TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 6 (2018): 89-96
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 6 (2018): 89-96

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

KHẢO SÁT TÍNH CHẤT SỐ CƠ SỞ BẤT BIẾN CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT TRÊN MỘT SỐ LỚP ĐỒ THỊ HỮU HẠN

Ngô Tấn Phúc*[*], *Vũ Nhân Khánh

Khoa Sư phạm Toán - Tin – Trường Đại học Đồng Tháp

Ngày nhận bài: 18-11-2017 ngày nhận bài sửa: 20-5-2018; ngày duyệt đăng: 19-6-2018

TÓM TẮT

Trong bài viết này, chúng tôi thiết lập một tiêu chuẩn để đại số đường đi Leavitt của đồ thị Cayley và đồ thị chia cảm sinh từ các nhóm hữu hạn có tính chất số cơ sở bất biến.

Từ khóa: đại số đường đi Leavitt, đồ thị Cayley, đồ thị chia, tính chất số cơ sở bất biến.

ABSTRACT

Investigation in the invariant basic number property of Leavitt path algebras of some classes of finite graphs

In this paper, we give a criteria for Leavitt path algebras of Cayley and divisibility graphs arising from finite groups having invariant basic number.

Keywords: Leavitt path algebra, cayley graph, divisibility graph, invariant basic number.

1. Giới thiệu

Khái niệm Đại số đường đi Leavitt của một đồ thị có hướng với hệ số trên một trường của Abrams - Aranda Pino [1] và Ara - Moreno - Pardo [2] đưa ra năm 2005 là một lĩnh vực nghiên cứu sử dụng các kết quả, ý tưởng và phương pháp của cả giải tích, đại số hiện đại cũng như cổ điển. Để hiểu sâu hơn về động cơ, lịch sử nghiên cứu và thành tựu của đại số đường đi Leavitt, chúng ta có thể tham khảo bài viết tổng quát của Abrams [3] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong chuyên ngành Đại số kết hợp người ta thường tìm hiểu tính chất của các lớp vành thông qua những điều kiện hạn chế trên các môđun xạ ảnh. Một trong những điều kiện như vậy là tính chất số cơ sở bất biến. Một vành được gọi là có *tính chất số cơ sở bất biến* nếu hai cơ sở bất kì của một môđun tự do hữu hạn sinh trên vành đó đều có cùng số phần tử. Có nhiều lớp vành có tính chất số cơ sở bất biến chẳng hạn như các trường, vành giao hoán, vành Noether. Tuy nhiên, việc kiểm tra một lớp vành cho trước có tính chất số cơ sở bất biến hay không là không dễ.

Gần đây, một số tác giả đã sử dụng phương pháp tổ hợp để nghiên cứu tính chất này cho các lớp vành thông qua việc xét tính chất số cơ sở bất biến cho các đại số đường đi Leavitt. Cụ thể, họ quan tâm vấn đề

[*] Email: *ntphuc@dthu.edu.vn*

Vấn đề: Tìm một tiêu chuẩn thuần túy đồ thị trên E để cho đại số đường đi Leavitt $L_K\left(E\right)$ thỏa tính chất số cơ sở bất biến.

Một số kết quả tốt nhất gần đây nhằm giải quyết vấn đề trên có thể kể đến như: Abrams - Nam - Phuc [4] và một cách độc lập, Ara - Li - Lledo - Wu [5] đã nghiên cứu tính chất số phần tử sinh không bị chặn (một tính chất mạnh hơn tính chất số cơ sở bất biến) và đưa ra một tiêu chuẩn thuần túy đồ thị trên E để đại số đường đi Leavitt $L_K\left(E\right)$ có tính chất số phần tử sinh không bị chặn; Nam - Phuc [6] và một cách độc lập, Kanuni - Ozaydin [7] đã thiết lập được một tiểu chuẩn về tính chất số cơ sở bất biến cho đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ thông qua ma trận liên thuộc của đồ thị E. Trong [6], các tác giả cũng đã tìm một điều kiện thuần túy đồ thị trên E để đại số đường đi Leavitt $L_K\left(E\right)$ có tính chất số cơ sở bất biến và sau đó áp dụng vào một số lớp đồ thị cụ thể.

Tính đến thời điểm hiện tại vấn đề nêu trên vẫn còn là một vấn đề mở mang tính thời sự. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ tiếp tục các công việc trong [6] nhằm khảo sát tính chất số cơ sở bất biến của đại số đường đi Leavitt của một số lớp đồ thị hữu hạn. Đối tượng mà chúng tôi hướng đến là lớp đồ thị được cảm sinh từ lý thuyết nhóm.

Để thuận tiện cho người đọc, chúng tôi sẽ giới thiệu ngắn gọn các kiến thức chuẩn bị trong phần 2. Phần 3 là nội dung chính của bài viết; trong phần 3, chúng tôi khảo sát lớp đồ thị Cayley và đồ thị chia cảm sinh từ các nhóm hữu hạn, sau đó chúng tôi xét tính số cơ sở bất biến của đại số đường đi Leavitt của các lớp đồ thị này.

2. Vành thỏa tính chất số cơ sở bất biến

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu về tính chất số cơ sở bất biến cho vành, khái niệm đồ thị có hướng và đại số đường đi Leavitt. Các kết quả trong phần này chủ yếu được tham khảo từ [1], [4], [8].

Định nghĩa 2.1. ([8], Definition 1.3).

Một vành R được gọi là thỏa mãn tính chất *số cơ sở bất biến* nếu $R^m \cong R^n$ (xem như các R-môđun phải) kéo theo $m=n$.

Cho R là một vành và $m,n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $R^m \cong R^n$ nếu và chỉ nếu tồn tại các phần tử x_{ij}, y_{ji} trong R sao cho:

$$\sum x_{iv}y_{vk} = \delta_{ik}\left(i,k=\overline{1,m}\right);\sum x_{hu}y_{uj} = \delta_{hj}\left(h,j=\overline{1,n}\right)$$ (δ là kí hiệu Kronecker).

Điều đó dẫn đến nhận xét sau

Nhận xét 2.2. Một vành R thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến khi và chỉ khi với mọi $A \in M_{m\times n}\left(R\right)$ và với mọi $B \in M_{n\times m}(R)$, nếu $AB = I_m$ và $BA = I_n$ thì $m=n$.

Nhận xét 2.2 giúp ta có thể định nghĩa tính chất số cơ sở bất biến thông qua các R-môđun trái.

Ví dụ 2.3.

(i) Mọi trường đều là các vành thỏa tính chất số cơ sở bất biến;

(ii) Mọi vành Noether phải đều thỏa tính chất số cơ sở bất biến (suy ra từ [8], Proposition 1.13).

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về đồ thị có hướng và đại số đường đi Leavitt.

Một đồ thị có hướng là bộ $E=(E^0,E^1,s,r)$ bao gồm *tập đỉnh* E^0 và *tập cạnh* E^1, cùng với hai ánh xạ $s,r:E^1\to E^0$. Các đỉnh $s(e)$ và $r(e)$ lần lượt được gọi là *điểm đầu* và *điểm cuối* của cạnh e. Ta nói $s(e)$ là đỉnh *phát ra* cạnh e. Một đồ thị E được gọi là *hữu hạn* nếu cả hai tập E^0 và E^1 là hữu hạn. Một đỉnh v mà $s^{-1}(v)=\varnothing$ được gọi là một *ngọn*; một đỉnh v mà $r^{-1}(v)=\varnothing$ được gọi là một *gốc*; v được gọi là *đỉnh chính quy* nếu $0<|s^{-1}(v)|<\infty$.

Định nghĩa 2.4. *(*[1], Definition 2.1).

Cho một đồ thị trực tiếp $E=(E^0,E^1,s,r)$ và một trường bất kì K. *Đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ *của đồ thị* E *với hệ tử trên* K là một K-đại số sinh bởi các tập E^0, E^1 và $\{e^*\mid e\in E^1\}$, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v,w\in E^0$ và $e,f\in E^1$:

(1) $vw=\delta_{v,w}w$;

(2) $s(e)e=e=er(e)$ và $r(e)e^*=e^*=e^*s(e)$;

(3) $e^*f=\delta_{e,f}r(e)$;

(4) $v=\sum_{e\in s^{-1}(v)}ee^*$ với mọi đỉnh chính quy v.

Ví dụ 2.5.

(i) Cho đồ thị

$$E = \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet^{v_3} \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet^{v_n}$$

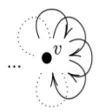
Khi đó $L_K(E)\cong M_n(K)$.

(ii) Cho đồ thị

$E =$ 

Khi đó $L_K(E)\cong K[x,x^{-1}]$.

(iii) Với mỗi số nguyên $n\ge 2$ gọi

$R_n =$ 

R_n được gọi là bông hoa n cạnh; đó là một đồ thị đặc biệt trong đại số đường đi Leavitt vì $L_K(R_n) \cong L_K(1,n)$, trong đó $L_K(1,n)$ là đại số Leavitt kiểu $(1,n)$.

Nhận xét 2.6. Cho $E=(E^0,E^1)$ là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Khi đó ta có

(i) $L_K(E) = \bigoplus_{v\in E^0} vL_K(E)$.

(ii) $vL_K(E) \cong \bigoplus_{e\in s^{-1}(v)} r(e)L_K(E)$ với mọi đỉnh chính quy $v \in E^0$.

Chứng minh. (i) Trích từ [9], Lemma 2.1.9.

(ii) Chứng minh được lấy ý tưởng từ [2], Theorem 3.5 như sau: Gọi $s^{-1}(v)=\{e_1,\dots,e_n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, xét đồng cấu

$$\begin{aligned} \varphi:\ vL_K(E) &\to \bigoplus_{i=1}^{n} r(e_i)L_K(E) \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i \end{aligned}$$

và đồng cấu

$$\begin{aligned} \phi:\ \bigoplus_{i=1}^{n} r(e_i)L_K(E) &\to vL_K(E) \\ r(e_i) &\mapsto e_i^* \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra đó là các đồng cấu ngược của nhau và ta được điều phải chứng minh □

Với mỗi đồ thị hữu hạn $E=(E^0,E^1)$, ta định nghĩa *ma trận liên thuộc* của E, kí hiệu A_E, là ma trận xác định như sau: gọi $E^0=\{v_1,v_2,\dots,v_h\}$, khi đó A_E là ma trận vuông $(a_{ij})_h$ trong đó a_{ij} là số các cạnh nối từ v_i đến v_j. Trong [6], các tác giả đã chỉ ra một điều kiện cần và đủ dựa vào ma trận liên thuộc của đồ thị để đại số đường đi Leavitt của nó thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến.

Định lí 2.7. ([6], Theorem 2.5 và [7], Theorem 18).

Cho E là một đồ thị hữu hạn có tập đỉnh là $\{v_i \mid 1\le i\le h\}$ và $\{v_1,\dots,v_z\}$ $(z\le h)$ là tập các đỉnh chính quy của E. Đặt

$$J_E=\begin{pmatrix} I_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_h(\mathbb{N}),\ b=[1\dots1]^t\in M_{h\times1}(\mathbb{N})$$

và $[A_E^t-J_E\ \ b]$ là ma trận có được từ $A_E^t-J_E$ bằng cách thêm vào cột b. Cho K là một trường bất kì. Khi đó $L_K(E)$ thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}(A_E^t-J_E)<\operatorname{rank}([A_E^t-J_E\ \ b]).$$

Ví dụ 2.8.

Với các lớp đại số đã giới thiệu trong Ví dụ 2.5, tính chất số cơ sở bất biến của chúng đã được xét trong [8]. Tuy nhiên, ta có thể dùng Định lí 2.7 để kiểm tra một cách dễ dàng hơn rằng:

(i) $M_n(K)$ mãn thỏa tính chất số cơ sở bất biến;

(ii) $K[x,x^{-1}]$ cũng thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến;

(iii) $L_K(1,n)$ không thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến.

3. Tính chất số cơ sở bất biến của đại số đường đi Leavitt trên một số đồ thị hữu hạn cảm sinh từ lí thuyết nhóm

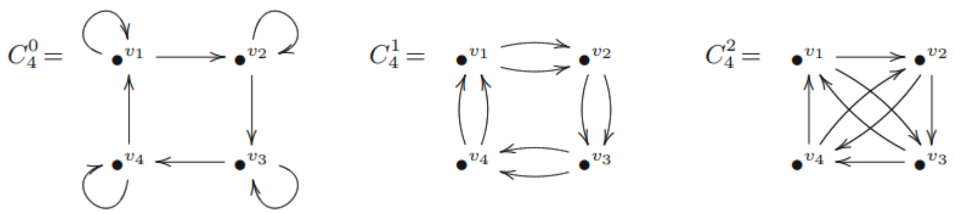
Trong phần này, chúng tôi khảo sát lớp đồ thị Cayley và đồ thị chia cảm sinh từ các nhóm hữu hạn. Tiếp theo, chúng tôi sẽ tiếp tục các công việc trong [6] bằng cách sử dụng Định lí 2.7 để xét tính số cơ sở bất biến của đại số đường đi Leavitt của các lớp đồ thị này.

Định nghĩa 3.1. ([10], tr.1).

Cho G là một nhóm và S là tập sinh của G. Ta gọi *đồ thị Cayley của nhóm G ứng với tập sinh S*, kí hiệu là C_G^S, là đồ thị xác định như sau: tập đỉnh là tập các phần tử trong G và ta nói có một cạnh đi từ u đến v nếu tồn tại $s \in S$ để $u = vs$.

Ví dụ 3.2.

Xét $G = \mathbb{Z}_n (n \geq 3)$ và chọn tập sinh $S = \{1, j\}, (1 \leq j < n)$. Đồ thị Cayley của G ứng với tập sinh S trong trường hợp này kí hiệu là C_n^j. Sau đây là hình vẽ của C_4^0, C_4^1 và C_4^2.



Trong [10], các tác giả đã khảo sát các đồ thị Cayley C_n^j và phân loại đến đẳng cấu các đại số đường đi Leavitt của chúng. Tiếp theo, chúng tôi xét tính chất số cơ sở bất biến của đại số đường đi Leavitt của lớp đồ thị Cayley của nhóm hữu hạn.

Định lí 3.3.

Cho G là nhóm hữu hạn, S là tập sinh của G và K là một trường. Khi đó, $L_K(C_G^S)$ thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến khi và chỉ khi S là tập chỉ gồm một phần tử.

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử $L_K(C_G^S)$ thỏa mãn tính chất cơ sở bất biến và S là tập có ít nhất hai phần tử. Gọi lực lượng của G và S lần lượt là h,k với $2 \leq k \leq h$. Ta viết $S = \{g_1,...,g_k\}$. Khi đó theo Nhận xét 2.6 với mỗi đỉnh g trong C_G^S ta có

$$gL_K(C_G^S) \cong \bigoplus_{e\in s^{-1}(g)} r(e)L_K(C_G^S) = \bigoplus_{i=1}^{k} gg_i^{-1}L_K(C_G^S).$$

Lưu ý rằng vì G là nhóm nên ta có $G = Gg_i^{-1}$ (hay $\bigoplus_{g\in G} gL_K(C_G^S) \cong \bigoplus_{g\in G} gg_i^{-1}L_K(C_G^S)$) với mọi $i = 1,2,..,k$, do đó

$$\bigoplus_{g\in G} gL_K(C_G^S) \cong \bigoplus_{g\in G}\bigoplus_{i=1}^{k} gg_i^{-1}L_K(C_G^S) = \bigoplus_{g\in G} kgL_K(C_G^S).$$

Như vậy, $L_K(C_G^S) = \bigoplus_{g\in G} gL_K(C_G^S) \cong \bigoplus_{g\in G} kgL_K(C_G^S) = kL_K(C_G^S).$

Do đó, $L_K(C_G^S)$ không thỏa mãn tính chất cơ sở bất biến.

$(\Leftarrow)$ Giả sử $S = \{a\}$. Khi đó mỗi đỉnh của C_G^S đều phát ra duy nhất một cạnh đến đỉnh khác nên $[A_E^t - J_E \;\; b]$ là ma trận có dạng như sau

$$[A_E^t - J_E \;\; b] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{h\times h+1}.$$

Cộng các dòng vào dòng cuối, ta được

$$[A_E^t - J_E \;\; b] \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}_{h\times h+1}.$$

Suy ra

$$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) \le \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]) - 1 < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]).$$

Theo Định lí 2.7, $L_K(C_G^S)$ thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến. □

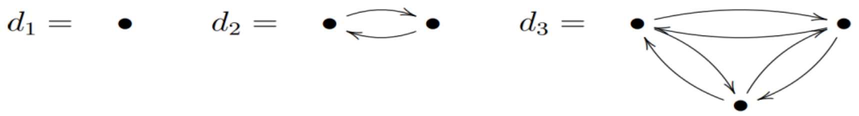
Tiếp theo, chúng tôi xét tính chất số cơ sở bất biến cho đại số đường đi Leavitt của đồ thị chia của một nhóm hữu hạn.

Định nghĩa 3.4. ([11], tr.1).

Cho S là một vị nhóm giao hoán. Ta gọi *đồ thị chia của vị nhóm* S, kí hiệu là $d(S)$, là đồ thị xác định như sau: tập đỉnh là tập các phần tử trong S và ta nói có một cạnh đi từ u đến v nếu $u \ne v$ và tồn tại $s \in S$ để $u = vs$.

Ví dụ 3.5.

Cho S là nhóm có n phần tử. Ta kí hiệu $d(S)$ là d_n. Khi đó



Định lí 3.6.

Cho S là nhóm hữu hạn có n phần tử và K là một trường. Khi đó, $L_K(d_n)$ thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến khi và chỉ khi $n \le 2$.

Chứng minh. $(\Leftarrow)$ Với $n=1$ và $n=2$ thì $[A_E^t - J_E \;\; b]$ tương ứng là các ma trận sau

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Dễ thấy cả hai trường hợp trên đều có

$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) < \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]).$

Theo Định lí 2.7, $L_K(d_n)$ thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến.

$(\Rightarrow)$ Với $n \ge 3$ ta chứng minh $L_K(d_n)$ không thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến. Vì mỗi đỉnh của d_n đều phát ra $n-1$ cạnh đến tất cả các đỉnh còn lại trong d_n nên $[A_E - J_E]$ là ma trận sau

$$[A_E - J_E] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Ta có

$|A_E - J_E| = (n-2)(-2)^{n-1} \ne 0.$

Suy ra

$\operatorname{rank}(A_E^t - J_E) = \operatorname{rank}([A_E^t - J_E \;\; b]) = n.$

Theo Định lí 2.7, $L_K(d_n)$ không thỏa mãn tính chất số cơ sở bất biến. □

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Bài báo được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên mã số SPD2017.02.36.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.Abrams and G.Aranda Pino, "The Leavitt path algebra of a graph," *Journal of Algebra*, 293, pp.319 - 334, 2005.

[2] P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo, "Nonstable K-theory for graph algebras," *Algebra Represent Theory*, 10, pp.157-178, 2006.

[3] G.Abrams, "Leavitt path algebras: the first decade," *Bulletin of Mathematical Sciences* 5, pp.59-120, 2015.

[4] G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc, "Leavitt path algebras having unbounded generating number," *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221, pp.1322-1343, 2017.

[5] P. Ara, K. Li, F. Lledo and J. Wu, *Amenability of coarse spaces and K-algebras*, arXiv: 1607.00328v1, 2016.

[6] T. G. Nam and N. T. Phuc, *A criterion for Leavitt path algebras having invariant basis number*, arXiv:1603.09695, 2016.

[7] M. Kanuni and M. Ozaydin, *Cohn-Leavitt path algebras and the invariant basis number property*, arXiv:1606.07998v1, 2016.

[8] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1999.

[9] I. Dangerfield, *Leavitt path algebra (Thesis, Master of Science)*. University of Otago. Retrieved from http://hdl.handle.net/10523/1667, 2011.

[10] G. Abrams, G. A. Pino, "The Leavitt path algebras of generalized Cayley graphs," *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13, pp.1-27, 2016.

[11] A. V Kelarev, "Directed graphs and combinatiorial properties of semigroups" *Journal of Algebra*, 251, pp.16-26, 2002.