minh, gắn với điểm P, đến mặt đất được tính bởi công thức : $y = 22 - 20 \cos \pi x/5$ với x là thời gian quay của đu quay tính bằng phút.<br>a) Ở thời điểm nào Minh ở vị trí thấp nhất?<br>b) Ở thời điểm nào Minh ở vị trí cao nhất?<br>c) Minh cách mặt đất 23m lần đầu tiên khi nào? | Một công viên giải trí ở TP Hồ Chí Minh có một đu quay lớn có đường kính 40m và tâm quay của nó cách mặt đất 22m. Bắt đầu lượt chơi, bạn Minh bước vào một cabin.<br>Khi đu quay quay đều đặn theo một chiều nhất định, khoảng cách h (mét) từ cabin của Minh đến mặt đất được tính bởi công thức : $h(t) = 22 - 20 \cos \pi t/5$ với t là thời gian quay của đu quay tính bằng phút.<br>a) Tìm chu kì của hàm số $t \mapsto h(t)$?<br>b) Tìm giá trị lớn nhất của h ? giá trị nhỏ nhất của h?<br>c) Ở thời điểm t = 3 phút, khoảng cách từ cabin của Minh đến mặt đất là bao nhiêu?<br>d) Biểu diễn hàm số h trong một hệ trục tọa độ vuông góc mà chúng ta lấy đơn vị là : 1cm tương ứng 1 phút trên trục hoành và 1cm tương ứng 5m trên trục tung. |

Chúng tôi tóm tắt trong sơ đồ sau đây chuỗi ba tình huống trong đồ án sư phạm xung quanh *bài toán về đu quay*. Tình huống thứ ba là trung tâm trong nghiên cứu đang được thực hiện bởi Nguyễn Thị Nga. Trong sơ đồ này, chúng tôi chỉ giữ lại những yếu tố thuộc vào sơ đồ quá trình mô hình hóa đã trình bày ở trên.




***Sơ đồ 2. Đồ án sư phạm***

Trong bài viết này, chúng tôi chỉ giới hạn ở việc trình bày sơ lược tình huống đầu tiên của đồ án sư phạm. Trong tình huống đó, chúng tôi tìm cách chuyển giao cho HS trách nhiệm đầu tiên trong quá trình mô hình hóa hàm số một tình huống đồng biến thiên.

- Hệ thống ngoài toán học mà chúng tôi tìm cách mô hình hóa:

"Một công viên giải trí ở TP Hồ Chí Minh có một đu quay lớn. Bắt đầu lượt chơi, bạn Minh bước vào một cabin. Một tia sáng màu đỏ chiếu sáng từng đợt vào một vị trí cố định của đu quay mà các cabin đi qua. Nếu một cabin được chiếu sáng, người ngồi trên cabin sẽ thắng một lượt chơi miễn phí. Sau đây là hình ảnh của đu quay".

- Nghiên cứu mà chúng tôi muốn thực hiện trên hệ thống[4]:

"Mục đích của công việc mà chúng ta sẽ cùng nhau thực hiện là tìm xem trong điều kiện nào thì Minh thắng một lượt chơi miễn phí".

- Yêu cầu dẫn dắt HS tham gia vào quá trình mô hình hóa:

"Vẽ trong Cabri một hình biểu diễn đu quay và cabin của Minh sao cho việc di chuyển điểm P sẽ điều khiển chuyển động của cabin trên đu quay".

Chú ý rằng trên màn hình Cabri, có một điểm P di động trên tia cho trước.

Sau đây, chúng tôi sẽ mô tả hai chiến lược có thể để xây dựng một mô hình trung gian đầu tiên: chiến lược phép chiếu phối cảnh và chiến lược "chuyển số đo" - chiến lược nhắm đến.

*- Chiến lược phép chiếu phối cảnh*

Vẽ đường tròn biểu diễn đu quay. Chọn một điểm I trên đường tròn, M là giao điểm của PI với đường tròn.

***Minh họa 3. Chiến lược phép chiếu phối cảnh***

Với chiến lược này, điểm M chỉ thực hiện một vòng không hoàn chỉnh trên đường tròn khi P di chuyển trên tia đã cho. Khi P ngày càng tiến ra xa gốc của tia, PI tiến về tiếp tuyến của đường tròn tại I !

- *Chiến lược "chuyển số đo"*

Vẽ đường tròn biểu diễn đu quay. Chuyển số đo đoạn thẳng OP (P phân biệt với O) lên đường tròn từ một điểm "gốc" I trên đường tròn.

Chú ý rằng đường tròn có hai cương vị đồng thời trong mô hình hình học trung gian - đu quay và quỹ đạo của cabin của Minh.

Một vài yếu tố của môi trường cho phép loại bỏ hay chấp nhận các mô hình trung gian được tạo ra. Chẳng hạn, chúng tôi nêu ra đây hai trong số những yếu tố đó:

1. Cabin của Minh không đi ra khỏi đu quay.
2. Cabin có thể đi được nhiều vòng.

Như vậy, chính việc tham chiếu vào thực tế sẽ cho phép hợp thức hóa hay không những sản phẩm được tạo ra bởi HS. Chẳng hạn, đặc trưng thứ 2 của thực tế được mô hình hóa cho phép loại bỏ chiến lược phép chiếu phối cảnh. Ngược lại, chiến lược "chuyển số đo" tôn trọng mỗi ràng buộc nêu trên.

GV không cần phải đánh giá các mô hình được tạo ra bởi HS. Ngược lại, nếu cần thiết, họ có thể làm rõ cho HS những quy tắc hợp thức tương tự như các đặc trưng 1 và 2 nêu trên của thực tế.

Một thực nghiệm thử đã được thực hiện vào ngày 5 tháng 12 năm 2009 ở trường THPT Trường Chinh, TP Hồ Chí Minh với 14 HS của một lớp chọn. Những HS này trước đó chưa biết Cabri géomètre. Hai quy trình cuối cùng của hai nhóm (trên 6 nhóm) có thể gắn tương ứng với mỗi chiến lược được mô tả ở trên.

[1] Lớp 11, sách giáo khoa nâng cao, chương 1: Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

[2] Collection Déclic (Mathématiques 2de, Hachette éducation, 2004), chương 11: Lượng giác

[3] Tham gia vào dự án Mira - hợp tác nghiên cứu Pháp – Việt (Mobilité International Rhône – Alpes): Annie Bessot, Alain Birebent, Claude Comiti, Colette Laborde, Sophie Soury Lavergne, Lê Thị Hoài Châu, Nguyễn Thị Nga, Lê Thái Bảo Thiên Trung.

[4] Chúng ta tìm cách mô hình hóa thực tế ngoài toán học bởi một mô hình trung gian để nghiên cứu Minh có thắng một lượt chơi miễn phí hay không: Minh sẽ thắng nếu có một sự trùng khớp giữa cabin của Minh và ánh sáng của tia sáng màu đỏ.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Burgermeister P-F. (2009), "Modélisation mathématique de problèmes extramathématiques au lycée", *Vers une praxéologie consistante de la modélisation*, Colloque EMF. Dakar, 6 – 10 avril .
2. Chevallard Y. (1989), "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au Collège", 2ème partie, perspectives curriculaires: la notion de modélisation, *Petit x* 19, 43-72.
3. Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.12/1, 73-112, La Pensée Sauvage / Grenoble.

***(Xem tiếp trang 91)***

4. Coulange L. (1998), "Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement", *Petit x*, n°47, 33-58.
5. René de Cotret S. (1988), "Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante", *Petit x*, n°17, 5-27.