DỰ ĐOÁN VÀ GIẢI THÍCH NGUYÊN NHÂN SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI HỌC CHỦ ĐỀ PHÂN SỐ DƯỚI NGÔN NGỮ CỦA DIDACTIC TOÁN

DƯƠNG HỮU TÒNG*

TÓM TẮT

Sửa chữa sai lầm có một ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển tư duy HS, củng cố kiến thức, kĩ năng của các em. Qua sửa chữa sai lầm, nhận thức đúng của HS sẽ củng cố chắc chắn hơn. Hiểu rõ những sai lầm mắc phải, HS có ý thức hơn trong khi làm bài tập, đề phòng những sai lầm khác trong học tập. Sai lầm của HS biểu hiện muôn hình muôn vẻ và do nhiều nguyên nhân khác nhau. Tuy nhiên, chúng tôi chỉ mong muốn dự đoán và giải thích sai lầm của học sinh dưới ngôn ngữ của didactic Toán thông qua dạy học chủ đề phân số.

Từ khóa: sai lầm, nguyên nhân, phân số.

ABSTRACT

Predicting and explaining the causes of students' mistakes in learning fraction using didactic mathematics

Correcting mistakes has a very important effect in developing students' thinking, enhancing their knowledge and skills. Through correcting mistakes, students' perception will be more reinforced. Understanding these mistakes clearly, students are more cautious when doing exercises, avoiding other mistakes in learning. Students' mistakes are varied and due to various causes. However, we only want to predict and explain students' mistakes in learning fraction using didactic mathematics.

Keywords: error, cause, fraction.

1. Đặt vấn đề

Từ việc nghiên cứu chương trình và thực tế giảng dạy, chúng tôi đã mô hình hóa các nguyên nhân sai lầm của HS khi học chủ đề phân số. Sai lầm của HS liên quan đến các dạng bài tập phân số khá phức tạp. Điều này cũng đồng nghĩa với nguồn gốc nguyên nhân sai lầm cũng rất phong phú. Do đó, vấn đề giải thích chúng cũng không đơn giản. Vì vậy, qua bài báo này chúng tôi chỉ mong muốn một phần nào đó làm rõ nguyên nhân các sai lầm của HS dưới gốc độ của didactic Toán.

2. Sai lầm trong nghiên cứu didactic Toán

2.1. Các quan niệm về sai lầm trong các lí thuyết học tập

Học thuyết về hành vi coi sai lầm là sự phản ánh của sự thiếu hiểu biết hay sự vô ý, bất cẩn mà thôi.

Trong khi đó, học thuyết kiến tạo lại xem sai lầm và phát hiện ra sai lầm là một yếu tố quan trọng trong việc xây dựng hoạt động nhận thức của HS với lí

* NCS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

do như sau: khi tạo ra sự mất cân bằng trong hệ tư duy của chủ thể, việc nhận ra sai lầm tạo điều kiện thuận lợi để vượt qua nó và làm nảy sinh một thế cân bằng gia tăng mới.

Người ta cho rằng sai lầm không phải là một sự kiện thứ yếu xảy ra trong một quá trình. Nó không nằm ngoài kiến thức mà chính là *biểu hiện của kiến thức*.

Brousseau cũng nhấn mạnh đến tầm quan trọng của việc nghiên cứu sai lầm trong dạy học thông qua hai đoạn trích dưới đây:

"Sai lầm không chỉ đơn giản do thiếu hiểu biết, mơ hồ hay ngẫu nhiên sinh ra (...), mà còn là hậu quả một kiến thức trước đây đã từng tỏ ra có ích, đem lại thành công, nhưng bây giờ lại tỏ ra sai lầm hoặc đơn giản là không còn thích hợp nữa. Những sai lầm thuộc loại này không phải thất thường hay không dự đoán được. Chúng tạo thành chướng ngại. Trong hoạt động của GV cũng như trong hoạt động của HS, sai lầm bao giờ cũng góp phần xây dựng nên nghĩa của kiến thức thu nhận được." [1, tr.57].

2.2. Mối quan hệ của sai lầm và các khái niệm khác trong lí thuyết didactic Toán

2.2.1. Sai lầm và quy tắc hành động

Một *quy tắc hành động* là một mô hình được xây dựng nhằm giải thích và chỉ rõ những kiến thức mà HS đã sử dụng để đưa ra câu trả lời khi thực hiện một nhiệm vụ xác định. Quy tắc hành động này liên quan đến một hay nhiều tính chất *toán học gắn bó rất chặt chẽ* với các quy trình hay câu trả lời của HS.

Ví dụ: Về vấn đề sắp thứ tự các số thập phân, ta đã thấy là sự gắn kết giữa những câu trả lời sai của HS cho phép ta nghĩ rằng những sai lầm đó phù hợp với việc áp dụng một quy tắc hành động được cấu thành từ hai quy tắc con sau đây:

- Một algorit so sánh các số nguyên.
- Sự phân biệt giữa các chữ số trước và sau dấu phẩy.

Các quy tắc hành động này - được chỉ rõ ra qua việc nghiên cứu những câu trả lời sai của HS, vẫn có thể mang lại câu trả lời đúng trong một số tình huống. Những tình huống đó xác định phạm vi hợp thức của quy tắc hành động.

Tổng quát hơn, quy tắc hành động là *những kiến thức* của HS. Những kiến thức này có *phạm vi hợp thức của nó. Một câu trả lời sai thường đến từ việc áp dụng một quy tắc hành động ở ngoài phạm vi hợp thức của nó.*

2.2.2. Sai lầm và định lí hành động

Trong lí thuyết trường quan niệm, các dạng thức sẽ cho phép mô hình hóa hoạt động của HS, chỉ rõ đặc trưng của "tổ chức bất biến về cách ứng xử của HS trong một lớp tình huống".

Các tác giả của "Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán", [1, tr.85], cho rằng chính Gérard Vergnaud đã đề nghị phân tích các dạng thức theo bốn thành phần:

- Những mục đích và mục đích thành phần mà HS lao vào, những dự đoán đánh dấu từng quãng hoạt động của HS.
- Những quy tắc hành động, chiếm lĩnh thông tin và kiểm tra – là những cái lần lượt sinh ra hoạt động này.

- Những bất biến thao tác cho phép chiếm lĩnh thông tin đích thực và xử lí thông tin đó: đó là "các tính chất của những mối quan hệ mà HS nắm hoặc sử dụng trong tình huống giải quyết vấn đề. Thế nhưng điều đó không có nghĩa là HS có khả năng nói rõ hay giải thích rõ những tính chất ấy". Đó chính là những bất biến mà Gérard Vergnaud gọi là *định lí hành động*, $\left[1,\text{tr}.85\right]$.

- Những khả năng suy diễn, thường rất nhiều trong mọi hoạt động, mà ta có thể hình thức hóa đồng thời bởi một mặt là các định lí hành động thuộc lĩnh vực toán học liên quan và một mặt là các nguyên lí tổng quát hơn về logic vị từ (ít phụ thuộc vào lĩnh vực).

2.2.3. Sai lầm và thuật ngữ "quan niệm"

Ta gọi *quan niệm* là một mô hình được nhà nghiên cứu xây dựng để phân tích ứng xử nhận thức của HS trước một kiểu vấn đề liên quan đến một khái niệm toán học.

Trong quyển "Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán", $\left[1,\text{tr}.91\right]$, G. Bousseau được nhắc đến như là người đưa ra định nghĩa quan niệm: "một tập hợp những quy tắc, cách thực hành, tri thức cho phép giải quyết một cách tương đối tốt một lớp tình huống và vấn đề, trong khi đó lại tồn tại một lớp tình huống khác mà trong đó quan niệm này dẫn đến thất bại, hoặc nó gợi lên những câu trả lời sai, hoặc kết quả thu được một cách khó khăn và trong điều kiện bất lợi".

Ví dụ: Một số công trình nghiên cứu kiến thức về số thực của HS trung học đã chỉ ra sự tồn tại dai dẳng của quan niệm coi *số thập phân như một cặp số nguyên*. Quan niệm này cho phép giải thích nhiều sai lầm trong các phép tính trên các số thập phân, chẳng hạn :

$1{,}2 + 5{,}9 = 6{,}11$; $(0{,}3)^2 = 0{,}9$; $5{,}3^2 = 25{,}9$; $12{,}8 < 12{,}14$ vì $14 > 8$

Quan niệm này cũng cho phép giải thích nguồn gốc của một số khó khăn trong việc học tập khái niệm căn bậc hai và sau này trong việc hiểu các số thực.

Như vậy, lợi ích của việc mô hình hóa bằng thuật ngữ quan niệm cho phép giải thích một sai lầm ổn định của HS.

3. Giải thích sai lầm của học sinh khi học chủ đề phân số dưới ngôn ngữ của didactic Toán

3.1. Kiểu nhiệm vụ T_1: "Tìm phân số bằng phân số đã cho"

SGK đề cập nhiều bài tập có liên quan $\mathbf{T_1}$. Chẳng hạn, câu b bài tập 1 như sau:

$$\text{b)}\ \frac{2}{3} = \frac{\square}{6}\ ;\ \frac{18}{60} = \frac{3}{\square}\ ;\ \frac{56}{32} = \frac{\square}{4}\ ;$$

* *Kĩ thuật* τ_1*:*

+ Nếu phân số mới cho biết mẫu số, tìm số để mẫu số của phân số thứ nhất nhân (hoặc chia) với số đó bằng với mẫu số của phân số thứ hai.

Sau đó, nhân (hoặc chia) tử số của phân số thứ nhất với số vừa tìm được để có được tử số của phân số thứ hai.

+ Ngược lại, nếu phân số mới cho biết tử số, tìm số để tử số của phân số thứ nhất nhân (hoặc chia) với số đó bằng với tử số của phân số thứ hai.

Sau đó, nhân (hoặc chia) mẫu số của phân số thứ nhất với số vừa tìm được để có được mẫu số của phân số thứ hai.

Ví dụ: $\frac{2}{3} = \frac{\square}{6}$. HS có thể đưa ra lời giải là 5. HS thường tìm một số sao cho số đó cộng với 3 sẽ bằng 6. ($3 + \square = 6$) và sau đó cộng tử số của phân số với số vừa tìm được để có được số cần tìm ($2+3=5$). Hay nói khác đi, để tìm một phân số mà bằng với phân số đã cho, các em thường suy luận "cộng" hơn là suy luận "nhân".

3.2. Kiểu nhiệm vụ T_2: "So sánh hai phân số"

Đặc trưng của kiểu nhiệm vụ: hai phân số có cùng mẫu số, hai phân số có cùng tử, hai phân số khác mẫu số.

Dựa trên đặc trưng trên, chúng tôi chia thành 3 kiểu nhiệm vụ như sau: So sánh hai phân số cùng mẫu số, so sánh hai phân số khác mẫu số, so sánh hai phân số cùng tử số.

Kiểu nhiệm vụ T_{2a}: "So sánh hai phân số cùng mẫu số"

Chúng tôi đưa ra một ví dụ trong SGK Toán 4 đại diện cho kiểu nhiệm vụ:

Ví dụ: So sánh hai phân số $\frac{2}{5}$ và $\frac{3}{5}$

* *Kĩ thuật* τ_{2a} được trình bày tường minh trong SGV như sau:

Muốn so sánh hai phân số có cùng mẫu số, ta chỉ cần so sánh hai tử số: phân số nào có tử số bé hơn thì bé hơn; phân số nào có tử số lớn hơn thì lớn hơn; nếu tử số bằng nhau thì hai phân số đó bằng nhau.

Kiểu nhiệm vụ T_{2b}: "So sánh hai phân số khác mẫu số"

* *Kĩ thuật* τ_{2b} được phát biểu trong SGK như sau:

Muốn so sánh hai phân số khác mẫu số, ta có thể quy đồng mẫu số hai phân số đó, rồi so sánh tử số của hai phân số mới.

Một đặc trưng khá lí thú cho kiểu nhiệm vụ này: trong hai phân số được cho, có một phân số lớn hơn 1 và phân số còn lại nhỏ hơn 1.

Ví dụ đại diện cho kiểu nhiệm vụ như thế được đưa ra trong phần luyện tập của SGK:

Bài tập 2. So sánh hai phân số bằng hai cách khác nhau:
a) $\frac{8}{7}$ và $\frac{7}{8}$; b) $\frac{9}{5}$ và $\frac{5}{8}$; c) $\frac{12}{16}$ và $\frac{28}{21}$

Một cách là so sánh theo kĩ thuật τ_{2b}, vậy cách còn lại tác giả mong muốn ở HS là gì? Để tìm câu trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi trích dẫn đoạn trích sau trong SGV:

Cách 2:

- *Ta có:* $\frac{8}{7} > 1$ *(vì tử số lớn hơn mẫu số)* ; $\frac{7}{8} < 1$ hay $1 > \frac{7}{8}$ *(vì tử số bé hơn mẫu số).*
- *Từ* $\frac{8}{7} > 1$ *và* $1 > \frac{7}{8}$ *ta có:* $\frac{8}{7} > \frac{7}{8}$.

Qua đoạn trích trên, chúng tôi đề xuất một kĩ thuật $\tau_{2b'}$ khi so sánh hai phân số mà có một phân số lớn hơn 1 và phân số còn lại nhỏ hơn 1.

* *Kĩ thuật* $\tau_{2b'}$ *:*

Đem so sánh hai phân số đó với 1. Phân số nào lớn hơn 1 thì phân số đó lớn hơn phân số còn lại.

Ví dụ: So sánh $\frac{12}{16}$ và $\frac{14}{29}$. Lời giải của HS có thể như sau: 12 < 14 ; 16 < 29 nên $\frac{12}{16} < \frac{14}{29}$. Đây là sai lầm rất phổ biến của các em. Lí do có thể giải thích là các đã quen với mô hình so sánh hai số tự nhiên, nên các em đã áp dụng mô hình đó vào bài toán trên dẫn đến lời giải không chính xác.

Kiểu nhiệm vụ T_{2c}: "So sánh hai phân số cùng tử số"

Nói chung, kiểu nhiệm vụ này không được trình bày trong phần hình thành kiến thức mới như hai kiểu nhiệm vụ trên. Nó chỉ được nhắc đến thông qua bài tập 3 SGK:

> ***Bài tập 3.*** So sánh hai phân số có cùng tử số:
>
> b) So sánh hai phân số:
>
> $\frac{9}{11}$ và $\frac{9}{14}$; $\frac{8}{9}$ và $\frac{8}{11}$.

** Kĩ thuật τ_{2c}:*

+ So sánh hai mẫu số của hai phân số,

+ Phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn.

Nhiều em sẽ cho rằng mẫu số của phân số lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. Vì các em thấy tử số của chúng bằng nhau rồi nên chỉ cần so sánh mẫu số như so sánh hai số tự nhiên.

3.3. Kiểu nhiệm vụ T_3: "Sắp xếp dãy các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn"

Sau đây là một minh họa cho kiểu nhiệm vụ này. Nó được trình trong SGK:

> ***Bài tập 4.*** Viết các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn:
>
> a) $\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3};\frac{5}{6};\frac{3}{4}$

** Kĩ thuật τ_3:*

+ Kiểm tra xem, các phân số được cho có cùng mẫu số hay không?

+ Nếu các phân số cùng mẫu số thì sắp xếp các phân số được quy về như là sắp xếp các tử số.

+ Nếu các phân số không cùng mẫu số thì phải quy đồng mẫu số. Sau đó, tiếp tục thực hiện như bước 2.

Nói chung, hai kiểu nhiệm vụ $\mathbf{T_2}$ và $\mathbf{T_3}$ có thể được gọi tắt là sắp thứ tự độ lớn của các phân số. Một quan niệm sai lầm của nhiều HS là các phân số có tử số và mẫu số nhỏ hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

Đôi khi, việc so sánh các phân số mà chỉ xem xét đến việc so sánh mẫu số của các phân số. Điều này có thể được giải thích là do HS xem tử số và mẫu số của một phân số như hai số tự nhiên không liên hệ gì nhau.

Ví dụ: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ bé đến lớn: $\frac{2}{5};\frac{2}{3};\frac{2}{9}$.

Câu trả lời có thể có của HS là: $\frac{2}{3};\frac{2}{5};\frac{2}{9}$. Chúng tôi dự đoán sẽ có nhiều HS mắc phải sai lầm như thế. Lí do có thể có khiến HS làm như vậy bởi vì các em có khuynh hướng cho rằng phân số lớn hơn phân số kia nếu có mẫu số lớn hơn. Hay nói khác đi, tồn tại ở HS một định lí hành động chưa chính xác: Nếu $b < c$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$.

Ngoài ra, chúng tôi cũng dự đoán một khó khăn sai lầm khác của các em khi tiếp cận bài tập so sánh các phân số. Chẳng hạn, hãy cho 5 số x sao cho: $\frac{2}{5} < x < \frac{4}{5}$. Lí do, các em đã quen với việc so sánh các số tự nhiên và mỗi số tự nhiên đều có một số tự nhiên liền sau nên các em đã áp dụng "quan niệm" này vào bài tập trên. Do đó, câu trả lời của các em là chỉ tìm được 1 giá trị $x = \frac{3}{5}$ thỏa yêu cầu đề bài.

3.4. Kiểu nhiệm vụ T_4: "Cộng hai phân số"

Bài tập 1. SGK: Tính: a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ b) $\frac{9}{4} + \frac{3}{5}$

** Kĩ thuật τ_4:*

+ Kiểm tra xem, các phân số được cho có cùng mẫu số hay không;

+ Nếu các phân số cùng mẫu số thì ta cộng hai tử số với nhau và giữ nguyên mẫu số;

+ Nếu các phân số không cùng mẫu số thì ta quy đồng mẫu số hai phân số, rồi cộng hai phân số đó.

Qua nghiên cứu kiểu nhiệm vụ này, chúng tôi dự đoán sẽ có nhiều HS sẽ tiến hành cộng các phân số bằng cách "trên cộng trên, dưới cộng dưới" hay theo ngôn ngữ toán học là "tử số cộng tử số, mẫu số cộng mẫu số".

Ví dụ: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$.

Chúng tôi cũng đề xuất những nguyên nhân có thể có của sai lầm này:

- HS không xem các phân số để biểu diễn số lượng nhưng quan niệm hai phân số bao gồm 4 số tự nhiên có thể được kết hợp lại theo cách này hoặc cách khác. Quan niệm tồn tại lâu dài ở HS: *mỗi phân số được xem là hai số tự nhiên ngăn cách bởi 1 đường gạch ngang (—)*. Do đó, có lẽ chấp nhận được nếu cộng các tử số với nhau để có tử số của tổng và cộng các mẫu số một cách tương tự.
- HS nhầm lẫn quy tắc cộng hai phân số với quy tắc nhân hai phân số. Trẻ xem việc ứng dụng mô hình nhân các số tự nhiên dẫn đến thành công trong trường hợp nhân hai phân số. Do đó, mô hình này có thể được áp dụng khi cộng hai phân số với nhau. Hay nói khác đi, các em đã cố gắng đồng hóa một thuật toán mới thành một thuật toán đã biết hay tương tự đã có trước đó. Một số HS tự thiết kế quy tắc chỉ thích hợp trong một số trường hợp, do đó quy tắc này không được tổng quát hóa. Các quy tắc này có nguồn gốc đúng đắn, nhưng HS không hiểu sao chúng không đúng cho mọi trường hợp.
- HS xem bốn số tự nhiên trong phép cộng hai phân số như hai cặp: tử số với tử số, mẫu số với mẫu số. Do đó, các em tin rằng cách thích hợp để thực hiện phép cộng là cộng các cặp lại với nhau, tức là: tử số cộng tử số, mẫu số cộng mẫu số. HS xem cách làm này tương tự với cách cộng các số tự nhiên.
- Có thể tồn tại ở trẻ một quy tắc hành động không đúng đắn:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

3.5. Kiểu nhiệm vụ T_5: "Trừ hai phân số"

Bài tập 1. SGK: Tính:
a) $\frac{15}{16}-\frac{7}{16}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$

** Kĩ thuật τ_5:*

+ Kiểm tra xem, các phân số được cho có cùng mẫu số hay không?

+ Nếu các phân số cùng mẫu số thì ta trừ các tử số với nhau và giữ nguyên mẫu số.

+ Nếu các phân số không cùng mẫu số thì ta quy đồng mẫu số hai phân số, rồi trừ hai phân số đó.

Tương tự như trường hợp cộng hai phân số, các em bị ảnh hưởng bởi các phép toán của số tự nhiên khi trừ hai phân số. Ngoài ra, trẻ cũng có khuynh hướng xử lí các tử số và mẫu số trong các phân số như các số tự nhiên phân biệt. Do đó, câu trả lời có thể của các em như sau: $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$. Nếu các em thao tác như ví dụ này thì các em đã thực hiện theo quy tắc không chính xác sau:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

GV đã giới thiệu cho các em quy tắc trừ hai phân số cùng mẫu số, HS dường như có khả năng thực hiện được các phép tính. Khi chuyển sang trừ hai phân số khác mẫu số, khó khăn bắt đầu xuất hiện ở HS.

Những lời giải có thể có cho ví dụ trên như sau: $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$; $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3}{53}$.

Có lẽ, HS sử dụng thuật toán trừ hai phân số cùng mẫu số cho trường hợp trên. Bên cạnh đó, các em cũng phải "bóp méo" một số yếu tố để cho nó phù hợp tình huống mới. Chẳng hạn, với các lời giải trên, HS lấy tử số trừ tử số nhưng phải giữ lại mẫu số của một trong hai phân số hoặc giữ lại cả hai.

3.6. Kiểu nhiệm vụ T_6: "Trừ một số tự nhiên cho một phân số" hoặc " Trừ một phân số cho một số tự nhiên"

Bài tập 3. SGK. Tính:
a) $2-\frac{3}{2}$ b) $5-\frac{14}{3}$ c) $\frac{37}{12}-3$

** Kĩ thuật τ_6:*

+ Đưa số tự nhiên về phân số có mẫu số bằng 1;

+ Sau đó, quy về trừ hai phân số không cùng mẫu số.

Một quan niệm có thể xảy ra ở HS khi các em được yêu cầu thực hiện kiểu nhiệm vụ $\mathbf{T_6}$: các em tin rằng không thể thực hiện được khi trừ một số tự nhiên cho một phân số. ***Ví dụ:*** $2-\frac{3}{2}$ là nhiệm vụ tương đối dễ đối với GV nhưng lại khó khăn đối với HS. Nhiều em có thể tỏ ra khó chịu khi thực hiện $\mathbf{T_6}$ bởi lẽ trước đó các em đã quen với: số tự nhiên trừ số tự nhiên, phân số trừ phân số. Trong tâm trí các em luôn tự hỏi: sao lại có trường hợp số tự nhiên trừ phân số hay phân số trừ số tự nhiên chứ? Hay nói khác đi, tồn tại một quan niệm ở các em là: "số gì thì trừ số ấy".

3.7. Kiểu nhiệm vụ T_7: "Nhân hai phân số"

Bài tập 1. SGK: Tính:

a) $\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$ b) $\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}$ d) $\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}$

* *Kĩ thuật* τ_7 được trình bày tường minh trong SGK ở trang 132: *Muốn nhân hai phân số, ta lấy tử số nhân với tử số, mẫu số nhân với mẫu số.*

Mô hình thao tác trên các số tự nhiên tuy không cho lời giải đúng khi cộng, trừ hai phân số nhưng lại đưa đến câu trả lời thích đáng trong trường hợp nhân hai phân số. Nói như vậy không đồng nghĩa với việc HS sẽ không gặp khó khăn sai lầm khi thực hiện nhân hai phân số.

Để dự đoán được điều này, chúng tôi đưa ra ví dụ và câu trả lời giả định như sau: $\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{8}\times\frac{6}{8}=\frac{42}{8}$. Do bị ảnh hưởng của các thao tác khi cộng hay trừ các phân số khác mẫu số, HS cố gắng biến đổi phân số thứ hai sao cho có cùng mẫu số với phân số thứ nhất trước khi thực hiện phép nhân.

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm như trên là do các em đã vận dụng một kĩ thuật của một kiểu nhiệm vụ đã biết vào nhiệm vụ mới không phù hợp. Thêm vào đó, các em cũng cố gắng "chế biến" để cho phù hợp các điều kiện của mô hình trước đó.

Ngoài ra, chúng tôi cũng dự đoán sẽ tồn tại ở các em một quan niệm không chính xác về phép nhân như sau: "Tích luôn luôn lớn hơn các thừa số". Quan niệm này có được là do các em quen với các phép nhân mà trong đó các thừa số là các số tự nhiên. Nhưng khi các em làm quen với phép nhân phân số thì quan niệm trên sẽ là một trở ngại. Chẳng hạn, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, ở đây tích $\frac{1}{8}$ hoàn toàn nhỏ hơn cả hai thừa số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$.

3.8. *Kiểu nhiệm vụ T_8: "Tìm phân số của một số"*

Bài toán. Một rổ cam có 12 quả. Hỏi $\frac{2}{3}$ số cam trong rổ là bao nhiêu quả cam?

* *Kĩ thuật* τ_8 được phát biểu tường minh trong SGK: *Muốn tìm $\frac{2}{3}$ của số 12 ta lấy số 12 nhân với $\frac{2}{3}$.*

Chúng tôi thấy được một quy định ngầm ẩn của SGK có liên quan của kiểu nhiệm vụ này là các "số" mà cần tìm phân số của nó đều là các số tự nhiên. Chúng tôi không tìm thấy bất kì một bài tập nào mà "số" này là phân số. Chính vì lẽ đó, chúng tôi dự đoán HS sẽ gặp phải khó khăn khi các em tiếp cận với tình huống mà "số" là phân số.

Chẳng hạn, tình huống dạy học như sau:

Em có một nửa của cái bánh. Em cho bạn $\frac{1}{4}$ số bánh mà em có. Hỏi em đã cho bạn bao nhiêu phần của cái bánh?

3.9. *Kiểu nhiệm vụ T_9: "Chia hai phân số"*

Bài tập 2. SGK: Tính: a) $\frac{3}{7}:\frac{5}{8}$ b) $\frac{8}{7}:\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$

* *Kĩ thuật* τ_9 được trình bày một cách rõ ràng trong SGK ở trang 135: *Để thực hiện phép chia hai phân số: Lấy phân số thứ nhất nhân với phân số thứ hai đảo ngược.*

Có thể nói, trong các phép tính đối với phân số, phép chia hai phân số là phức tạp và khó nhận thức được đối với nhiều HS. Bởi lẽ, các em thường được dạy sao cho cố gắng học thuộc quy tắc "đảo ngược và nhân" – một điều mà các em bắt buộc nhớ, mau quên và không rõ được nguyên nhân của quy trình do đâu mà có.

Từ những nhận xét trên, chúng tôi xin trình bày một khó khăn sai lầm mà HS có thể mắc phải như sau:

Ví dụ: Tính $\frac{2}{9}:\frac{1}{3}$. Lời giải có thể của các em: $\frac{2}{9}:\frac{1}{3}=\frac{2:1}{9:3}=\frac{2}{3}$.

Những nguyên nhân có thể dẫn các em đến khó khăn sai lầm như trên:

- Do các em quen quan niệm mỗi phân số gồm tử số và mẫu số. Nên khi thực hiện phép chia thì các em tiến hành "tử số chia tử số, mẫu số chia mẫu số".
- Thêm vào đó, các em đã quen với quy trình nhân hai phân số với nhau. Vì thế, các em đã vận dụng "quy trình" đó vào chia hai phân số. Có thể biết được, mô hình này chỉ phù hợp cho phép nhân mà không đúng đắn cho phép cộng, phép trừ, phép chia phân số.
- Các em đã hành động theo quy tắc sai lầm: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}$.

Một sai lầm khác có thể có trong lời giải của HS tiểu học. Nhiều HS nghĩ rằng phép chia có tính chất giao hoán nên trả lời $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=2$ bởi vì

$$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=2.$$

Hay, có một lời giải thích khác cho câu trả lời $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=2$ do các em có những nhận thức trực giác về phép toán trên, tức "Trong phép chia, số bị chia luôn lớn hơn số chia" với lời giải thích: $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{4}{1}\times\frac{1}{2}=2$. Nói cách khác, khi bài toán có những số liệu không phù hợp mô hình đã biết hay kiến thức cũ, HS sẽ xử lí bằng cách lựa chọn các phép tính mà các em thường dùng.

Bên cạnh đó, có thể tồn tại ở trẻ quan niệm "Chia một số nhỏ hơn cho một số lớn hơn là không thể thực hiện được". Quan niệm này chỉ phù hợp cho các phép chia các số tự nhiên. Lí do giải thích cho quan niệm này là các em đã làm việc quá nhiều với các phép chia có số bị chia lớn hơn số chia ở các khối lớp 1, 2, 3. Vì lẽ đó, quan niệm này vẫn "đồng hành" cùng với HS khi các em tiếp cận với phép chia phân số.

Một quan niệm khác cũng tồn tại với quan niệm trên là "Thương của phép chia luôn luôn nhỏ hơn số bị chia". Do đó, nếu các em được yêu cầu "Hãy so sánh thương và số bị chia". Câu trả lời của đa số các em sẽ là "thương lớn hơn số bị chia". Câu trả lời này chỉ đúng khi các em làm việc với các số tự nhiên. Nhưng nó sẽ là một "vấn đề" đối với trẻ khi các em thực hiện phép chia phân số.

4. Kết luận

Trong dạy học toán, sai lầm và nguyên nhân của chúng do HS mắc phải rất phong phú. Biết được những nguyên nhân sai lầm của HS giống như "biết bệnh, bốc đúng thuốc". Đây là hoạt động rất cần thiết cho các nhà lí luận dạy học lẫn GV. Thật vậy, trước tiên biết rõ các nguyên nhân trên nhà lí luận sẽ đề xuất các biện pháp hay phương pháp dạy học hiệu quả tạo điều kiện thuận lợi cho GV giúp HS sửa chữa triệt để sai lầm. Thêm vào đó, làm rõ các nguồn gốc sai lầm của HS dưới gốc độ của didactic toán sẽ mang lại cho GV một cơ hội mới để hiểu thấu đáo hơn các sai lầm mà HS vướng phải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2009), *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*, Nxb Đại học Quốc Gia TP Hồ Chí Minh, TP Hồ Chí Minh.
2. Chương trình tiểu học (Bộ giáo dục và đào tào) (2001, 2006), Nxb Giáo dục, Hà Nội.
3. Đỗ Trung Hiệu, Đỗ Đình Hoan, Vũ Dương Thụy, Vũ Quốc Chung (2004), *Giáo trình Phương pháp dạy học môn Toán ở Tiểu học*, Nxb ĐHSP, Hà Nội.
4. Đỗ Đình Hoan (2006), *Toán 4*, Nxb Giáo dục, (Sách giáo khoa hiện hành), Hà Nội.
5. Đỗ Đình Hoan (2006), *Toán 4*, Nxb Giáo dục, (Sách giáo viên hiện hành), Hà Nội.
6. Phạm Đình Thực (2003), *Phương pháp dạy học Toán bậc tiểu học*, Nxb ĐHSP, TPHCM

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 20-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2012)