HÀM GAMMA P-ADIC VÀ CÁC ĐỒNG DƯ THỨC LIÊN QUAN ĐẾN HỆ SỐ NEWTON

MỴ VINH QUANG*, PHAN DUY NHẤT**

TÓM TẮT

Trong bài báo, chúng tôi chứng minh một đồng dư thức của hàm gamma p-adic dưới đây:

$$\Gamma_p(p^r x) \equiv \Gamma_p(p^r)^x \left[1 + \frac{x(x^2-1)}{3} p^r \sum_{k=1,(k,p)=1}^{p^r} \frac{1}{k}\right] (mod\ p^{5r}) \quad (1)$$

trong đó: $\Gamma_p : Z_p \to C_p$ *là hàm gamma p-adic;* p *là số nguyên tố,* $p > 5$*;* $r \geq 1$*;* $x \in Z_p$.

Từ đó, chúng tôi suy ra được một số đồng dư thức trong số học liên quan đến hệ số Newton.

Từ khóa: hàm gamma p-adic, đồng dư thức, hệ số Newton.

ABSTRACT

P-adic gamma function and congruences related to the Newton coefficients

In the paper, we prove a congruence of the p-adic gamma function follows:

$$\Gamma_p(p^r x) \equiv \Gamma_p(p^r)^x \left[1 + \frac{x(x^2-1)}{3} p^r \sum_{k=1,(k,p)=1}^{p^r} \frac{1}{k}\right] (mod\ p^{5r}) \quad (1)$$

Where: $\Gamma_p : Z_p \to C_p$ *is the p-adic gamma function; p is a prime,* $p > 5$*;* $r \geq 1$*;* $x \in Z_p$.

Since then, we deduce some congruences in arithmetic relating to the Newton coefficients.

Keywords: p-adic gamma function, congruence, Newton coefficient.

1. Giới thiệu

Đồng dư thức $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1$ (mod p) được chứng minh khá đơn giản. Năm 1819, Babbage đã chứng minh một đồng dư thức mạnh hơn, với số nguyên tố $p \geq 3$ thì

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Năm 1862, Wolstenholme đã chứng minh $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$ với mọi số nguyên tố $p \geq 5$. Năm 1899, J. Glaisher với kết quả $\binom{np+p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$ và năm 1990, D.F. Bailey với kết quả $\binom{np}{rp} \equiv \binom{n}{r} \pmod{p^3}$ cho mọi số nguyên tố $p \geq 5$.

Khi giải tích p-adic ra đời đã mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới. Tương tự hàm gamma trong giải tích phức, ta có hàm gamma p-adic trong giải tích p-adic với tính chất sau:

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{i=1,(i,p)=1}^{n-1} i$$

ta thấy được mối liên hệ giữa hàm gamma p-adic và hệ số của nhị thức Newton như sau:

$$\binom{np+p-1}{p-1} = \frac{\Gamma_p(np+p)}{\Gamma_p(np)\Gamma_p(p)}$$

khi đó có thể viết lại đồng dư thức của J. Glaisher như sau:

$$\frac{\Gamma_p(np+p)}{\Gamma_p(np)\Gamma_p(p)} \equiv 1 \pmod{p^3}$$

Từ đây, tạo động lực cho chúng ta nghiên cứu những đồng dư thức của hàm gamma p-adic. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chứng minh đồng dư thức (1) và sử dụng kết quả này để suy ra một số đồng dư thức số học liên quan đến hệ số Newton.

2. Các kết quả được sử dụng trong bài báo

2.1. Hàm gamma p-adic

Trường số thực R không đóng đại số, bao đóng đại số của R là trường số phức C.

Làm đầy đủ Q theo giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ ta được trường Q_p, Q_p đầy đủ nhưng không đóng đại số. Kí hiệu bao đóng đại số của Q_p là $\overline{Q_p}$. Giá trị tuyệt đối trên $\overline{Q_p}$ được xác định như sau:

Với mọi $a \in \overline{Q_p}$ thì a phải là phần tử đại số trên Q_p, do đó tồn tại đa thức $Irr(a,Q,x) \in Q_p[x]$ có dạng $Irr(a,Q,x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ bất khả quy trên Q_p, nhận a làm nghiệm.

Ta chứng minh được $\boxed{|a|_p = \sqrt[n]{|a_0|_p}}$ là giá trị tuyệt đối trên $\overline{Q_p}$. Trường $\overline{Q_p}$ đóng đại số nhưng nó lại không đầy đủ theo $\boxed{|\ |_p}$ vừa xây dựng. Nếu tiếp tục làm đầy đủ $\overline{Q_p}$ theo $\boxed{|\ |_p}$ thì ta sẽ được trường số phức p-adic. Kí hiệu $C_p = \hat{\overline{Q_p}}$. Trường số phức p-adic C_p đóng đại số, đầy đủ và đóng vai trò tương tự như trường số phức C trong giải tích phức.

Mệnh đề 2.1.

Tập hợp $Z_p = \left\{a \in Q_p : |a|_p \leq 1\right\}$ *cùng phép toán cộng và phép toán nhân trong* Q_p *tạo thành một vành gọi là vành các số nguyên p-adic.*

Định nghĩa 2.2.

Dãy $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ trong C_p được gọi là một dãy nội suy p-adic nếu tồn tại duy nhất một hàm số liên tục $f : Z_p \to C_p$ sao cho $f(n) = a_n \quad \forall n \in N$.

Định lí 2.3.

Cho p là một số nguyên tố. Khi đó dãy $\{a_n\}$ *với* $a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n-1}{}' i$ *là một dãy nội suy p-adic. Trong đó* $\prod '$ *là tích lấy theo tất cả các i nguyên tố với p.*

Từ định nghĩa của dãy nội suy p-adic tồn tại duy nhất hàm $\Gamma_p : Z_p \to C_p$ liên tục trên Z_p thỏa

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n-1}{}' i$$

Hàm Γ_p được xác định như trên gọi là hàm gamma p-adic.

2.2. Một số đồng dư thức

Chúng ta kí hiệu $\sum '$ thay cho $\sum_{k=1,(k,p)=1}^{p^r}$

Định lí 2.1.

Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 5. Chúng ta có các đồng dư thức sau:

(i) $\sum{}' \frac{1}{k^{2s}} \equiv 0$ *(mod* p^r*) nếu (p-1) không chia hết 2s.*

(ii) $\sum{}' \frac{1}{k^{2s+1}} \equiv 0$ *(mod* p^{2r}*) nếu (p-1) không chia hết 2(s + 1).*

(iii) $\sum{}'\frac{1}{k} \equiv -\frac{p^r}{2}\sum{}'\frac{1}{k^2}$ *(mod p^{4r}).*

(iv) $\sum\limits_{k<m}{}'\frac{1}{km} \equiv -\frac{1}{2}\sum{}'\frac{1}{k^2}$ *(mod p^{4r}).*

Chứng minh:

(i) *Vì* (p-1) không chia hết 2s nên tồn tại k_0 thỏa p không chia hết $k_0^{2s}-1$ và k_0. Nếu k chạy qua một hệ thặng dư thu gọn theo (mod p^r) thì k_0k cũng chạy qua một hệ thặng dư thu gọn theo (mod p^r). Khi đó:

$$\frac{1}{k_0^2}\sum{}'\frac{1}{k^{2s}} = \sum{}'\frac{1}{(k_0k)^{2s}} \equiv \sum{}'\frac{1}{k^{2s}} \pmod{p^r}$$

Suy ra $(1-\frac{1}{k_0^2})\sum{}'\frac{1}{k^{2s}} \equiv 0 \pmod{p^r}$. Do đó $\sum\frac{1}{k^{2s}} \equiv 0 \pmod{p^r}$. □

(ii) Ta có:

$$\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}} = \sum{}'\frac{1}{(p^r-k)^{2s+1}} = -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}}\frac{1}{(1-\frac{p^r}{k})^{2s+1}}$$

$$= -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}}\left(1+\frac{p^r}{k}+\frac{p^{2r}}{k^2}+\frac{p^{3r}}{k^3}+\ldots\right)^{2s+1}$$

$$\equiv -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}}\left(1+\frac{p^r}{k}\right)^{2s+1} \quad (\text{mod } \mathrm{p}^{2r})$$

$$\equiv -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}}\left(1+(2s+1)\frac{p^r}{k}\right) \quad (\text{mod } \mathrm{p}^{2r})$$

$$= -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}} - (2s+1)p^r\sum{}'\frac{1}{k^{2s+2}} \quad (\text{mod } \mathrm{p}^{2r})$$

Do (p – 1) không chia hết 2(s + 1), theo (i) ta có:

$$\sum{}'\frac{1}{k^{2s+2}} \equiv 0 \pmod{p^r}$$

Suy ra $\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}} \equiv -\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}} \pmod{p^{2r}}$. Vậy $\sum{}'\frac{1}{k^{2s+1}} \equiv 0 \pmod{p^{2r}}$. □

(iii) Ta có khai triển Maclaurin

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots$$

Suy ra $\dfrac{1}{1-\dfrac{p^r}{k}} = 1 + \dfrac{p^r}{k} + \dfrac{p^{2r}}{k^2} + \dfrac{p^{3r}}{k^3} + \dfrac{p^{4r}}{k^4} + \dots$

Từ đó ta có :

$$\sum{}'\frac{1}{k} = \sum{}'\frac{1}{p^r - k} = -\sum{}'\frac{1}{k}\frac{1}{1-\dfrac{p^r}{k}}$$

$$\equiv -\sum{}'\frac{1}{k} - p^r\sum{}'\frac{1}{k^2} - p^{2r}\sum{}'\frac{1}{k^3} - p^{3r}\sum{}'\frac{1}{k^4} \quad (\text{mod } p^{4r})$$

Thay s = 2 vào (i), ta được $\sum{}'\dfrac{1}{k^4} \equiv 0 \pmod{p^r}$.

Tương tự thay s = 1 vào (ii), ta được $\sum{}'\dfrac{1}{k^3} \equiv 0 \pmod{p^{2r}}$.

Suy ra $\sum{}'\dfrac{1}{k} \equiv -\sum{}'\dfrac{1}{k} - p^r\sum{}'\dfrac{1}{k^2} \pmod{p^{4r}}$.

Vậy $2\sum{}'\dfrac{1}{k} \equiv -p^r\sum{}'\dfrac{1}{k^2} \pmod{p^{4r}}$.

Do $(2, p^{4r}) = 1$, suy ra $\sum{}'\dfrac{1}{k} \equiv -\dfrac{p^r}{2}\sum{}'\dfrac{1}{k^2} \pmod{p^{4r}}$ □

(iv) Ta có:

$$\left(\sum{}'\frac{1}{k}\right)^2 = \sum{}'\frac{1}{k^2} + 2\sum_{k<m}{}'\frac{1}{km}$$

Thay s = 0 vào (ii), ta được $\sum{}'\dfrac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^{2r}}$.

Suy ra $\left(\sum{}'\dfrac{1}{k}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p^{4r}}$

Do đó

$$2\sum_{k<m}{}'\frac{1}{km} \equiv -\sum{}'\frac{1}{k^2} \pmod{p^{4r}}$$

Do $(2, p^{4r}) = 1$, suy ra $\sum_{k<m}{}'\dfrac{1}{km} \equiv -\dfrac{1}{2}\sum{}'\dfrac{1}{k^2} \pmod{p^{4r}}$ □

3. Kết quả chính

Định lí 3.1.

Nếu p là một số nguyên tố lớn hơn 5, $x \in Z_p$, $r \geq 1$ thì

$$\Gamma_p(p^r x) \equiv \Gamma_p(p^r)^x \left[1 + \frac{x(x^2-1)}{3} p^r \sum{}' \frac{1}{k}\right] \ (mod\ p^{5r})$$

Chứng minh:

Trước tiên ta chứng minh

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r(n+1)\right)}{\Gamma_p(p^r)\Gamma_p(p^r n)} \equiv 1 + n(n+1)p^r \sum{}' \frac{1}{k} \ \ (\mathrm{mod}\ p^{5r})$$

Ta có:

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r(n+1)\right)}{\Gamma_p(p^r)\Gamma_p(p^r n)} \equiv \prod{}' \frac{p^r + k}{k} = \prod{}'(1 + \frac{p^r n}{k})$$

$$\equiv 1 + np^r \sum{}' \frac{1}{k} + n^2 p^{2r} \sum_{k<m}{}' \frac{1}{km} + n^3 p^{3r} t_3 + n^4 p^{4r} t_4 \ \ (\mathrm{mod}\ p^{5r})$$

Trong đó $\prod{}'$ kí hiệu thay cho $\prod_{k=1,(k,p)=1}^{p^r}$, $t_3 = \sum_{k<l<m}{}' \frac{1}{klm}$, $t_4 = \sum_{k<l<m<h}{}' \frac{1}{klmh}$.

Từ (i) và (ii) của định lí 2.1, ta có $\sum{}' \frac{1}{k^2} \sum{}' \frac{1}{k} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\ p^{3r})$.

Mặt khác ta có :

$$\sum{}' \frac{1}{k^2} \sum{}' \frac{1}{k} = \sum{}' \frac{1}{k^3} + \sum_{k \neq m}{}' \frac{1}{k^2 m} \ \text{ và } \sum{}' \frac{1}{k^3} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{2r}).$$

Do đó $\sum_{k \neq m}{}' \frac{1}{k^2 m} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\ p^{2r})$.

Suy ra

$$3t_3 = 3 \sum_{k<l<m}{}' \frac{1}{klm} = \sum_{k<m}{}' \frac{1}{km} \sum{}' \frac{1}{k} - \sum_{k \neq m}{}' \frac{1}{k^2 m} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\ p^{2r})$$

Hay $t_3 \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\ p^{2r})$.

Từ định lí 2.1 ta có:

$$\sum{}' \frac{1}{k^3} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{2r}) \text{ và } \sum{}' \frac{1}{k^4} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^r)$$

Mặt khác ta có:

$$\sum{}'\frac{1}{k^3}\sum{}'\frac{1}{k}=\sum{}'\frac{1}{k^4}+\sum_{k\neq m}{}'\frac{1}{k^3m}.$$

Suy ra $\sum\limits_{k\neq m}{}'\frac{1}{k^3m}\equiv 0 \pmod{p^r}$.

Ta lại có:

$$\sum_{k<m}{}'\frac{1}{km}\sum{}'\frac{1}{k^2}=\sum_{k\neq m}{}'\frac{1}{k^3m}+\sum{}'\frac{1}{k^2lm}.$$

Suy ra $\sum{}'\frac{1}{k^2lm}\equiv 0 \pmod{p^r}$.

Ta có:

$$4t_4=\sum{}'\frac{1}{k}\sum_{k<l<m}{}'\frac{1}{klm}-\sum{}'\frac{1}{k^2lm}.$$

Hay $t_4\equiv 0 \pmod{p^r}$.

Từ (iii) và (iv) của định lí 2.1, ta có:

$$p^r\sum_{k<m}{}'\frac{1}{km}\equiv -\frac{p^r}{2}\sum{}'\frac{1}{k^2}\equiv\sum{}'\frac{1}{k} \pmod{p^{4r}}.$$

Suy ra

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r(n+1)\right)}{\Gamma_p(p^r)\Gamma_p(p^rn)}\equiv 1+np^r\sum{}'\frac{1}{k}+n^2p^r\sum{}'\frac{1}{k}=1+n(n+1)p^r\sum{}'\frac{1}{k} \pmod{p^{5r}}.$$

Đặt

$$f(x)=\frac{\Gamma_p(p^rx)}{\Gamma_p(p^r)^x}.$$

Từ đó ta có:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\Gamma_p\left(p^r(n+1)\right)}{\Gamma_p(p^r)\Gamma_p(p^rn)}.$$

Theo chứng minh trên ta có:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}\equiv 1+n(n+1)p^r\sum{}'\frac{1}{k} \pmod{p^{5r}}.$$

Từ đó ta suy ra được

$$f(n)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{f(k+1)}{f(k)}\equiv\prod_{i=1}^{n-1}\left[1+i(i+1)p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right]$$

$$\equiv 1+p^r\sum{}'\frac{1}{k}.\sum_{i=1}^{n-1}i(i+1)=1+\frac{n(n^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\pmod{p^{5r}}.$$

Vậy $\Gamma_p(p^r n)\equiv\Gamma_p(p^r)^n\left[1+\frac{n(n^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right]\pmod{p^{5r}}.$

Như vậy ta đã chứng minh định lí đúng với mọi số tự nhiên n.

Do N trù mật trong Z_p nên mọi $x\in Z_p$, tồn tại $\{x_n\}\subset N: x_n\to x$. Vì hàm gamma p-adic Γ_p liên tục trên Z_p nên

$$\left[\Gamma_p(p^r x_n)-\Gamma_p(p^r)^{x_n}\left(1+\frac{x_n(x_n^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$\to\left[\Gamma_p(p^r x)-\Gamma_p(p^r)^{x}\left(1+\frac{x(x^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right)\right]\quad \text{khi } n\to\infty.$$

Do đó tồn tại n_0, sao cho:

$$\forall n>n_0\Rightarrow\left|\Gamma_p(p^r x)-\Gamma_p(p^r)^{x}\left[1+\frac{x(x^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right]\right|_p$$

$$=\left|\Gamma_p(p^r x_n)-\Gamma_p(p^r)^{x_n}\left[1+\frac{x_n(x_n^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right]\right|_p\le p^{-5r}.$$

Suy ra

$$\Gamma_p(p^r x)-\Gamma_p(p^r)^{x}\left[1+\frac{x(x^2-1)}{3}p^r\sum{}'\frac{1}{k}\right]\equiv 0\pmod{p^{5r}}.$$

Định lí được chứng minh. □

Nhận xét: Theo (ii) của định lí 2.1, ta có:

$$\sum{}'\frac{1}{k}\equiv 0\pmod{p^{2r}}.$$

Suy ra

$$c=\frac{1}{p^{2r}}\sum{}'\frac{1}{k}\in Z_p.$$

Khi đó định lí 3.1 được viết lại như sau:

$$\Gamma_p(p^r x) \equiv \Gamma_p(p^r)^x \left[1 + \frac{x(x^2-1)}{3} p^{3r} c\right] \pmod{p^{5r}}.$$

Hệ quả 3.2.

Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 5 và $x, y \in Z_p$, $r \geq 1$ thì

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r(x+y)\right)}{\Gamma_p(p^r x)\Gamma_p(p^r y)} \equiv 1 + xy(x+y)p^{3r}c \quad (mod\ p^{5r})$$

Chứng minh:

Theo định lí 3.1, ta có:

$$\Gamma_p(p^r x)\Gamma_p(p^r y)\left[1 + xy(x+y)p^{3r}c\right]$$

$$\equiv \Gamma_p(p^r)^x \left[1 + \frac{x(x^2-1)}{3} p^{3r} c\right].\Gamma_p(p^r)^y \left[1 + \frac{y(y^2-1)}{3} p^{3r} c\right].\left[1 + xy(x+y)p^{3r}c\right]$$

$$\equiv \Gamma_p(p^r)^x.\Gamma_p(p^r)^y \left[1 + \frac{x(x^2-1) + y(y^2-1)}{3} p^{3r} c\right].\left[1 + xy(x+y)p^{3r}c\right]$$

$$\equiv \Gamma_p(p^r)^{x+y} \left[1 + \frac{x(x^2-1) + y(y^2-1) + xy(x+y)}{3} p^{3r} c\right]$$

$$\equiv \Gamma_p(p^r)^{x+y} \left[1 + \frac{(x+y)\left((x+y)^2-1\right)}{3} p^{3r} c\right]$$

$$\equiv \Gamma_p\left(p^r(x+y)\right) \pmod{p^{5r}}.$$

Chứng minh trên đã sử dụng đẳng thức

$$x(x^2-1) + y(y^2-1) + xy(x+y) = (x+y)\left((x+y)^2-1\right)$$ □

Ta có thể tổng quát hệ quả 3.2 như sau

Hệ quả 3.3.

Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 5 và $x_i \in Z_p; i = \overline{1,n}$; $n \geq 2; r \geq 1$ thì

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma_p(p^r x_i)} \equiv 1 + \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right) - \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k\right)\right] c p^{3r} \quad (mod\ p^{5r}).$$

Khi n = 3, ta có:

$$\frac{\Gamma_p\left(p^r(x+y+z)\right)}{\Gamma_p(p^r x)\Gamma_p(p^r y)\Gamma_p(p^r z)} \equiv 1+\left[(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz\right] \pmod{p^{5r}}.$$

4. Một số đồng dư thức liên quan hệ số nhị thức Newton

Sử dụng hệ quả 3.2, ta chứng minh được định lí sau đây.

Định lí 4.1.

Nếu p là một số nguyên tố lớn hơn 5, $n,m,n',m' \in N$ *và* $n>m,\ n'>m'$ *thì*

$$n'm'(n'-m')\binom{n'}{m'}\binom{np}{mp}-n'm'(n'-m')\binom{n'}{m'}\binom{n}{m}$$
$$\equiv nm(n-m)\binom{n}{m}\binom{n'p}{m'p}-nm(n-m)\binom{n}{m}\binom{n'}{m'} \pmod{p^5}.$$

Từ định lí 4.1, chọn n,m,n',m' thích hợp, chúng ta được một số đồng dư thức sau:

$$9\binom{2p}{p}\equiv 12+2\binom{3p}{p} \pmod{p^5}.$$

$$24\binom{2p}{p}\equiv 42+\binom{4p}{2p} \pmod{p^5}.$$

$$8\binom{3p}{p}\equiv 12+3\binom{4p}{p} \pmod{p^5}.$$

$$12\binom{2p}{p}\equiv 18+\binom{2p}{p}\binom{3p}{p} \pmod{p^5}.$$

5. Một vài kết quả mở rộng

Định lí 5.1.

Nếu $n,m,n',m' \in N$ *, p là số nguyên tố lớn hơn 5,* $r\geq 1,\ n>m,\ n'>m'$ *thì*

$$n'm'(n'-m')\binom{n'}{m'}\binom{np^r}{mp^r}-n'm'(n'-m')\binom{n'}{m'}\binom{n}{m}$$
$$\equiv nm(n-m)\binom{n}{m}\binom{n'p^r}{m'p^r}-nm(n-m)\binom{n}{m}\binom{n'}{m'} \pmod{p^{5r}}.$$

Từ định lí 5.1, chọn n,m,n',m' thích hợp, chúng ta được một số đồng dư thức sau

$$9\binom{2p^2}{p^2} \equiv 12 + 2\binom{3p^2}{p^2} \pmod{p^{10}}.$$

$$24\binom{2p^2}{p^2} \equiv 42 + \binom{4p^2}{2p^2} \pmod{p^{10}}.$$

$$8\binom{3p^2}{p^2} \equiv 12 + 3\binom{4p^2}{p^2} \pmod{p^{10}}.$$

Theo D.F Bailey, chúng ta có định lí sau:

Định lí 5.2.[4]

Nếu $N, M, n, m \in N$, p là số nguyên tố lớn hơn 3, giả sử n, m < p thì

$$\binom{Np^3 + n}{Mp^3 + m} \equiv \binom{N}{M}\binom{n}{m} \pmod{p^3}.$$

Trong bài báo này, chúng ta có kết qủa mở rộng sau

Định lí 5.3.

Nếu $N, M, n, m \in N$, p là số nguyên tố lớn hơn 5, $r \geq 1$, giả sử $n \leq m < p$ thì

$$\binom{Np^r + n}{Mp^r + m} \equiv \binom{N}{M}\binom{n}{m}\left[1 + c'p^r\right] \pmod{p^{2r}}.$$

Trong đó $c' = H(n)N - H(m)M - H(n-m)(N-M)$ *với* $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $H(0) = 0$

Từ định lí 5.3., chọn N, M, n, m, r thích hợp và với p là số nguyên tố lớn hơn 5, chúng ta có một số đồng dư thức sau:

$$\binom{2p^3 + 3}{p^3 + 2} \equiv 6 + 7p^3 \pmod{p^6}.$$

$$\binom{6p^3 + 3}{3p^3 + 1} \equiv 30(2 + 7p^3) \pmod{p^6}.$$

$$30\binom{2p^3 + 3}{p^3 + 2} \equiv 120 + \binom{6p^3 + 3}{3p^3 + 1} \pmod{p^6}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bailey, D.F. (1990), "Two p^3 variations of Lucas's theorem", *J. Number Theory 35*, pp. 208- 215.
2. Dupare, H. and Peremans, W. (1955), "On theorem of Wolstenholme and Leudesdodrf", *Pro Ned. Akad. Wet*., 58, pp. 459 – 465.
3. Hardy, G. and Wright, E. (1954), *An introduction to the theory of numbers* (Third Edition), Oxford, Clarendon Press.
4. Koblitz N. (1977), *P-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zenta – Function*, Springer Veriag.
5. Schikhof W. H. (1984), *Ultrametric calculus, An introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press.
6. Wolstenholme, J.(1862), "On certain properties of prime numbers", *Quart. J. Math*., Oxford Series 5, pp. 35- 39.
7. Zhao, J. (2006), "Bernoulli Numbers, Wolstenholme's theorem, and p^5 variations of Lucas's theorem", *arxiv:math/0303332v3[math.N1].*

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 13-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 24-4-2012)