NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VỚI ĐỐI SỐ LỆCH

LÊ HOÀN HÓA [*], NGUYỄN NGỌC TRỌNG [**], LÊ THỊ KIM ANH[***]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm mạnh của một dạng phương trình vi tích phân với đối số lệch. Công cụ sử dụng là định lý điểm bất động của toán tử $U+C$, trong đó U là toán tử Hoa-Schmitt co và C là toán tử compact.

ABSTRACT

The strong solution of the retarded integro-differential equation

In this paper, we study the existence of a strong solution of one form of retarded integro-differential equation by using The fixed point Theorem of the operator $U+C$, whereas U is a Hoa-Schmitt operator and C is a compact operator.

1. Các kết quả được sử dụng

Cho X là không gian lồi địa phương và P là một họ nửa chuẩn tách trên X, D là một tập con của X và $U : D \to X$. Với bất kỳ $a \in X$, ta định nghĩa

$U_a : D \to X$ bởi $U_a(x) = U(x) + a.$

Toán tử $U : D \to X$ được gọi là Hoa-Schmitt co trên tập con Ω của X nếu

1) Với bất kỳ $a \in \Omega : U_a(D) \subset D.$

2) Với bất kỳ $a \in \Omega$ và $p \in P$, tồn tại $k_a \in$ với tính chất $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in {}^{*}$ và $\exists \delta > 0$ sao cho $\forall x, y \in D$ thỏa $\alpha_a^p(x,y) < \varepsilon + \delta$ thì $\alpha_a^p\left(U_a^r(x), U_a^r(y)\right) < \varepsilon$.

$\left(\alpha_a^p(x,y) = \max\left\{ p\left(U_a^i(x) - U_a^j(y)\right) : i, j = 0,1,2,\dots,k_a \right\};\quad = \{0,1,2,\dots\};\quad {}^{*} = \{1,2,\dots\}\right)$

***Định lý 1.*[1]**

Cho X là không gian lồi địa phương đầy đủ theo dãy với họ nửa chuẩn tách P và giả sử U, C là toán tử trên X sao cho

i) U là Hoa-Schmitt co trên X.

ii) Với bất kỳ $p \in P, \exists k_p \geq 0$ (k_p phụ thuộc vào p) sao cho:

$p\left(U(x) - U(y)\right) \leq k_p p(x-y) \quad \forall x, y \in X.$

---

[*] PGS TS, Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP HCM
[**] Học viên Cao học Trường Đại học Sư phạm TP HCM
[***] ThS, Trường Đại học Tiền Giang

iii) Tồn tại $x_0 \in X$ với tính chất: $\forall p \in P, \exists r \in {}^*$ và $\exists \lambda \in [0,1)$ $(r,\lambda$ phụ thuộc vào $p)$ sao cho $p\left(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)\right) \le \lambda p(x-y); \quad \forall x, y \in X.$

iv) C là ánh xạ compact và $p\left(C(A)\right) < \infty$ với $A \subset X, p(A) < \infty$.

trong đó $p(A) = \sup\{p(x) : x \in A\}$.

v) $\lim\limits_{p(x)\to\infty} \dfrac{p\left(C(x)\right)}{p(x)} = 0; \qquad \forall x \in X, \forall p \in P.$

Khi đó $U + C$ có điểm bất động trên X.

Định lý 2. **[2]**

Ký hiệu ${}_+ = [0,\infty)$. Giả sử $X_0 = C({}_+, E)$ là không gian Frechet các hàm liên tục từ ${}_+$ vào E và A là tập con của X_0.

Với mỗi $n \in {}^*$, giả sử $X_n = C\left([0,n], E\right)$ là không gian Banach gồm các hàm số liên tục $u : [0,n] \to E$ với chuẩn $|u|_n = \sup\left\{|u(t)| : t \in [0,n]\right\}$.

Đặt $A_n = \left\{x|_{[0,n]} : x \in A\right\}$. Khi đó ta có :

Tập A là compact tương đối trong X_0 $\Leftrightarrow$ ($\forall n \in {}^*, A_n$ đẳng liên tục trong X_n và với bất kỳ $s \in [0,n]$ tập hợp $A_n(s) = \{x(s) : x \in A_n\}$ compact tương đối trong E)

$\Leftrightarrow$ ($\forall n \in {}^*, A_n$ đẳng liên tục trong X_n và tập hợp $\{x(t) : x \in A_n, t \in [0,n]\}$ compact tương đối trong E).

2. Kết quả chính

Cho $r > 0$. Ta ký hiệu $|\ |$ là chuẩn của không gian Banach E.

$C_r = C\left([-r,0], E\right)$ với chuẩn $\|x\| = \sup\left\{|x(t)| : t \in [-r,0]\right\}$.

$X_0 = C({}_+, E)$ là không gian Frechet các hàm liên tục từ ${}_+$ vào E với họ nửa chuẩn $\left\{|\ |_n\right\}_n$ được định nghĩa như sau: $|x|_n = \sup\left\{|x(t)| : t \in [0,n]\right\}, n \in {}^*$.

Cho $X = C\left([-r,\infty), E\right)$ là không gian các hàm liên tục từ $[-r,\infty)$ vào E.

Với mọi $x \in X$ và $t \ge 0$ đặt $x_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r,0]$.

Xét phương trình

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + L(t)x_t + V(t,x(t)) + \int\limits_0^t K(t,s,x(s),x_s)\,ds + f(t);\ t \geq 0. \\ x_0 = \varphi \in C_r\ . \end{cases} \qquad (I)$$

Trong đó $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ E vào E ,$\{L(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ C_r vào E , $f : {}_{+} \to E$ liên tục.

Xét phương trình (I) với các điều kiện sau

1) $t \mapsto A(t)$ liên tục và $t \mapsto L(t)$ liên tục.

2) $V : {}_{+} \times E \to E$ liên tục và tồn tại hàm liên tục $\omega : {}_{+} \to {}_{+}$ sao cho

$\left|V(t,x) - V(t,y)\right| \leq \omega(t)\left|x - y\right|;\ \forall x, y \in E, \forall t \in {}_{+}$.

3) $K : [0,\infty)^2 \times E \times C_r \to E$ là ánh xạ compact sao cho

$K(t,.,.,.) : I \times A \times B \to E$ liên tục đều theo t trên mỗi đoạn bị chặn tùy ý của $[0,\infty)$, với bất kỳ các tập con bị chặn $I \subset [0,\infty)$, tập con bị chặn $A \subset E$, tập con bị chặn $B \subset C_r$, nghĩa là:

Trên mỗi đoạn bị chặn tùy ý J của$[0,\infty)$, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với mọi t_1, t_2 cùng thuộc J và $\left|t_1 - t_2\right| < \delta$ thì

$\left|K(t_1,s,x,y) - K(t_2,s,x,y)\right| < \varepsilon,\quad \forall (s,x,y) \in I \times A \times B$.

4) $\lim\limits_{|x|+\|u\|\to\infty} \dfrac{\left|K(t,s,x,u)\right|}{|x| + \|u\|} = 0$ đều theo (t,s) trên mỗi đoạn bị chặn tùy ý của $[0,\infty)^2$.

Định lý 3. Nếu các điều kiện $1), 2), 3), 4)$ được thỏa mãn thì bài toán (I) với $\varphi \in C_r$ cho trước có nghiệm $x : [-r,\infty) \to E$.

Chứng minh.

Đặt $g : {}_{+} \times C_r \to E$ với $g(t,x) = A(t)x(0) + L(t)x$ .Vậy (I) được viết lại là

$$\begin{cases} x'(t) = g(t,x_t) + V(t,x(t)) + \int\limits_0^t K(t,s,x(s),x_s)\,ds + f(t);\ t \geq 0. \\ x_0 = \varphi. \end{cases}$$

(I) tương đương với phương trình tích phân sau

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t g(s,x_s)ds + \int_0^t V(s,x(s))ds + \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t \left(\int_0^s K(s,\sigma,x(\sigma),x_\sigma)\,d\sigma \right) ds + \varphi(0);\ t \ge 0. \\ x_0 = \varphi. \end{cases}$$

Với $x \in X_0$ hoặc X_n, đặt $\overline{x}:[-r,\infty) \to E$ được định nghĩa như sau

$$\overline{x}(s) = \begin{cases} x(s) + \varphi(0) - x(0), & s \ge 0. \\ \varphi(s) &, \ s \in [-r,0]. \end{cases}$$

Khi đó $\overline{x}$ liên tục trên $[-r,\infty)$.

Đặt $H : X_0 \to X_0$ với $Hx(t) = \int_0^t K\left(t,s,\overline{x}(s),\left(\overline{x}\right)_s\right)ds, \forall t \ge 0$.

Đặt $U,C : X_0 \to X_0$ xác định bởi

$$Ux(t) = \int_0^t g\left(s,\left(\overline{x}\right)_s\right)ds + \int_0^t V(s,x(s))ds + \int_0^t f(s)\,ds; Cx(t) = \int_0^t Hx(s)ds + \varphi(0).$$

Khi đó $x \in X_0$ là điểm bất động của $U + C$ nếu và chỉ nếu $\overline{x}$ là nghiệm của (I).

Vậy vấn đề trở thành chứng minh sự tồn tại điểm bất động của $U + C$.

Ta cần các bổ đề sau

Bổ đề 1. $g:[0,\infty)\times C_r \to E$ là ánh xạ liên tục và

$\forall n \in {}^*, \exists k_n = \sup_{t\in[0,n]} \|A(t)\| + \sup_{t\in[0,n]} \|L(t)\|$ thỏa

$$|g(t,x) - g(t,y)| \le k_n \|x - y\|, \quad \forall x,y \in C_r, \forall t \in [0,n].$$

Chứng minh bổ đề 1 .

Sử dụng giả thiết $t \mapsto A(t)$ liên tục và $t \mapsto L(t)$ liên tục ta có g liên tục.

$$\forall x,y \in C_r, \forall t \in [0,n] : |g(t,x) - g(t,y)| = \left|A(t)(x(0) - y(0)) + L(t)(x - y)\right|$$

$$\le \sup_{t\in[0,n]} \|A(t)\|.\|x - y\| + \sup_{t\in[0,n]} \|L(t)\|.\|x - y\| = k_n \|x - y\|.$$

Bổ đề 2. $\forall s \in [0,n], \forall x,y \in X_0$ ta có

$$\left\|\left(\overline{x}\right)_s - \left(\overline{y}\right)_s\right\| \le 2|x-y|_n, \left|\overline{x} - \overline{y}\right|_n \le 2|x-y|_n, \left|\overline{x}\right|_n \le 2|x|_n + \|\varphi\|, \left\|\left(\overline{x}\right)_s\right\| \le 2|x|_n + \|\varphi\|$$

Chứng minh bổ đề 2 .

Sử dụng định nghĩa ta có ngay bổ đề 2.

Bổ đề 3. $H : X_0 \to X_0$ là ánh xạ compact và $\lim\limits_{|x|_n \to \infty} \dfrac{|Hx|_n}{|x|_n} = 0$.

Chứng minh bổ đề 3 .

Ta chứng minh $H : X_0 \to X_0$ là ánh xạ liên tục.

Lấy $x_0 \in X_0$ và $(x_k)_k \subset X_0$ mà $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Khi đó $B = \{x_k : k = 0,1,2,...\}$ là tập compact trong X_0.

Đặt $G = \{\overline{y}(s) : y \in B, s \in [0,n]\}$ và $F = \{(\overline{y})_s : y \in B, s \in [0,n]\}$.

Khi đó G, F là các tập compact. Lấy $\varepsilon > 0$. Do K liên tục trên tập compact $[0,n]^2 \times G \times F$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x, y \in G; \forall u, v \in F$ mà $|x - y| < \delta, \|u - v\| < \delta$ thì $|K(t,s,x,u) - K(t,s,y,v)| < \dfrac{\varepsilon}{n}; \forall s,t \in [0,n]$.

Mà $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ trong X_0 nên tồn tại $k_0 \in {}^*$ sao cho $\forall k \ge k_0 : |x - y|_n < \dfrac{\delta}{2}$.

Vậy $\left|\overline{x_k}(s) - \overline{x_0}(s)\right| \le 2|x_k - x_0|_n < \delta; \left\|(\overline{x_k})_s - (\overline{x_0})_s\right\| \le 2|x_k - x_0|_n < \delta; \forall s \in [0,n]$.

Do đó $\forall t \in [0,n]; \forall k \ge k_0$:

$$|Hx_k(t) - Hx_0(t)| \le \int_0^t \left|K\left(t,s,\overline{x_k}(s),(\overline{x_k})_s\right) - K\left(t,s,\overline{x_0}(s),(\overline{x_0})_s\right)\right| ds < \frac{\varepsilon}{n}\int_0^t ds = \frac{\varepsilon t}{n} \le \varepsilon$$

Suy ra $|Hx_k - Hx_0|_n < \varepsilon, \forall k \ge k_0$. Vậy H liên tục trên X_0.

Lấy Ω là tập con bị chặn của X_0. Ta phải chứng tỏ rằng $\forall n \in {}^*$:

i) Tập hợp $A_n := \left\{(Hx)\big|_{[0,n]} : x \in \Omega\right\}$ đẳng liên tục trên X_n.

ii) Với mọi $t \in [0,n]$, tập hợp $A_n(t) := \{Hx(t) : x \in \Omega\}$ compact tương đối trong E.

Đặt $P_n = \{\overline{x}(s) : x \in \Omega, s \in [0,n]\}$ và $Q_n = \{(\overline{x})_s : x \in \Omega, s \in [0,n]\}$. Do Ω bị chặn nên P_n, Q_n bị chặn. Vì K là ánh xạ compact nên $K\left([0,n]^2 \times P_n \times Q_n\right)$ bị chặn.

Vậy tồn tại $M_n > 0$ sao cho $\left|K\left(t,s,\overline{x}(s),(\overline{x})_s\right)\right| \le M_n; \forall t,s \in [0,n], \forall x \in \Omega$.

Vì $K(t,.,.,.)$ liên tục đều theo t trên $[0,n]^2 \times P_n \times Q_n$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$\delta < \dfrac{\varepsilon}{4M_n}, \forall t_1, t_2 \in [0,n] : |t_1 - t_2| < \delta$ thì

$$\left| K\left(t_1, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) - K\left(t_2, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4n}; \quad \forall x \in \Omega, \forall s \in [0,n].$$

Vậy $\forall x \in \Omega, \forall t_1, t_2 \in [0,n], t_1 \le t_2 : |t_2 - t_1| < \delta$ ta có

$$|Hx(t_1) - Hx(t_2)| = \left| \int_0^{t_1} K\left(t_1, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) ds - \int_0^{t_2} K\left(t_2, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) ds \right|$$

$$\le \int_0^{t_1} \left| K\left(t_1, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) - K\left(t_2, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) \right| ds + \int_{t_1}^{t_2} \left| K\left(t_2, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) \right| ds$$

$\le \dfrac{\varepsilon}{4} + M_n \delta < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Do đó A_n đẳng liên tục trên X_n.

Đặt $I = \overline{co}\left[K\left([0,n]^2 \times P_n \times Q_n\right) \right]$. Do $K\left([0,n]^2 \times P_n \times Q_n\right)$ compact tương đối trong không gian Banach E nên I là tập compact. Mà $\forall t \in [0,n] : A_n(t) \subset t.I$.

Do đó $A_n(t)$ compact tương đối trong E với mọi $t \in [0,n]$.

Vậy theo định lý 2 ta có $H(\Omega)$ là tập compact tương đối trong X_0.

Ta có $\lim\limits_{|x|+\|u\| \to \infty} \dfrac{|K(t,s,x,u)|}{|x| + \|u\|} = 0$ đều theo (t,s) trên mỗi đoạn bị chặn tùy ý của $[0,\infty)^2$. Lấy $\varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in E, \forall u \in C_r$ mà $|x| + \|u\| > \beta$ thì

$$|K(t,s,x,u)| < \frac{\varepsilon}{16n}\left(|x| + \|u\|\right); \forall (t,s) \in [0,n]^2.$$

Do K compact nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\forall x \in E, \forall u \in C_r$ mà $|x| + \|u\| \le \beta$ thì

$$|K(t,s,x,u)| \le \rho, \quad \forall t,s \in [0,n].$$

Vậy $|K(t,s,x,u)| < \rho + \dfrac{\varepsilon}{16n}\left(|x| + \|u\|\right), \quad \forall t,s \in [0,n], \forall x \in E, \forall u \in C_r$.

Khi đó $\forall t \in [0,n]$ ta có

$$|Hx(t)| \le \int_0^t \left| K\left(t, s, \bar{x}(s), (\bar{x})_s\right) \right| ds \le \int_0^t \left[\rho + \frac{\varepsilon}{16n}\left(|\bar{x}(s)| + \left\|(\bar{x})_s\right\| \right) \right] ds.$$

Do đó $\left|Hx\right|_n \le n\rho + \dfrac{\varepsilon}{16}\left(4\left|x\right|_n + 2\left\|\varphi\right\|\right) = n\rho + \dfrac{\varepsilon}{4}\left|x\right|_n + \dfrac{\varepsilon}{8}\left\|\varphi\right\|$.

Vậy $\dfrac{\left|Hx\right|_n}{\left|x\right|_n} \le \dfrac{n\rho}{\left|x\right|_n} + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{8}\dfrac{\left\|\varphi\right\|}{\left|x\right|_n}$. Chọn $\mu_n > \max\left\{\dfrac{8n\rho}{\varepsilon}, \left\|\varphi\right\|\right\}$.

Khi $\left|x\right|_n > \mu_n$ thì $\dfrac{\left|Hx\right|_n}{\left|x\right|_n} \le \dfrac{\varepsilon}{8} + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{8} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{\left|x\right|_n \to \infty} \dfrac{\left|Hx\right|_n}{\left|x\right|_n} = 0; \forall n \in {}^{*}$.

Bổ đề 4. Xét $H : X_n \to X_n$ xác định bởi $Hx(t) = \int_0^t K\left(t, s, \bar{x}(s), \left(\bar{x}\right)_s\right) ds$.

Khi đó H là ánh xạ compact trên không gian Banach X_n.

Chứng minh bổ đề 4.

Tương tự chứng minh bổ đề 3.

Bổ đề 5. Ta có với mỗi $n \in {}^{*}$ và bất kỳ $z \in X_0$ ta đặt

$d_n = \max\left\{\omega(s) : s \in [0, n]\right\}$ và $c_n = 2k_n + d_n$. Khi đó ta có

$$\left|U_z^j(x) - U_z^j(y)\right|_n \le \frac{(n.c_n)^j}{j!}\left|x - y\right|_n; \forall j \in {}^{*}. \qquad (1)$$

Chứng minh bổ đề 5 .

Ta chứng minh rằng

$$\left|U_z^j(x)(t) - U_z^j(y)(t)\right| \le \frac{(t.c_n)^j}{j!}\left|x - y\right|_n; \forall t \in [0, n], \forall j \in {}^{*}. \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh (2) bằng quy nạp theo j.

Với $j = 1$. Vì $U_z(x)(t) = U(x)(t) + z(t) = \int_0^t g\left(s, \left(\bar{x}\right)_s\right) ds$

$+\int_0^t V(s, x(s)) ds + \int_0^t f(s) ds + z(t)$; $\forall t \ge 0$ nên $\forall t \in [0, n]$ ta có

$$\left|U_z(x)(t) - U_z(y)(t)\right| \le \int_0^t \left|g\left(s, \left(\bar{x}\right)_s\right) - g\left(s, \left(\bar{y}\right)_s\right)\right| ds + \int_0^t \left|V(s, x(s)) - V(s, y(s))\right| ds$$

$$\le k_n \int_0^t \left\|\left(\bar{x}\right)_s - \left(\bar{y}\right)_s\right\| ds + \int_0^t \omega(s)\left|x(s) - y(s)\right| ds$$

$$\le 2k_n|x-y|_n\int_0^t ds + d_n\int_0^t |x(s)-y(s)|ds \le 2k_n|x-y|_n\int_0^t ds + d_n|x-y|_n\int_0^t ds$$

$$\le n.c_n|x-y|_n .$$

Vậy (2) đúng với $j=1$.Giả sử (2) đúng với $j\ge 1$, ta có

$$\left|U_z^{j+1}(x)(t)-U_z^{j+1}(y)(t)\right|\le\int_0^t\left|g\left(s,\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s\right)-g\left(s,\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s\right)\right|ds$$

$$+\int_0^t\left|V\left(s,U_z^j(x)(s)\right)-V\left(s,U_z^j(y)(s)\right)\right|ds$$

$$\le k_n\int_0^t\left\|\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s-\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s\right\|ds+\int_0^t\omega(s)\left|U_z^j(x)(s)-U_z^j(y)(s)\right|ds$$

$$\le k_n\int_0^t\left\|\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s-\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s\right\|ds+d_n\int_0^t\left|U_z^j(x)(s)-U_z^j(y)(s)\right|ds \quad . \qquad (3)$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\left|U_z^j(x)(s)-U_z^j(y)(s)\right|\le\frac{(s.c_n)^j}{j!}|x-y|_n;\forall s\in[0,n],\forall j\in {}^*.$$

Với mỗi $s\in[0,n]$ và $\theta\in[-r,0]$ ta có

$$\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s(\theta)-\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s(\theta)$$

$$=\begin{cases}U_z^j(x)(s+\theta)-U_z^j(y)(s+\theta)-\left[U_z^j(x)(0)-U_z^j(y)(0)\right], & s+\theta\ge 0.\\ 0 & ,s+\theta\in[-r,0].\end{cases}$$

Với $s+\theta\ge 0$

$$\left|\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s(\theta)-\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s(\theta)\right|\le\left|U_z^j(x)(s+\theta)-U_z^j(y)(s+\theta)\right|+\left|U_z^j(x)(0)-U_z^j(y)(0)\right|$$

$$\le\frac{\left[(s+\theta).c_n\right]^j}{j!}|x-y|_n+\frac{\left[0.c_n\right]^j}{j!}|x-y|_n\le\frac{(s.c_n)^j}{j!}|x-y|_n .$$

(do giả thiết quy nạp và $0\le s+\theta\le s$)

Với $s+\theta<0$: $\left|\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s(\theta)-\left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s(\theta)\right|=0\le\frac{(s.c_n)^j}{j!}|x-y|_n .$

Vậy $\left\|\left(\overline{U_z^j(x)}\right)_s - \left(\overline{U_z^j(y)}\right)_s\right\| \le \dfrac{(s.c_n)^j}{j!}|x-y|_n;\quad \forall s\in[0,n]$. (4)

Kết hợp (3) và (4) ta có

$$\left|U_z^{j+1}(x)(t)-U_z^{j+1}(y)(t)\right| \le (k_n+d_n).\int_0^t \frac{(s.c_n)^j}{j!}|x-y|_n ds$$

$$=(k_n+d_n).(c_n)^j.|x-y|_n.\frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \le \frac{(t.c_n)^{j+1}}{(j+1)!}|x-y|_n .$$

Vậy $\left|U_z^{j+1}(x)(t)-U_z^{j+1}(y)(t)\right| \le \dfrac{(t.c_n)^{j+1}}{(j+1)!}|x-y|_n;\forall t\in[0,n]$.

Do đó (2) đúng với $j+1$. Vậy theo quy nạp ta có (2) thỏa.

Từ đó $\left|U_z^j(x)-U_z^j(y)\right|_n \le \dfrac{(n.c_n)^j}{j!}|x-y|_n;\forall j\in{}^*$.

- Ta trở lại chứng minh định lý 3

  Vì $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{(n.c_n)^j}{j!}=0$ nên tồn tại $j_n\in{}^*$ để $\dfrac{(n.c_n)^j}{j!}<1;\quad \forall j\ge j_n$.

Vậy từ (1) ta thấy U thỏa các điều kiện $i), ii), iii)$ của định lý 1.

Ta chứng minh C liên tục. Lấy $n\in{}^*$ và cố định n lại.

Lấy $x_0\in X_0$ và $(x_k)_k\subset X_0$ mà $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$.

Khi đó $B=\{x_k : k=0,1,2,...\}$ là tập compact trong X_0.

Vậy $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|x-y|_n<\delta$ thì $|Hx-Hy|_n<\dfrac{\varepsilon}{2n}$.

Do $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$ nên tồn tại $k_0\in{}^*$ sao cho $\forall k\ge k_0:|x_k-x_0|_n<\delta$.

Vậy $|Hx_k-Hx_0|_n<\dfrac{\varepsilon}{2n}$. Do đó $\forall t\in[0,n]$ ta có

$$|Cx_k(t)-Cx_0(t)|\le\int_0^t|Hx_k(s)-Hx_0(s)|ds\le|Hx_k-Hx_0|_n\int_0^t ds<\frac{\varepsilon t}{2n}\le\frac{\varepsilon}{2} .$$

Vậy $|Cx_k-Cx_0|_n\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Từ đó $\lim\limits_{k\to\infty}|Cx_k-Cx_0|_n=0,\forall n\in{}^*$. Vậy C liên tục.

Lấy Ω là tập bị chặn của X_0. Do H là ánh xạ compact nên $H(\Omega)$ bị chặn .

Vậy tồn tại $\alpha_n > 0 : |Hx|_n \le \alpha_n ; \forall x \in \Omega$.

Do đó $\forall t_1, t_2 \in [0,n], t_2 \ge t_1, \forall x \in \Omega$ ta có

$$|Cx(t_1) - Cx(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} Hx(s)ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2} |Hx(s)|ds \le |Hx|_n (t_2 - t_1) \le \alpha_n (t_2 - t_1).$$

Vậy $(C(\Omega))_n$ đẳng liên tục trên X_n.

Ta có $H(\Omega)$ là tập compact tương đối nên theo định lý 2 ta có tập hợp $\Sigma_n = \left\{x(s) : x \in (H(\Omega))_n, s \in [0,n]\right\}$ compact tương đối trong E.

Đặt $L = \overline{co}(\Sigma_n)$. Ta có L là tập compact trong E.

Ta có $\forall t \in [0,n] : (C(\Omega))_n (t) \subset t.L + \varphi(0)$.

Vì L là tập compact nên $t.L + \varphi(0)$ là tập compact $\forall t \in [0,n]$.

Do đó $(C(\Omega))_n (t)$ compact tương đối trong E với mọi $t \in [0,n]$.

Vậy theo định lý 2 ta có $C(\Omega)$ là tập compact tương đối trong X_0.

Do đó C là ánh xạ compact. Ta chứng minh $\lim\limits_{|x|_n \to \infty} \dfrac{|Cx|_n}{|x|_n} = 0 \quad \forall n \in {}^*$.

Ta có $\lim\limits_{|x|_n \to \infty} \dfrac{|Hx|_n}{|x|_n} = 0; \quad \forall n \in {}^*$.

Lấy $\varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in X_0$ mà $|x|_n > \beta$ thì $|Hx|_n < \dfrac{\varepsilon}{4n} |x|_n$.

Đặt $\Phi_n = \left\{x \in X_n : |x|_n \le \beta\right\}$. Khi đó Φ_n là tập bị chặn trên X_n.

Do H hoàn toàn liên tục trên X_n nên $H(\Phi_n)$ bị chặn trong X_n.

Do đó tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\forall x \in X_0$ mà $|x|_n \le \beta$ thì $|Hx|_n \le \rho$.

Vậy $|Hx|_n < \rho + \dfrac{\varepsilon}{4n} |x|_n, \quad \forall x \in X_0$. Khi đó $\forall t \in [0,n], \forall x \in X_0$ ta có

$$|Cx(t)| \le \int_0^t |Hx(s)|ds + |\varphi(0)| \le |Hx|_n \int_0^t ds + \|\varphi\| < \left(\rho + \frac{\varepsilon}{4n}|x|_n\right).n + \|\varphi\|.$$

Do đó $\left|Cx\right|_n \le n\rho + \dfrac{\varepsilon}{4}\left|x\right|_n + \left\|\varphi\right\|, \forall x \in X_0$.

Vậy $\dfrac{\left|Cx\right|_n}{\left|x\right|_n} \le \dfrac{n\rho}{\left|x\right|_n} + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\left\|\varphi\right\|}{\left|x\right|_n}$. Chọn $\mu_n > \max\left\{\dfrac{8n\rho}{\varepsilon}, \dfrac{8\left\|\varphi\right\|}{\varepsilon}\right\}$.

Khi đó nếu $\left|x\right|_n > \mu_n$ thì $\dfrac{\left|Cx\right|_n}{\left|x\right|_n} \le \dfrac{\varepsilon}{8} + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{8} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{\left|x\right|_n \to \infty} \dfrac{\left|Cx\right|_n}{\left|x\right|_n} = 0 \quad \forall n \in {}^{*}$.

Lấy $n \in {}^{*}$. Ta chứng minh với $W \subset X_0$ mà $\left|W\right|_n < \infty$ thì $\left|C(W)\right|_n < \infty$.

Ta có W bị chặn trong X_n. Khi đó $H(W_n)$ bị chặn trong X_n.

Vậy tồn tại $h_n > 0$ sao cho $\left|Hx\right|_n \le h_n, \forall x \in W$. Ta có $\forall x \in W, \forall t \in [0, n]$ thì

$$\left|C(x)(t)\right| \le \int_0^t \left|Hx(s)\right| ds + \left|\varphi(0)\right| \le \left|Hx\right|_n t + \left|\varphi(0)\right| \le n.h_n + \left|\varphi(0)\right|.$$

Vậy $\left|C(x)\right|_n \le n.h_n + \left|\varphi(0)\right|;\ \forall x \in W$. Do đó $\left|C(W)\right|_n < \infty$.

Do đó U, C thỏa các điều kiện của định lý 1 nên $U + C$ có điểm bất động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. L. H. Hoa and K.Schmitt (1994), "Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation", *Results in Mathematics*, vol.25, pp.291-313.
2. L. H. Hoa and K.Schmitt (1995), *Periodic solutions of functional differential equations of retarded and neutral types in Banach spaces*, Boundary Value Problems for Functional Differential Equations, pp.177-185.