NHỮNG CHƯỚNG NGẠI, KHÓ KHĂN TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM XÁC SUẤT

LÊ THỊ HOÀI CHÂU*

TÓM TẮT

Cùng với Thống kê, Xác suất là một trong những nội dung toán học có tác động hầu như đến mọi lĩnh vực của khoa học và cuộc sống. Thế nhưng, việc chiếm lĩnh khái niệm xác suất và sử dụng nó trong thực tế luôn phải đương đầu với nhiều khó khăn khác nhau. Bài báo này phân tích các khó khăn đó, chỉ rõ nguồn gốc của chúng, với mong muốn mang lại cho các nhà nghiên cứu và giáo viên một số yếu tố không thể không tính đến trong dạy học xác suất. Những khó khăn đó đến từ nhiều phía: từ chính đặc trưng khoa học luận của tri thức, từ quan niệm của giáo viên và từ quan niệm của học sinh. Kết quả trình bày trong bài báo cũng cho phép ta đặt ra một dấu hỏi về đào tạo giáo viên ở các trường sư phạm.

ABSTRACT

Difficulties and obstacles in teaching probability concepts

Together with Statistics, Probability is one of mathematic branches influencing virtually all areas of science and life. However, mastering probability concept and using it in reality is always a challenge in various difficult ways. This article analyzes those difficulties and traces their roots with the aim of making teachers and researchers aware of indispensable factors in teaching probability. Those difficulties come from various sources: characteristics of epistemology of knowledge, teachers' and students' viewpoints. The results in the article also raise a question about teacher training quality in training teachers' colleges.

Một số nghiên cứu ở nước ngoài đã cho thấy việc dạy học xác suất luôn phải đối diện với nhiều chướng ngại, khó khăn, dù ở bậc học nào, ở đất nước nào. Học sinh gặp những lập luận theo một kiểu lạ lẫm với kiểu họ biết từ trước, còn giáo viên thì bối rối vì phần này không "dễ chịu" như những phần khác của chương trình.

Các chướng ngại, khó khăn này có nhiều nguồn gốc. Chúng tôi sẽ chỉ rõ dưới đây những chướng ngại, khó khăn được rút ra từ một số nghiên cứu tri thức luận và thực tế dạy học mà khuôn khổ có hạn của bài báo không cho phép trình bày chi tiết.

Trước khi phân tích các khó khăn, chướng ngại mà việc dạy học xác suất phải đương đầu, chúng tôi sẽ trình bày một sự phân biệt hai khái niệm ***khó khăn*** và ***chướng ngại.***

Theo Từ điển tiếng Việt, *khó khăn là điều gây trở ngại cho một hoạt động nào đó*. Chẳng hạn, quan niệm xem "tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng có một điểm chung duy nhất với đường tròn đó" gây khó khăn cho việc hiểu khái niệm tiếp tuyến của đường cong theo nghĩa tổng quát hơn; hay việc phải tuân

* PGS TS, Khoa Toán - Tin học Trường Đại học Sư phạm TP HCM

thủ các ràng buộc về thời gian là một khó khăn trong dạy học những nội dung phức tạp.

Thuật ngữ *chướng ngại* được các nhà nghiên cứu didactic sử dụng theo một nghĩa hẹp hơn: không phải mọi khó khăn đều được xem là chướng ngại. Cụ thể, các đặc trưng của chướng ngại đã được Brousseau xác định rõ qua những điểm sau:

- Một chướng ngại là một kiến thức, một quan niệm chứ không phải là một sự thiếu kiến thức.
- Kiến thức, quan niệm này tạo ra những câu trả lời phù hợp trong một tình huống nào đó mà ta thường hay gặp.
- Nhưng khi vượt khỏi tình huống ấy thì nó sản sinh ra những câu trả lời sai. Để có câu trả lời đúng cho một (hay những) tình huống tổng quát hơn cần có sự thay đổi đáng kể trong kiến thức hay quan niệm. Nói cách khác, việc loại bỏ kiến thức, quan niệm ấy là cần thiết, là yếu tố cấu thành nên tri thức mới.
- Thế nhưng, kiến thức, quan niệm này lại cản trở sự thiết lập một kiến thức hoàn thiện hơn.
- Hơn thế, ngay cả khi chủ thể đã ý thức được sự không chính xác của kiến thức hay quan niệm ấy, nó vẫn tiếp tục xuất hiện dai dẳng trong những tình huống mới.

Các chướng ngại được Brousseau (1976) phân loại theo nguồn gốc của chúng. Chướng ngại sinh ra từ sự chuyển hóa sư phạm gọi là *chướng ngại sư phạm. Chướng ngại khoa học luận* là chướng ngại gắn liền với tri thức, và do đó mà việc dạy học không thể tránh khỏi, dù với cách chuyển hóa sư phạm nào.

Dưới đây chúng tôi sẽ phân tích những chướng ngại, khó khăn gặp phải trong dạy học xác suất ở bậc trung học.

1. Chướng ngại khoa học luận gắn liền với khái niệm *xác suất*

• Chướng ngại đầu tiên liên quan đến khái niệm *ngẫu nhiên.*

Làm việc với các đại lượng ngẫu nhiên không phải là đơn giản. Trước hết phải thừa nhận sự tồn tại của ngẫu nhiên. Thế nhưng, lịch sử toán học đã cho thấy sự tồn tại đó không phải là hiển nhiên đối với mọi người. Chẳng hạn, Poincare cho rằng:

> “Sự ngẫu nhiên thể hiện ở chỗ người ta không thể nói trước được điều gì trong các tình huống phụ thuộc rất nhiều vào những điều kiện “nhạy cảm” ban đầu, nghĩa là một thay đổi khó nhận thấy của một điều kiện ban đầu có thể gây nên sự khác nhau rất lớn trong tình trạng cuối.” (J-C. Girard, tr. 216)

Laplace cũng có cùng quan điểm: ngẫu nhiên “chỉ là hệ quả của việc không biết” về cái mà chúng ta quan sát, “ta phải xem xét tình trạng hiện tại của thế giới như là hệ quả của tình trạng trước đây của nó và là nguyên nhân của tình trạng tiếp theo”.

Người ta đã thăm dò ý kiến của một số sinh viên Pháp bằng câu hỏi:

> “Trong số ba câu sau, câu nào tương ứng với quan điểm của bạn ?
> - Ngẫu nhiên chỉ là hệ quả của sự không biết của chúng ta.
> - Ngẫu nhiên che đậy mệnh lệnh của thần thánh.

- Ngẫu nhiên đã tạo ra thế giới theo trật tự mà ta đang nhìn thấy."

Hơn nửa số sinh viên chọn câu thứ nhất. Lập luận chủ yếu của họ là *"mọi cái đều phải có nguyên nhân của nó"*. Non nửa chọn câu thứ ba. Những sinh viên này nghĩ rằng sự ngẫu nhiên thực sự là có tồn tại trong những cái gì đó và người ta sẽ không thể biết hoặc tính toán được mọi điều. Họ đã nhắc đến lý thuyết của Mendel, Darwin để minh họa cho ý kiến của mình. Chỉ có vài người "dũng cảm" chọn câu thứ hai (tham khảo J-C. Girard, tr. 216).

Các tình huống chứa tính ngẫu nhiên, bấp bênh hầu như rất ít xuất hiện ở bậc Tiểu học và Trung học cơ sở. Điều đó càng khiến cho học sinh khó chấp nhận sự ngẫu nhiên. Cũng vì thế mà một số nhà nghiên cứu cho là trước khi đề cập khái niệm Xác suất nên đưa vào vài hoạt động nhằm chỉ ra rằng có những cái không phải bao giờ cũng chắc chắn xảy ra và trong mọi hiện tượng – xã hội, vật lý học, sinh học, di truyền học, … đều tồn tại một sự biến đổi ngẫu nhiên.

- Chướng ngại thứ hai chính là bản thân khái niệm *xác suất.*

"Ở đây cũng thế, trước hết là phải thừa nhận sự tồn tại của nó (xác suất)." (J-C. Girard, tr. 216)

Mở đầu cho cuốn sách *Tính toán xác suất* của mình xuất bản năm 1908, Poincare vào chương thứ nhất với câu: *"Hầu như người ta không thể đưa ra một định nghĩa hoàn hảo cho xác suất"*. Tất nhiên là trước đó chưa có định nghĩa theo tiên đề của Kolmogorov (1933). Thế nhưng, ngay cả vào năm 1970, khi mà định nghĩa tiên đề đã được Kolmogorov đưa ra, Finetti vẫn viết (bằng chữ in) trong lời đề tựa cho cuốn sách về Lý thuyết xác suất của ông rằng "KHÔNG TỒN TẠI XÁC SUẤT".

Hiểu khái niệm xác suất không phải là dễ.

Phải chăng xác suất là một phần của những đối tượng vật chất cụ thể mà người ta có thể cầm nắm? Hiển nhiên là không. Đó là một khái niệm để giải thích cho điều "nhận thức" hay "tri giác" được. Ở đây Emile BOREL đã lưu ý rằng *"phải xem xác suất tương tự như số đo các đại lượng vật lý, nghĩa là không bao giờ có thể biết nó một cách chính xác mà chỉ với một sự xấp xỉ nào đó"*.

Như vậy, không thể nghĩ một cách đơn giản rằng khái niệm xác suất mà ta sẽ dạy cho học sinh không cần đi xa hơn cách tiếp cận của đại số tổ hợp, bao gồm việc liệt kê các cơ hội xuất hiện một biến cố ngay sau khi cho rằng các biến cố là đồng khả năng xảy ra. Và như thế thì càng không thể nghĩ là việc dạy học xác suất không có vấn đề gì.

2. Khó khăn của sự chuyển hóa sư phạm: thế không lối thoát

Trình bày khái niệm xác suất như thế nào cho học sinh phổ thông ? Dường như các nhà lập chương trình và tác giả viết sách giáo khoa chưa có được câu trả lời thỏa đáng. Chúng tôi nói đây là một *khó khăn* chứ không phải là *chướng ngại*, vì vấn đề nằm ở thế không lối thoát trong việc chọn cách đưa khái niệm *xác suất* vào trường phổ thông chứ không phải là một kiến thức hay quan niệm cản trở sự xây dựng kiến thức mới ở học sinh.

• Nhiều chương trình (chẳng hạn các chương trình bậc Trung học áp dụng từ năm 1991 ở Pháp) ưu tiên cách tiếp cận tần số.

Liệu điều đó có tự nhiên, có thỏa đáng không?

Trước hết, cách tiếp cận này chỉ áp dụng được cho những biến cố có thể lặp lại.

Mặt khác, làm thế nào để hiểu được nghĩa của "giới hạn" trong cách tiếp cận này: nó không phải là sự hội tụ thuần túy (của dãy số), nó có thể không phải là duy nhất theo nghĩa cổ điển mà học sinh đã biết trong Giải tích, và vẫn có thể xảy ra hiện tượng sau: với N_1, N_2, …, N_k (khá lớn) phép thử, người ta thấy tần suất dao động trong một lân cận bán kính ε cho trước của một giá trị p nào đó, nhưng khi thực hiện thêm một số phép thử nữa thì tần suất lại vượt ra khỏi lân cận này.

> ''Cuối cùng, định nghĩa ấy (nối liền giữa tần suất quan sát được với xác suất lý thuyết) dựa trên việc hiểu một cách trực giác về luật số lớn mà muốn chứng minh thì lại phải dùng định nghĩa của Laplace về xác suất. Một vòng tròn luẩn quẩn !'' ((J-C. Girard, tr. 216)

• Một định nghĩa khác dựa trên nguyên tắc đối xứng – đó là "hình học của sự ngẫu nhiên" – theo cách nói của Pascal. Với cách lập luận đối xứng thì tung một con súc sắc 6 mặt, mỗi mặt có xác suất xuất hiện là 1/6.

> "Nhưng, tiếc rằng một con xúc sắc hoàn toàn cân đối lại không tồn tại, cũng như không có con kiến dài 18 mét, không có những tam giác vuông thực sự. Mặt khác, làm sao để biết là có thể xem rằng con súc sắc hoàn toàn cân đối nếu như không thực hiện một số lớn lần tung và quan sát xem có phải là tần suất xuất hiện mỗi mặt đều xấp xỉ với 1/6 hay không ? Lại một vòng luẩn quẩn khác." (J-C. Girard, tr. 217)

Hai cách tiếp cận khái niệm xác suất nêu trên được gọi là *khách quan* theo nghĩa người ta giả định rằng tồn tại một xác suất gắn liền với phép thử ngẫu nhiên và hoàn toàn độc lập với người quan sát. Nhưng điều này không phải dễ dàng được mọi người chấp nhận.

• Đối với những người không thừa nhận sự tồn tại của xác suất khách quan thì có thể đưa ra một định nghĩa khác, gọi là xác suất chủ quan: xác suất của một biến cố là số đo sự chắc chắn mà ta có khi thực hiện phép thử. Định nghĩa này kéo xác suất lại gần với một ước lượng mà người ta có thể "đoán" trước khi thực hiện phép thử. Và như thế thì có thể xác định xác suất của một biến cố mà không nhất thiết phải chấp nhận việc lặp lại phép thử.

Chẳng hạn, trong Kinh tế học, người ta gán cho các biến số sơ cấp một xác suất tiên nghiệm rồi dùng các định lý cổ điển để tính xác suất của các biến cố khác, từ đó đưa ra quyết định trên những cơ sở được xem là ít bấp bênh.

> "Phương pháp này khiến ta liên tưởng tới định nghĩa của Emil Borel: "mục đích chính của tính toán xác suất là tìm xác suất của một biến cố phức tạp tùy theo xác suất của những hiện tượng đơn giản hơn mà ta giả định là đã biết".

Khó khăn nằm ở chỗ là gán số nào cho xác suất tiên nghiệm của các biến cố sơ cấp? Dựa vào đâu?" (J-C. Girard, tr. 218)

• Cách định nghĩa cuối cùng - bằng tiên đề - cho phép xác định một số quy tắc toán học gắn bó với nhau và không có mâu thuẫn.

"Lúc này thì chẳng cần biết xác suất là gì, cũng không cần biết nó có tồn tại hay không. Giống như người ta không có nhu cầu biết *điểm* là gì, có tồn tại hay không khi dựa vào đó để xây dựng hình học Eucilde; hay không cần biết có hay không một tam giác vuông thực sự khi chứng minh định lý Pythagore." (J-C. Girard, tr. 218)

Chỉ có vài ý tưởng trực giác ban đầu, còn lại là một lý thuyết toán học hình thức xây dựng theo logic của toán học. Cách trình bày này không phù hợp với học sinh phổ thông vì quá trừu tượng.

3. Chướng ngại gắn với quan niệm của học sinh

• Dễ dàng chấp nhận là biến cố trống $\varnothing$ thì có xác suất xảy ra bằng 0, nhưng làm sao để chấp nhận là một biến cố với xác suất bằng 0 lại có thể xuất hiện?

Một ví dụ cho hiện tượng này: nếu một biến ngẫu nhiên liên tục có thể lấy mọi giá trị thực, thì xác suất xuất hiện mỗi một trong các giá trị này bằng 0, thế nhưng vẫn có một trong các giá trị xuất hiện trong phép thử ngẫu nhiên !

• Quan niệm sai lầm thứ hai là người ta thường có khuynh hướng gán vô ý thức một giá trị khá lớn cho xác suất của một biến cố khi hệ quả (tích cực hoặc tiêu cực) của việc nó xuất hiện là khá quan trọng, chẳng hạn như xác suất trúng xổ số hay nguy cơ có tai nạn máy bay (trong khi theo kết quả điều tra thống kê thì đó lại là một trong những phương tiện vận tải an toàn nhất).

• Một quan niệm khác gắn liền với bản chất của sự ngẫu nhiên. Khi lặp lại cùng một phép thử ngẫu nhiên, người ta nghĩ rằng một biến cố đã gặp nhiều lần thì bây giờ sẽ tiếp tục xuất hiện, đồng thời cũng muốn làm sao để tạo ra những biến cố đã từ lâu không thấy. Hai quan niệm sai lầm này về luật số lớn hoàn toàn mâu thuẫn với nhau, nhưng cả hai vẫn được nghĩ đến trong cùng một tình huống. Chẳng hạn: khi đoán kết quả xổ số, nhiều người nghĩ là cần phải đưa vào những số đã từ lâu không trúng (vì chúng sẽ phải xuất hiện), đồng thời cả những số thường trúng trước đó.

• Còn có quan niệm sai lầm khác cho rằng mỗi biến cố luôn luôn có 1/2 cơ hội xảy ra. Học sinh thường nói: "bao giờ cũng có hai trường hợp có thể: biến cố sẽ xảy ra hoặc không xảy ra". Không ít người đã đưa ra con số 1/2 khi được hỏi "xác suất ngày mai trời nắng là bao nhiêu" với lập luận rằng chỉ có thể là nắng hay không nắng.

4. Khó khăn gắn với quan niệm của giáo viên

Nói chung là trước đây, trong trường đại học, giáo viên đã được đào tạo về xác suất theo quan điểm tiên đề, một cách tiếp cận khác xa với những gì mà họ cần dạy cho học sinh phổ thông. Họ cho rằng phần này của chương trình phổ thông chỉ đòi hỏi kiến thức về bốn phép toán và khái niệm phần trăm – nếu cách tiếp cận xác suất theo tần suất được ưu tiên, hay chỉ khai thác các kiến thức của đại số tổ hợp – nếu định nghĩa cổ điển của xác suất giữ vị trí trung tâm trong dạy học.

> "Một số giáo viên cho rằng không thể dạy xác suất một cách thực sự ở trường phổ thông, vì học sinh chưa học "Lý thuyết độ đo". Người ta đã không tự hỏi liệu có thể dạy chứng minh hình học trước logic hình thức không, có thể dạy cộng số nguyên trước khi biết các tiên đề của Piano không, có thể tính chu vi của đường tròn trước khi chứng minh tính siêu việt của số π không? Những ví dụ kiểu này thì vô số.
>
> Hơn nữa, giáo viên cũng gặp khó khăn trong việc tìm những ví dụ "cụ thể" và có nguy cơ bị mất thể diện trước học sinh khi họ liên hệ với những môn học khác mà họ không nắm vững như toán học." (J-C. Girard, tr. 221)

Chính quan niệm ấy của giáo viên và khó khăn trong việc tìm những ví dụ cụ thể đang cản trở việc dạy học xác suất theo đúng bản chất của nó. Một số giáo viên nghĩ rằng lợi ích của phần xác suất này rất khó chỉ ra. Ấy thế mà, theo J-C. Girard, khả năng lập luận theo tư duy thống kê và xác suất lại là một trong những biểu hiện của năng lực trí tuệ. Thật là sai lầm khi học sinh không được đào tạo về khả năng này.

5. Khó khăn gắn với vấn đề mô hình hóa thực tế

Xác suất - Thống kê là một trong những phần hiếm hoi của toán học trong đó người ta quan tâm nhiều đến thực tế. Trong dạy học, để học sinh hiểu được nghĩa của các khái niệm toán học thì cần phải tìm một mô hình thực tế trước khi đi vào mô hình toán học.

> " Cần phải tìm một mô hình tốt nhất để áp dụng vào thực tế, nói cách khác là tìm một mô hình cho phép ta nhận thức thực tế trước khi đi vào áp dụng toán học. Thế nhưng người ta lại không bao giờ chắc rằng một mô hình nào đó là thích đáng hay không. Mỗi lý thuyết chỉ áp dụng được trong một phạm vi xác định (vì thế mà mới có việc sáng tạo ra các Hình học khác nhau hay Logic mờ) và một lý thuyết vẫn được xem là tốt cho đến tận khi người ta tìm thấy điểm yếu của nó." (J-C. Girard, tr. 222)

Chẳng hạn, ta sẽ gặp vấn đề này khi cần phải làm cho học sinh hiểu mô hình gắn với thực nghiệm tung hai con súc sắc và nghiên cứu tổng số chấm xuất hiện. Một số học sinh nghĩ là các kết quả *6 + 5* và *5 + 6* phải được xem là khác nhau, số khác thì lại đồng nhất chúng. Sự mập mờ ở đây lớn đến nỗi học sinh có thể nghĩ đến là có nhiều thực tế, tùy theo chỗ hai con súc sắc cùng màu hay khác màu, thế nhưng điều đó có làm thay đổi tổng số chấm đâu. Nguyên nhân là người ta nghĩ rằng mình đang làm việc trên thực tế, nhưng thực ra thì lại đã ở trong một mô hình. Nhiều mô hình có thể gắn với thực tế, nhưng chỉ có một thực tế thôi. Như thế, ta không chỉ làm việc với xác suất mà còn với vấn đề mô hình hóa.

Để kết luận, chúng tôi nhắc lại câu hỏi của J-C. Girard: nếu ta gặp nhiều khó khăn đến thế trong dạy học xác suất, phải chăng là vì rất khó lĩnh hội khái niệm *ngẫu nhiên?* Phải chăng ta đang có khuynh hướng đánh giá thấp những khó khăn liên quan đến quan niệm về sự ngẫu nhiên và xác suất? Đó là một sai lầm. Những chướng ngại, khó khăn của việc chiếm lĩnh khái niệm xác suất cần phải được tính đến khi thiết kế các tình huống dạy học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Thị Hoài Châu (2010), *Dạy học Xác suất - Thống kê ở trường phổ thông,* Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ, Đại học Sư phạm TP HCM.
2. GIRARD Jean-Claude (1997), « Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités », *Enseigner les probabilités au lycée,* Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
3. GUY Brousseau (1976), « Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques », In: (1983) *Recherches en didactique des mathématiques,* n°4(2), pp. 164-198.
4. HENRY Michel (1994), *L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré, perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*, Editions IREM de Besançon.
5. PARZYSZ Bernard (2003), « L'enseignement des probabilités et de la statistique en France: évolution au cours d'une carrièe d'enseignant (période 1965-2002).» *Probabilité au lycée*, Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités, Brochure APMEP n°143.
6. PICHARD Jean-François, « La théorie des probabilités au tournant du XVII^{e} siècle et Frise historique sur la probabilité et la statistique », *Probabilité au lycée*, Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités, Brochure APMEP n°143.