BÓNG ĐẦY CỦA MỘT ĐOẠN TRONG POSET CÁC VECTO BOOLE

TRẦN HUYÊN*

TÓM TẮT

Poset B các vecto Boole bao gồm các vecto x= $x_1x_2\ldots x_n$, n Є N, x_i= 0,1 với thứ tự bộ phận là thứ tự tự nhiên và thứ tự tuyến tính là V-thứ tự. Bài báo này đề cập đến bóng đầy của các đoạn trong poset B và các kết quả đạt được liên quan tới các điều kiện cần và đủ để bóng đầy của các đoạn trong mức B(n,k) của poset B lại là một đoạn trong mức B(n-1,k).

Từ khóa: bóng đầy của một đoạn, poset, vecto Boole.

ABSTRACT

The full shadow of a segment in poset of Boolean vectors

We consider poset of Boolean vectors B= {x= $x_1x_2\ldots x_n$: n Є N, x_i= 0,1} whose component order is natural order and linear oder is V-order. This article mentions the notion of full shadow of a segment and also achieved results relating to the necessary and sufficient conditions for the full shadow of a segment in level B (n,k) to be a segment in level B(n-1,k).

Keywords: the full shadow of a segment, poset, Boolean vecto.

1. Đặt vấn đề

Poset B các vecto Boole bao gồm tất cả các vecto x= $x_1x_2\ldots x_n$, n Є N và x_iЄ{0,1} với thứ tự tự nhiên x= $x_1x_2\ldots x_n < y_1y_2\ldots y_m$ =y nếu n≤ m và x có thể nhận được từ y sau khi bỏ đi một số nào đó các tọa độ y_i. Hạng của vecto x, kí hiệu r(x), là số các tọa độ của x; tập các vecto cùng hạng n được kí hiệu là B(n). Trọng lượng của vecto x là số các tọa độ khác 0 của x và cũng là

ω(x)= $x_1+x_2+\ldots+x_n$. Tập các vecto cùng hạng n và trọng lượng k, kí hiệu là B(n,k).

Vậy B(n,k)= {x= $x_1x_2\ldots x_n$ | ω(x)= k}

Nếu x= $x_1x_2\ldots x_n$Є B(n,k) thì bóng đầy của x là tập con của B(n-1,k) kí hiệu Δ_fx= {$y_1y_2\ldots$yn-1 | ω(y)= ω(x) và y<x trong thứ tự tự nhiên} còn bóng khuyết của x là tập con của B(n-1,k-1) kí hiệu Δ_d x={ z=$z_1z_2\ldots z_{n-1}$ | ω(z)= ω(x) -1, và z<x trong thứ tự tự nhiên}. Bóng của x, kí hiệu là Δx= Δ_fx $\cup$ Δ_dx

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

Nếu $A \subset B$ thì ta lần lượt có:

$\Delta_f A = \cup \{ \Delta_f x \mid x \in A\}$,

$\Delta_d A = \cup \{ \Delta_d x \mid x \in A\}$,

$\Delta A = \cup \{ \Delta x \mid x \in A\} = \Delta_f A \cup \Delta_d A$.

Vào những năm 90 thế kỉ trước, nhà toán học Anh là Daykin cùng học trò Trần Ngọc Danh đã xác lập trong poset B một thứ tự tuyến tính gọi là V- thứ tự sau: x<y khi và chỉ khi hoặc $r(x) < r(y)$ hoặc $r(x)= r(y)$ và $\omega(x) < \omega(y)$ hoặc $x,y \in B(n,k)$ và tồn tại chỉ số t sao cho $x_i = y_i$ khi $i < t$ còn $x_t = 1$, $y_t = 0$. Xét riêng trong B(n,k) thứ tự tuyến tính này tựa như thứ tự từ điển. Với thứ tự tuyến tính này các tác giả đã chứng minh được poset B là một K- poset, nói riêng bóng của một đoạn đầu trong B lại là một đoạn đầu. Mở rộng kết quả này, trong [1] chúng tôi đã đưa ra một số điều kiện cần và đủ để bóng của một đoạn trong B(n) lại là đoạn trong B(n-1). Bài viết này tiếp tục làm sâu sắc thêm các kết quả đó, cụ thể dưới đây chúng ta sẽ xem xét các điều kiện để bóng đầy của một đoạn trong B(n,k) lại là một đoạn trong B(n-1,k). Và vì vậy, lưu ý rằng ở đây và cả suốt trong bài viết này thứ tự mà chúng ta quan tâm là thứ tự tuyến tính tựa từ điển.

2. Các kết quả chính

Để thuận lợi cho việc trình bày các kết quả, trước hết chúng ta đưa ra một vài quy ước về kí hiệu. Nếu vecto x có tọa độ thứ i là 1 ta viết $x= u1_iv$; trong đó u, v là các dãy tọa độ liên tiếp có thể xem như các vecto hạng bé hơn x. Một dãy tọa độ 1 liên tiếp nhau ta kí hiệu là g, còn dãy tọa độ 0 liên tiếp nhau ta kí hiệu là z.

Với một đoạn $[a;b] \subset B(n,k)$, vecto mút trái $a= a_1a_2\ldots a_n$ có hai khả năng xảy ra: hoặc $a_1 =0$ hoặc $a_1 =1$.

Xét trường hợp $a_1 =0$, khi đó $a= z1_iu$ và do b>a nên có 3 khả năng xảy ra cho b sau: hoặc $b = z1_iv$, hoặc $b= z1_{i+1}v$, hoặc $b= z1_tv$ với $t > i+1$.

Về khả năng đầu tiên cho b ta có:

Mệnh đề 1.

Trong B(n,k) cho $a= z1_iu< z1_iv= b$. Khi đó $\Delta_f [a;b]$ là đoạn khi và chỉ khi u=wz với $w \in B(k,k-1)$ và v =zg với $\omega(g)= k-1$.

Chứng minh:

Vì $a_1 =0$, dễ thấy rằng $\Delta_f [a;b] \subset [\min \Delta_f a; \max \Delta_f b]$ với $a'= \min \Delta_f a = z1_{i-1}u$. Chọn $x'= z1_{i-1}zg \in [a'; \max \Delta_f b]$, tồn tại duy nhất $x= z1_izg \geq a$ mà $x' \in \Delta_f x$. Muốn $x' \in \Delta_f [a;b]$, cần phải có $b= z1_iv \geq z1_izg =x$, do đó v= zg. Chọn tiếp $y' = z1_igz \in [a'; \max \Delta_f b]$, các vecto $y \geq a$ mà $y' \in \Delta_f y$ phải có dạng $y= z1_isz$ với $s \in B(k, k-1)$; điều đó buộc $a= z1_iwz$ với $w \in B(k, k-1)$.

Vậy điều kiện trong mệnh đề là cần, bây giờ ta chỉ ra rằng điều kiện đó cũng là đủ: tức là chứng minh rằng [min Δ_f a; max Δ_f b] $\subset$ Δ_f[a;b]. Nhắc lại rằng khi đó min Δ_fa= a' = $z1_{i-1}$wz và max Δ_f b= b' = $z1_i$zg. Lấy bất kì x' Є [a';b']. Có 2 khả năng cho x':

Hoặc x' = $z1_{i-1}$d $\geq$ a'. Khi đó chọn x= $z1_i$d thì hiển nhiên x Є [a;b] và x' Є Δ_f x.

Hoặc x' = $z1_i$c, bổ sung vào x' tọa độ 0 tương ứng tọa độ 0 của vecto w trong a; ta được x Є [a;b] mà x' Є Δ_fx.

Về khả năng tiếp theo khi a= $z1_i$u và b= $z1_{i+1}$v, trước hết ta có vài kết quả hiển nhiên sau:

Mệnh đề 2.

Trong B(n,k) cho a= $z1_i$u < $z1_{i+1}$v = b. Khi đó Δ_f[a;b] là đoạn nếu thỏa một trong hai điều kiện sau:

i/ a= $z1_i$gz,

ii/b= $z1_{i+1}$zg.

Khi a và b không thỏa các điều kiện của mệnh đề 2, ta có một vài kết quả phức tạp hơn sau đây:

Mệnh đề 3.

Trong B(n,k) cho a= $z1_i$u < $z1_{i+1}$v và b*= $z1_i$v0. Nếu a $\leq$ b* thì Δ_f[a;b] là đoạn.

Chứng minh:

Lấy bất kì x' Є [min Δ_f a; max Δ_f b]. Có ba khả năng xảy ra sau:

i/ x'= $z1_{i-1}$w $\geq$ a'= $z1_{i-1}$u. Chọn x= $z1_i$w > $z1_i$u= a. Hiển nhiên x< b, do đó x' Є Δ_fx $\subset$ Δ_f [a;b].

ii/ x'= $z1_{i+1}$s' < max Δ_f b. Chọn x= $z1_{i+1}$s trong đó x có được từ x' khi bổ sung thêm tọa độ 0 tại vị trí tọa độ 0 của b bị bỏ đi để có max Δ_f b. Hiển nhiên khi đó a<x≤b và x' Є Δ_fx $\subset$ Δ_f [a;b].

iii/ x'= $z1_i$w'; có hai trường hợp xảy ra sau đây:

+Tồn tại x= $z1_i$w $\geq$ a và x' Є Δ_f x $\subset$ Δ_f [a;b].

+Với mọi x= $z1_i$w mà x' Є Δ_f x thì x< a. Nói riêng x= $z1_i$w'0 <a $\leq$ b* = $z1_i$v0. Khi đó chọn x= $z1_{i+1}$w' < $z1_{i+1}$v= b thì x' Є Δ_f x $\subset$ Δ_f [a;b].

Còn nếu a,b như mệnh đề 3 mà a> b*, thì ắt có chỉ số j mà a= $z1_i$w0_Jh > $z1_i$w1_jm = b*. Khi đó ta có các kết quả:

Mệnh đề 4.

Cho a,b Є B(n,k) mà a= $z1_i$w0_Jh > $z1_i$w1_Jm = b*. Khi đó Δ_f [a;b] là đoạn nếu ω(w) $\geq$ 1 hoặc ω(w) = 0 và a= $z1_i$w0_jnz với ω(n)= r(n) = k-1.

Chứng minh:

Lấy bất kì x' Є [min Δ_f a; max Δ_f b], ta cần chỉ ra sự tồn tại x Є [a;b] mà x' Є Δ_f x.

Thật vậy: nếu a= $z1_iw0_jh$ với $\omega(w) \geq 1$; ắt tồn tại chỉ số t mà i< t< j để a_t= 1. Bổ sung vào x' tọa độ 0 tại chỉ số t để được x Є [a;b] và hiển nhiên x' Є Δ_fx.

Nếu ω(w) = 0, tức a_t=0 với i< t < j. Khi đó nếu x' có tọa độ 1 nằm giữa hai chỉ số i;j, thì x= 0x' Є [a;b] và x' Є Δ_fx. Còn nếu các tọa độ của x' nằm giữa hai chỉ số i; j đều bằng 0, bổ sung thêm tọa độ 0 vào x' tại chỉ số t> j để có x mong muốn.

Với khả năng a= $z1_iu$ < $z1_iv$ với t> i+1; xem như là hệ quả trực tiếp của mệnh đề 2, ta có kết luận sau mà việc chứng minh xin nhường cho độc giả.

Mệnh đề 5.

Trong B(n,k) nếu a= $z1_iu$< $z1_tv$= b với t> i+1 thì Δ_f [a;b] luôn luôn là đoạn.

Trường hợp a= $a_1a_2\ldots a_n$ mà a_1 = 1, có 2 khả năng xảy ra cho b= $b_1b_2\ldots b_n$ là b_1=0 hay b_1= 1.

Khi b_1 =0, chú ý rằng có c= ogw Є[a;b], và vì rằng Δ_f [c;b] $\subset$ Δ_f [a;b] $\subset$ [gw; max Δ_f b] nên Δ_f [a;b] là đoạn nếu Δ_f [a;b]= [gw; max Δ_f b]. Và đẳng thức cuối xảy ra nếu Δ_f [c;b] là đoạn; và bởi vì c,b thỏa mãn điều kiện là tọa độ đầu bằng 0, vậy xem như là hệ quả trực tiếp của các mệnh đề 1 và mệnh đề 2 ta có:

Mệnh đề 6.

Trong B(n,k) cho a=gu <zv= b. Khi đó Δ_f [a;b] là đoạn nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

i/ Hoặc b= 01zg,

ii/ Hoặc b= $z1_iv$ với i≥ 3.

Khi b_1= 1, khả năng đầu tiên xảy ra là: a= $g1_igu$< $g0_iv$= b. Khi đó tồn tại c=$g1_i0gz$ Є [a;b] với min Δ_f c= $g1_igz$. Dễ thấy Δ_f [c;b] $\subset\Delta_f$[a;b] $\subset$ [minΔ_fc; maxΔ_fb].

Với bất kì d'= $g1_iw$ Є [min Δ_f c; max Δ_f b], ta chọn d= $g1_i0w$ Є [c;b] thì d' Є Δ_f d $\subset$ Δ_f [c;b]. Vậy Δ_f [c;b] là đoạn, do đó Δ_f[a;b] là đoạn, tức ta có:

Mệnh đề 7.

Trong B(n,k) cho a= $g1_ju$ < $g0_iv$ = b với j> i. Khi đó Δ_f[a;b] là đoạn.

Khả năng xảy ra tiếp theo là a= $g1_izu$ < $g0_iv$ = b sẽ cho ta kết quả sau:

Mệnh đề 8.

Trong B(n,k) cho a= $g1_izu$ < $g0_iv$ = b. Khi đó Δ_f[a;b] là đoạn nếu v= zw hoặc v=1zg

Chứng minh:

Chọn c= $g0_igz$ Є [a;b] với min Δ_fc= gz. Dễ thấy Δ_f[c;b] $\subset\Delta_f$[a;b] $\subset$ [minΔ_fc; maxΔ_fb], vì vậy Δ_f[a;b] là đoạn nếu [min Δ_f c; max Δ_f b] $\subset\Delta_f$[c;b].

Trước hết, xét trường hợp b= $g0_izw$:

Lấy bất kì x’ Є [min Δ_f c; max Δ_f b]. Có 2 khả năng cho x’: hoặc tọa độ thứ i của x’ là 0, khi đó ta bổ sung vào x’ tọa độ 0 ở vị trí tọa độ 0 của b được bỏ đi để có max Δ_f b thì dễ thấy x Є [c;b]; hoặc tọa độ thứ I của x’ là 1, khi đó ta bổ sung vào x’ tọa độ 0 ở vị trí thứ i (tọa độ 1 được đẩy lên vị trí thứ i+1!) để được x thì x Є [c;b]. Vậy kết luận đã rõ với giả thiết thứ nhất.

Xét trường hợp b= $g0_i1zg$; với bất kì x’ Є [min Δ_f c; max Δ_f b] cũng xét hai khả năng về tọa độ thứ i của x’ như trên, và ta cũng chọn x Є [c;b] tương tự như trên cho từng khả năng đó, và việc chọn tương tự đó là hợp lí.

Cuối cùng để kết thúc bài viết này ta xét thêm một khả năng nữa khi a= $g1_iz1_Ju$ < $g1_iz1_jv$= b. Khi đó ta có:

Mệnh đề 9.

Trong B(n,k) cho a= $g1_iz1_Ju$ < $g1_iz1_Jv$= b với j> i+1. Khi đó Δ_f[a;b] là đoạn khi và chỉ khi u=wz với r(u)= ω(w)+ 1 và v= zg

Chứng minh:

Hiển nhiên với a,b như trên thì $\Delta_f[a;b] \subset$ [min Δ_f a; max Δ_f b] với min Δ_f a=$g1_iz1_{J-1}u$ và maxΔ_f b= $g1_iz1_Jv$’ với v’= maxΔ_f v. Chọn x’ = $g1_iz1_{J-1}zg$ Є [min Δ_f a; max Δ_f b]. Tồn tại duy nhất x = $g1_iz1_jzg$ > a mà x’ Є Δ_f x. Từ điều kiện x≤ b buộc b= x= $g1_iz1_jzg$ hay v= zg.

Lại chọn y’= $g1_iz1_Jgz$ Є [min Δ_f a; max Δ_f b]. Khi đó muốn có y Є [a;b] mà y’ ЄΔ_fy, buộc a= $g1_iz1_jwz$ với w chứa chỉ một tọa độ 0 tức r(w)= ω(w)+ 1.

Vậy điều kiện nói trong mệnh đề là cần.

Chúng tôi nhường lại cho độc giả việc kiểm tra điều kiện trên cũng là đủ để Δ_f[a;b] là đoạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Huyên (2009), “Bóng của đoạn trong K-poset các vecto Boole”, *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM.*
2. I.Anderson (1989), *Combinatoris of finite sets*, Clarendon Press, Oxford.
3. Daykin (1996), D.E, *To find all suitable order of 0,1 vectors*, Congress Asian Bulletin. of Mathematics
4. Tran Ngoc Danh (1997), *Set of 0,1 vectors with minimal set subvectors*, Rostock Math; Kollog.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 26-11-2012; ngày phản biện đánh giá: 06-12-2012; ngày chấp nhận đăng: 18-02-2013)