BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH SÓNG KIRCHHOFF PHI TUYẾN TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG

LÊ THỊ PHƯƠNG NGỌC *, NGUYỄN TUẤN DUY **

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bằng một thuật giải lặp cấp hai, chúng tôi thiết lập nghiệm yếu duy nhất của một bài toán Dirichlet cho phương trình sóng Kirchhoff phi tuyến trong không gian Sobolev có trọng. Hơn nữa, đánh giá tốc độ hội tụ cấp hai của thuật giải cũng được cho. Kết quả thu được ở đây tương đối tổng quát hơn các kết quả tương ứng trong [2, 11, 14, 20].

ABSTRACT

On a Dirichlet problem for a nonlinear Kirchhoff wave equation in the Sobolev spaces with weight

In this paper, a second-order iterative scheme is established in order to get a unique weak solution of a Dirichlet problem for a nonlinear Kirchhoff wave equation in the Sobolev spaces with weight. What's more, the evaluation of the second-order convergent speed of the scheme is given. This result is more relatively generalized than the corresponding results in [2, 11, 14, 20].

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán sau:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - B(\|u_r\|_0^2)(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,u),\ 0<r<1,\ 0<t<T, \\ |\lim\limits_{r\to 0_+}\sqrt{r}\,u_r(r,t)| < +\infty,\ u(1,t)=0, \\ u(r,0) = \tilde{u}_0(r),\ u_t(r,0) = \tilde{u}_1(r), \end{cases}$$

trong đó các hàm số $B, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là cho trước. Trong phương trình $(1.1)_1$, số hạng Kirchhoff $B(\|u_r\|_0^2)$ phụ thuộc vào tích phân $\|u_r\|_0^2 = \int_0^1 r u^2{}_r(r,t)dr$. Liên quan đến bài toán (1.1) là bài toán sau đây mà nhiều công trình nghiên cứu đã đề cập, chẳng hạn trong [4 – 6, 9, 10, 12 – 20]:

---
* TS, Khoa Giáo dục Tiểu học, Trường Cao đẳng Sư phạm Nha Trang
** CN, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tài chính – Marketing

$$(1.2)\qquad \begin{cases} v_{tt} - B_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v = f_1(x,v), & (x,t)\in\Omega_1\times(0,T),\\ v=0, & (x,t)\in\partial\Omega_1\times(0,T),\\ v(x,0)=\tilde{v}_0(x),\ v_t(x,0)=\tilde{v}_1(x), & x\in\Omega_1, \end{cases}$$

ở đây $\|\nabla v\|^2 = \int_{\Omega_1} |\nabla v(x,t)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_1} v_{x_i}^2(x,t)dx,$ Ω_1 là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên $\partial\Omega_1$ đủ trơn và ν là véctơ pháp tuyến đơn vị trên biên $\partial\Omega_1$, hướng ra phía ngoài.

Với $N=1$ và $\Omega_1=(0,L)$, phương trình $(1.2)_1$ xuất phát từ bài toán mô tả dao động phi tuyến của một dây đàn hồi [6].

$$\rho h v_{tt} - \left(P_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial v}{\partial y}(y,t)\right|^2 dy\right) v_{xx} = 0,\ 0<x<L,\ 0<t<T,$$

ở đây v là độ võng, x là biến không gian, t là biến thời gian, ρ là khối lượng riêng, h là thiết diện, L là chiều dài sợi dây ở lúc ban đầu, E là môđun Young và P_0 là lực căng lúc ban đầu.

Trong [3], Carrier cũng đã thiết lập một bài toán có dạng

$$v_{tt} - \left(P_0 + P_1\int_0^L v^2(y,t)dy\right)v_{xx} = 0,$$

trong đó P_0 và P_1 là các hằng số.

Trường hợp Ω_1 là quả cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^N$ và các hàm $v, f, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ phụ thuộc vào x thông qua r với $r=|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$, ta đặt:

$$v(x,t)=u(|x|,t),\ \ f_1(x,t)=f(|x|,t),\ \ \tilde{v}_0(x)=\tilde{u}_0(|x|),\ \ \tilde{v}_1(x)=\tilde{u}_1(|x|),$$

thì

$$-B_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v = -B\left(\int_0^1 u_r^2(r,t)r^\gamma dr\right)\left(u_{rr}+\frac{\gamma}{r}u_r\right),\ \ \gamma=N-1,$$

ở đây $B(\eta)=B_1(\omega_N\eta)$ với ω_N diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^N$. Khi đó (1.2) viết lại như sau

$$(1.3)\qquad \begin{cases} u_{tt} - B\left(\int_0^1 u_r^2(r,t)r^\gamma dr\right)\left(u_{rr}+\frac{\gamma}{r}u_r\right) = f(r,u),\ 0<r<1,\ 0<t<T,\\ u(1,t)=0,\quad 0<t<T,\\ u(r,0)=\tilde{u}_0(r),\quad u_t(r,0)=\tilde{u}_1(r),\quad 0<r<1. \end{cases}$$

Với $N=2$, $(1.1)_1$ là phương trình sóng phi tuyến hai chiều mô tả dao động của màng đơn vị $\Omega_1=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$. Trong quá trình dao động, bề mặt của màng

Ω_1 và sức căng tại các điểm khác nhau trên đó thay đổi theo thời gian. Điều kiện trên biên $(1.1)_2$ tại $r=1$ mô tả đường biên của màng tròn (chu vi của Ω_1) được giữ cố định. Điều kiện biên $(1.1)_2$ tại $r=0$ hiển nhiên sẽ được thoả mãn nếu u là một nghiệm cổ điển của bài toán (1.1), chẳng hạn như $u \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T]) \cap C^2(\Omega\times(0,T))$. Điều kiện này thường được sử dụng trong sự liên hệ với các không gian Sobolev có trọng r [2, 8, 11, 14].

Trường hợp phương trình $(1.3)_1$ không chứa số hạng $(\gamma/r)u_r$ $(\gamma=0)$, thì $(1.3)_1$ có dạng

$$(1.4) \qquad u_{tt} - B\left(\int_0^1 u_r^2(r,t)dr\right)u_{rr} = f(r,u).$$

Khi $f=0$, bài toán Cauchy hay bài toán hỗn hợp (1.4) đã được nhiều tác giả nghiên cứu; xem [4, 5] và các tài liệu tham khảo được nêu trong đó. Tổng quan các kết quả thuộc về lĩnh vực Toán học của mô hình Kirchhoff có thể được tìm thấy trong các tài liệu [17, 18]. Mederios [16] cũng đã nghiên cứu bài toán (1.1) trên một tập mở và bị chặn Ω của $\mathbb{R}^3$, với $f=f(u)=-bu^2$, $b>0$ là hằng số cho trước. Hosoya và Yamada [5] đã nghiên cứu bài toán (1.4) – $(1.3)_{3,4}$ với $f=f(u)=-\delta|u|^\alpha u$, trong đó $\delta>0, \alpha\geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong [9, 10], các tác giả cũng đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình

$$(1.5) \qquad u_{tt} + \lambda\Delta^2 u - B(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \varepsilon|u_t|^{\alpha-1}u_t = F(x,t),\ x\in\Omega,\ t>0,$$

ở đây $\lambda>0$, $\varepsilon>0$, $0<\alpha<1$, Ω là một tập mở và bị chặn của $\mathbb{R}^3$.

Trường hợp có thành phần $(1/r)u_r$ xuất hiện trong phương trình $(1.1)_1$ ta phải khử bỏ hệ số $1/r$ bằng cách sử dụng các không gian Sobolev có trọng thích hợp [2, 8, 11, 14].

Trong bài báo này, bài toán (1.1) được liên kết với thuật giải xác định bởi một dãy quy nạp $\{u_m\}$ như sau

$$(1.6) \qquad \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - B(\|\nabla u_m\|_0^2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) = f(r,u_{m-1}) + (u_m - u_{m-1})D_u f(r,u_{m-1}),$$

$0<r<1,\ 0<t<T$, với u_m thoả $(1.1)_{2,3,4}$ và số hạng đầu tiên được chọn là $u_0=0$. Với $f\in C^2([0,1]\times\mathbb{R})$ và $B\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $b_0\leq B(z)\leq \bar{d}_0(1+z^p)$, $|B'(z)|\leq \bar{d}_1(1+z^{p-1})$, $\forall z\geq 0$, trong đó $b_0>0$, $p>1$, $\bar{d}_0, \bar{d}_1>0$ là các hằng số cho trước, cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi chứng minh rằng bài toán (1.1) có duy nhất một nghiệm yếu và dãy lặp $\{u_m\}$ hội tụ bậc hai về nghiệm yếu này. Kết quả thu được ở đây tương đối tổng quát hơn các kết quả tương ứng trong [2, 11, 14, 21].

2. Các không gian hàm và kết quả chuẩn bị

Đặt $\Omega = (0,1).$ Ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng $C^m(\overline{\Omega}),$ $L^p(\Omega),$ $H^m(\Omega)$ và $W^{m,p}(\Omega)$ (xem [1]). Với mỗi hàm $v \in C^0(\overline{\Omega}),$ ta định nghĩa $\| v \|_0 = \left(\int_0^1 ru^2(r,t)dr\right)^{1/2}$ và V_0 là đầy đủ hoá của không gian $C^0(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\| \cdot \|_0$.

Tương tự, với mỗi hàm $v \in C^1(\overline{\Omega}),$ ta định nghĩa $\| v \|_1 = \left(\| v \|_0^2 + \| v_r \|_0^2\right)^{1/2}$ và V_1 là đầy đủ hoá của $C^1(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\| \cdot \|_1$. Ta chú ý rằng các chuẩn $\| \cdot \|_0$ và $\| \cdot \|_1$ có thể được định nghĩa lần lượt từ các tích vô hướng $\langle u,v \rangle = \int_0^1 ru(r)v(r)dr$ và $\langle u,v \rangle + \langle u',v' \rangle.$ Dễ dàng chứng minh được rằng V_0 và V_1 là các không gian Hilbert với các tích vô hướng tương ứng như trên. Mặt khác, V_1 được nhúng liên tục và nằm trù mật trong V_0. Đồng nhất V_0 với V_0' (đối ngẫu của V_0), ta có $V_1 \hookrightarrow V_0 \equiv V_0' \hookrightarrow V_1'.$ Ta cũng dùng ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ để chỉ cặp tích đối ngẫu giữa V_1 và $V_1'.$
Ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 2.1 ([2])

Tồn tại hai hằng số dương K_1 và K_2 sao cho với mọi $v \in C^1(\overline{\Omega}),$ ta có:

(i) $\| v_r \|_0^2 + v^2(1) \geq \| v \|_0^2,$

(ii) $| v(1) | \leq K_1 \| v \|_1,$

(iii) $\sqrt{r} v(r) \leq K_2 \| v \|_1, \ \forall r \in \overline{\Omega}.$

Đặt $\tilde{V}_1 = \{v \in V_1 : v(1) = 0\},$ khi đó ta chứng minh không khó khăn rằng $\tilde{V}_1$ là không gian con đóng của V_1 nên cũng là một không gian Hilbert đối với cùng một tích vô hướng trên V_1. Mặt khác, ta cũng có:

Bổ đề 2.2

(i) Phép nhúng $\tilde{V}_1 \hookrightarrow V_0$ là compact.

(ii) Trên $\tilde{V}_1$, hai chuẩn $v \mapsto \| v_r \|_0; v \mapsto \| v \|_1$ là hai chuẩn tương đương.

Chứng minh bổ đề 2.2 được suy từ bổ đề 2.1, (i). Từ đoạn này trở đi ta sẽ sử dụng chuẩn trên $\tilde{V}_1$ là $v \mapsto \| v_r \|_0$.

Định nghĩa toán tử $a(\cdot,\cdot)$ như sau:

(2.1) $$a(u,v) = \int_0^1 ru_r(r)v_r(r)dr, \ u,v \in \tilde{V}_1.$$

Khi đó ta có các bổ đề.

Bổ đề 2.3

Dạng song tuyến tính đối xứng $a(\cdot,\cdot)$ *xác định bởi* (2.1) *là liên tục trên* $\tilde{V}_1 \times \tilde{V}_1$ *và cưỡng bức trên* $\tilde{V}_1$, *nghĩa là:*

(*i*) $|a(u,v)| \leq \|u_r\|_0 \|v_r\|_0$,

(*ii*) $|a(v,v)| \geq \|v_r\|_0^2$,

với mọi $u, v \in \tilde{V}_1$.

Từ Bổ đề 2.3, ta có duy nhất một toán tử tuyến tính liên tục $A : \tilde{V}_1 \to (\tilde{V}_1)'$ sao cho

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \quad \forall u, v \in \tilde{V}_1.$$

Hơn nữa $Au \equiv \frac{-1}{r}(ru_r)_r$ trong $(\tilde{V}_1)'$ và ngoài ra ta còn có bổ đề sau đây nói lên sự tồn tại các hàm riêng của toán tử A tạo thành một cơ sở của V_0 và $\tilde{V}_1$:

Bổ đề 2.4

Tồn tại một cơ sở trực chuẩn Hilbert $\{\tilde{w}_j\}$ *của* V_0 *gồm các hàm riêng* $\tilde{w}_j$ *tương ứng với các giá trị riêng* λ_j sao cho

(*i*) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_j \uparrow +\infty$ *khi* $j \to +\infty$,

(*ii*) $a(\tilde{w}_j, v) = \lambda_j \langle \tilde{w}_j, v\rangle,\ \forall v \in \tilde{V}_1,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Hơn nữa, hệ $\{\tilde{w}_j / \sqrt{\lambda_j}\}$ *cũng là cơ sở trực chuẩn Hilbert của* $\tilde{V}_1$ *tương ứng với tích vô hướng* $a(\cdot,\cdot)$. *Mặt khác hàm* $\tilde{w}_j$ *cũng thỏa mãn bài toán giá trị biên:*

$$\begin{cases} A\tilde{w}_j \equiv -\frac{1}{r}(r\tilde{w}_{jr})_r = \lambda_j \tilde{w}_j, \ \textit{trong } \Omega, \\ |\lim\limits_{r\to 0_+} \sqrt{r}\,\tilde{w}_{jr}(r)| < +\infty, \qquad \tilde{w}_j(1) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh của bổ đề 2.4 có thể tìm thấy trong [22: trang 87, định lý 7.7].

Tiếp theo, với mỗi $v \in C_0^2(\overline{\Omega}) = \{v \in C^2(\overline{\Omega}) : v(1) = 0\}$, ta định nghĩa:

(2.2) $$\|v\|_2 = (\|v_r\|_0^2 + \|Av\|_0^2)^{1/2}$$

và định nghĩa V_2 là đầy đủ hóa của không gian $C_0^2(\overline{\Omega})$ đối với chuẩn $\|\cdot\|_2$. Chú ý rằng V_2 cũng là không gian Hilbert đối với tích vô hướng:

(2.3) $$\langle u_r, v_r\rangle + \langle Au, Av\rangle.$$

Mặt khác ta cũng có thể định nghĩa V_2 như là $V_2 = \{v \in \tilde{V}_1 : Av \in V_0\}$.

Liên quan giữa các không gian V_0, $\tilde{V}_1$ và V_2 ta có các bổ đề sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong [2].

Bổ đề 2.5

Các phép nhúng $V_2 \hookrightarrow \tilde{V}_1 \hookrightarrow V_0$ *là compact.*

Bổ đề 2.6

Với mọi $v \in V_2$,

(*i*) $\| v_r \|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Av \|_0$,

(*ii*) $\| v_{rr} \|_0 \le \sqrt{\frac{3}{2}} \| Av \|_0$,

(*iii*) $\| v \|^2_{L^\infty(\Omega)} \le \left(2 \| v \|_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \| Av \|_0\right) \| v \|_0$.

Bổ đề 2.7

Với mọi $u \in \tilde{V}_1$ *và* $v \in V_0$, *ta có:*

$$\langle u^2, |v| \rangle \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_r \|_0^2 \| v \|_0 .$$

Với một không gian Banach X, ta sẽ ký hiệu chuẩn trên X là $\| \cdot \|_X$ và X' là đối ngẫu của X. Ký hiệu $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$, là không gian Banach gồm tất cả các hàm đo được $u:(0,T) \to X$, sao cho

$$\| u \|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \| u(t) \|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

$$\| u \|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \| u(t) \|_X, \quad \text{với } p = \infty.$$

Ta ký hiệu $u(t)$, $\dot{u}(t) = u'(t) = u_t(t)$, $\ddot{u}(t) = u''(t) = u_{tt}(t)$, $u_r(t)$, $u_{rr}(t)$ để lần lượt chỉ $u(r,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t)$, $\frac{\partial u}{\partial r}(r,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t)$.

Trong các mục sau chúng tôi sẽ xét bài toán giá trị biên và ban đầu (1.1) với các giả thiết sau

(H_1) $\tilde{u}_0 \in V_2$, $\tilde{u}_1 \in \tilde{V}_1$,

(H_2) $B \in C^1(\mathbb{R}_+)$, sao cho các hằng số $b_0 > 0$, $p > 1$, và $\bar{d}_0$, $\bar{d}_1 > 0$ thỏa

(*i*) $b_0 \le B(z) \le \bar{d}_0 (1 + z^p)$, $\forall z \ge 0$,

(*ii*) $|B'(z)| \le \bar{d}_1 (1 + z^{p-1})$, $\forall z \ge 0$,

(H_3) $f \in C^2([0,1] \times \mathbb{R})$ sao cho $f(1,0) = 0$.

Cho trước $M > 0$ và với f thoả giả thiết (H_3) ta đặt

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \bar{K}_0 = \bar{K}_0(M, f) = \sup\limits_{(r,u)\in \bar{A}} |f(r,u)|, \\ \bar{K}_1 = \bar{K}_1(M, f) = \sum\limits_{\gamma_1+\gamma_2\le 2} \bar{K}_0\left(M, D_r^{\gamma_1} D_u^{\gamma_2} f\right), \end{cases}$$

ở đây $\bar{A} = \bar{A}(M) = \{(r,u) : 0 \le r \le 1, |u| \le M\sqrt{2+1/\sqrt{2}}\ \}$, $D_r^{\gamma_1} D_u^{\gamma_2} f = \dfrac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2} f}{\partial r^{\gamma_1}\partial u^{\gamma_2}}$.

Cho trước $M > 0$ và $T > 0$, ta đặt

$$W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;V_2) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;\tilde{V}_1),\ \ddot{v} \in L^2(0,T;V_0),$$
$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V_2)} \le M,\ \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)} \le M,\ \|\ddot{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} \le M\},$$

$$W_1(M,T) = \{v \in W(M,T) : \ddot{v} \in L^\infty(0,T;V_0)\}.$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1), trước hết ta xây dựng một dãy $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$, với các hằng số $M > 0$, $T > 0$ thích hợp sẽ được chọn sau, bằng phương pháp quy nạp. Dãy quy nạp này sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (1.1).

3. *Sự hội tụ cấp hai*

Xét dãy quy nạp (phi tuyến) $\{u_m\}$ được xây dựng bởi thuật giải sau:

Cho trước $u_0 \equiv 0$ và giả sử rằng

$$(3.1)\qquad u_{m-1} \in W_1(M,T).$$

Ta liên kết bài toán (1.1) với bài toán biến phân: Tìm $u_m \in W_1(M,T)$ $(m \ge 1)$ sao cho

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v\rangle + B(\|\nabla u_m(t)\|_0^2)\, a(u_m(t), v) = \langle f(r, u_{m-1}), v\rangle \\ \qquad\qquad + \langle (u_m - u_{m-1}) D_u f(r, u_{m-1}), v\rangle,\ \forall v \in \tilde{V}_1, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0,\ \ \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1. \end{cases}$$

Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 3.1

Giả sử $(H_1) - (H_3)$ *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M > 0$, $T > 0$ *sao cho với* $u_0 \equiv 0$, *tồn tại một dãy quy nạp* $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ *xác định bởi* (3.1), (3.2).

Chú thích 1:

Trong [2] thuật giải (3.2) đã được xét với $B \equiv 1$, $f = f(u)$.

Chứng minh định lý 3.1: Chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin được giới thiệu bởi Lions [7], và tiến hành qua nhiều bước dưới đây.

Bước 1: *Xấp xỉ Galerkin.*

Xét cơ sở trực chuẩn $\{w_j\}$, với $w_j = \tilde{w}_j / \sqrt{\lambda_j}$ như trong bổ đề 2.4. Đặt

$$u_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{mj}^{(k)}(t) w_j, \tag{3.3}$$

trong đó $c_{mj}^{(k)}(t)$ thỏa mãn hệ phương trình vi phân thường sau

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle + b_m^{(k)}(t) a(u_m^{(k)}(t), w_j) = \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle, 1 \le j \le k, \\ u_m^{(k)}(0) = \tilde{u}_{0k}, \ \dot{u}_m^{(k)}(0) = \tilde{u}_{1k}, \end{cases} \tag{3.4}$$

ở đây

$$\begin{cases} b_m^{(k)}(t) = B(\| \nabla u_m^{(k)}(t) \|_0^2) = B\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, | c_{mj}^{(k)}(t) |^2 \right), \\ F_m^{(k)}(r,t) = f(r, u_{m-1}) + (u_m^{(k)} - u_{m-1}) D_u f(r, u_{m-1}), \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\tilde{u}_{0k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} w_j \to \tilde{u}_0, \ \text{ trong } V_2 \text{ mạnh}, \tag{3.6}$$

$$\tilde{u}_{1k} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} w_j \to \tilde{u}_1, \ \text{ trong } \tilde{V}_1 \text{ mạnh}. \tag{3.7}$$

Với giả sử u_{m-1} thoả (3.1), bổ đề sau đây cho ta sự tồn tại nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ của hệ (3.4).

Bổ đề 3.2

Giả sử $(H_1)-(H_3)$ *đúng. Khi đó với các hằng số* $M>0, T>0$ *cố định, hệ phương trình* (3.4) – (3.5) *có duy nhất một nghiệm* $u_m^{(k)}(t)$ *trên đoạn* $[0, T_m^k] \subset [0, T]$.

Chứng minh bổ đề 3.2: Hệ (3.4) – (3.7) được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \ddot{c}_{mj}^{(k)}(t) = -\lambda_j b_m^{(k)}(t) c_{mj}^{(k)}(t) + \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle, 1 \le j \le k, \\ c_{mj}^{(k)}(0) = \alpha_j^{(k)}(0), \ \dot{c}_{mj}^{(k)}(0) = \beta_j^{(k)}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Hệ phương trình này tương đương với hệ phương trình tích phân có dạng

$$c_m^{(k)} = H[c_m^{(k)}], \tag{3.9}$$

ở đây

$$\begin{cases} H[c_m^{(k)}] = \left(H_1[c_m^{(k)}], \ldots, H_k[c_m^{(k)}] \right), \quad c_m^{(k)} = \left(c_{m1}^{(k)}, \ldots, c_{mk}^{(k)} \right), \\ H_j[c_m^{(k)}](t) = q_j(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^{k} \langle D_u f(r, u_{m-1}) w_i, w_j \rangle c_{mi}^{(k)}(s) ds \\ \qquad - \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau B\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, | c_{mi}^{(k)}(s) |^2 \right) c_{mj}^{(k)}(s) ds, \\ q_j(t) = \alpha_j^{(k)} + \beta_j^{(k)} t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle f(r, u_{m-1}) - u_{m-1} D_u f(r, u_{m-1}), w_j \rangle ds, \ 1 \le j \le k. \end{cases} \tag{3.10}$$

Với mỗi $T_m^{(k)} \in (0,T]$ và $\rho > 0$ (sẽ được chọn sau), ta đặt $Y = C^0([0,T_m^{(k)}];\mathbb{R}^k)$, $S = \{c \in Y : \|c\|_Y \le \rho\}$, ở đây $\|c\|_Y = \sup_{0\le t\le T_m^{(k)}} \sum_{j=1}^k |c_j(t)|$, với mọi $c = (c_1,...,c_k) \in Y.$

Rõ ràng S là tập con đóng khác rỗng của Y và ta có toán tử $H : Y \to Y.$ Chọn $\rho > \sup_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^k |q_i(t)| \equiv \|q\|_T$ và sau đó chọn $T_m^{(k)} \in (0,T]$ sao cho

$$0 < T_m^{(k)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho \bar{D}_\rho}(\rho - \|q\|_T)},$$ trong đó $\bar{D}_\rho = \bar{D}_\rho(\rho,k,M,m) = k\bar{K}_1 + \lambda_k \bar{d}_0(1+\lambda_k^p \rho^{2p}).$

Chọn $n \in \mathbb{N}$ sao cho $k_T = \frac{1}{(2n)!}(\sqrt{\tilde{D}_\rho}\ T)^{2n} < 1,$ trong đó $\tilde{D}_\rho = \tilde{D}_\rho(\rho,k,M,m)$ $= \bar{D}_\rho + 2\rho^2\lambda_k^2\bar{d}_1(1+\lambda_k^{p-1}\rho^{2p-2}).$ Khi đó

(i) H ánh xạ S vào chính nó,

(ii) $\|H^n[c_m^{(k)}] - H^n[d_m^{(k)}]\|_Y \le k_T \|c_m^{(k)} - d_m^{(k)}\|_Y \quad \forall c_m^{(k)}, d_m^{(k)} \in S.$

Như thế $H^n : S \to S$ là ánh xạ co và do đó, H có một điểm bất động duy nhất. Suy ra hệ phương trình (3.4), (3.5) có duy nhất một nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ trên đoạn $[0,T_m^{(k)}] \subset [0,T].$ Bổ đề 3.2 được chứng minh.

Các ước lượng sau cho phép ta lấy $T_m^{(k)} = T.$

Bước 2: *Đánh giá tiên nghiệm*. Đặt

$$S_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(t) + Y_m^{(k)}(t) + \int_0^t \|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\|_0^2\, ds, \tag{3.11}$$

ở đây

$$\begin{cases} X_m^{(k)}(t) = \|\dot{u}_m^{(k)}(t)\|_0^2 + b_m^{(k)}(t)\|\nabla u_m^{(k)}(t)\|_0^2, \\ Y_m^{(k)}(t) = \|\nabla \dot{u}_m^{(k)}(t)\|_0^2 + b_m^{(k)}(t)\|Au_m^{(k)}(t)\|_0^2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Từ (3.4), ta suy ra

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t) &= S_m^{(k)}(0) + \int_0^t \dot{b}_m^{(k)}(s)\left[\|\nabla u_m^{(k)}(s)\|_0^2 + \|Au_m^{(k)}(s)\|_0^2\right]ds \\ &+ 2\int_0^t \langle F_m^{(k)}(s), \dot{u}_m^{(k)}(s)\rangle ds + 2\int_0^t a(F_m^{(k)}(s), \dot{u}_m^{(k)}(s))ds \\ &- \int_0^t b_m^{(k)}(s)\langle Au_m^{(k)}(s), \ddot{u}_m^{(k)}(s)\rangle ds + \int_0^t \langle F_m^{(k)}(s), \ddot{u}_m^{(k)}(s)\rangle ds. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Trước hết, ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 3.3

Tồn tại các hằng số $\tilde{D}_0 = \tilde{D}_0(M) > 0,\ \tilde{D}_1 = \tilde{D}_1(M) > 0,$ *sao cho* (*i*) $\| F_m^{(k)}(t) \|_0 \le \tilde{D}_0(M)\left(1+\sqrt{S_m^{(k)}(t)}\right),$

(*ii*) $\| \nabla F_m^{(k)}(t) \|_0 \le \tilde{D}_1(M)\left(1+\sqrt{S_m^{(k)}(t)}\right),$

với mọi $m, k \in \mathbb{N}$, $0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$

Bổ đề 3.4

Tồn tại hằng số $\tilde{D}_2 = \tilde{D}_2(M) > 0,$ *sao cho*

(3.14) $$S_m^{(k)}(t) \le 2S_m^{(k)}(0) + \tilde{D}_2(M)\int_0^t \left[1 + (S_m^{(k)}(s))^{2p+1}\right] ds,$$

với mọi $m, k \in \mathbb{N}$, $0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$

Chứng minh hai bổ đề này được thực hiện với các phép tính và các đánh giá rất cơ bản nhưng khá dài, sau khi sắp xếp lại, các hằng số $\tilde{D}_0, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ ở trên được tính như sau:

(3.15) $$\begin{cases} \tilde{D}_0 = \tilde{D}_0(M) = \bar{K}_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{b_0}} + M\right), \\ \tilde{D}_1 = \tilde{D}_1(M) = \bar{K}_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + (3 + \dfrac{M}{\sqrt{2}})(M + \dfrac{1}{\sqrt{b_0}})\right), \\ \tilde{D}_2 = \tilde{D}_2(M) = 4\bar{d}_0(1 + b_0^{-2p}) + \dfrac{2\bar{d}_1}{b_0\sqrt{b_0}}(1 + b_0^{1-p}) + 8(\tilde{D}_0 + \tilde{D}_1) + 8\tilde{D}_0^2. \end{cases}$$

Tiếp theo, ta đánh giá tiên nghiệm.

Do (3.6) – (3.7), ta luôn luôn chọn được số $M > 0,$ không phụ thuộc vào k, m sao cho

(3.16) $$S_m^{(k)}(0) = \| \tilde{u}_{1k} \|_0^2 + \| \nabla \tilde{u}_{1k} \|_0^2 + B(\| \nabla \tilde{u}_{0k} \|_0^2)\left(\| \nabla \tilde{u}_{0k} \|_0^2 + \| A\tilde{u}_{0k} \|_0^2\right) \le \frac{1}{4}M^2,$$

với mọi $m, k \in \mathbb{N}$. Kết hợp (3.14), (3.16) ta có bổ đề sau

Bổ đề 3.5

Tồn tại một hằng số $T > 0$ *không phụ thuộc vào* k, m *sao cho*

(3.17) $S_m^{(k)}(t) \le M^2, \quad \forall t \in [0, T],$ *với mọi* k *và* $m.$

Chứng minh bổ đề 3.5: Kết hợp (3.14), (3.16) ta có

(3.18) $$S_m^{(k)}(t) \le \frac{1}{2}M^2 + T\tilde{D}_2(M) + \tilde{D}_2(M)\int_0^t (S_m^{(k)}(s))^{2p+1} ds, \ 0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$$

Ta chọn $T > 0$ sao cho

(3.19) $$\left(\frac{1}{2}M^2 + T\tilde{D}_2(M)\right)^{-2p} - (2p+1)T\tilde{D}_2(M) > M^{-4p}.$$

Đặt

(3.20) $$S(t) = \frac{1}{2}M^2 + T\tilde{D}_2(M) + \tilde{D}_2(M)\int_0^t (S_m^{(k)}(s))^{2p+1}ds,\ 0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$$

Hiển nhiên ta có

(3.21) $$\begin{cases} S(t) > 0,\ 0 \le S_m^{(k)}(t) \le S(t),\ S'(t) \le \tilde{D}_2(M)S^{2p+1}(t), \\ S(0) = \frac{1}{2}M^2 + T\tilde{D}_2(M). \end{cases}$$

Đặt $Z(t) = S^{-2p}(t)$, lấy tích phân của $(3.21)_1$, ta có

(3.22) $$Z(t) \ge Z(0) - (2p+1)t\tilde{D}_2(M) \ge Z(0) - (2p+1)T\tilde{D}_2(M) \ge M^{-4p},$$
$0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$

Do (3.21), (3.22), ta được

$$0 \le S_m^{(k)}(t) \le S(t) = \frac{1}{\sqrt[2p]{Z(t)}} \le M^2,\ \ 0 \le t \le T_m^{(k)} \le T.$$

Từ đây, ta có thể lấy $T_m^{(k)} = T$, với mọi k, m.

Bổ đề 3.5 được chứng minh.

Do bổ đề 3.5 ta suy ra

$u_m^{(k)} \in W_1(M,T)$, với mọi k, m.

Và do đó, từ dãy $\{u_m^{(k)}\}$ ta có thể trích ra một dãy con $\{u_m^{(k_i)}\}$ sao cho

$u_m^{(k_i)} \to u_m$ trong $L^\infty(0,T;V_2)$, yếu *,

$\dot{u}_m^{(k_i)} \to \dot{u}_m$ trong $L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)$, yếu *,

$\ddot{u}_m^{(k_i)} \to \ddot{u}_m$ trong $L^2(0,T;V_0)$, yếu,

$u_m \in W(M,T)$.

Chuyển qua giới hạn trong (3.4), ta có u_m thoả mãn (3.2) trong $L^2(0,T)$, yếu. Mặt khác, bởi (3.1) – $(3.2)_1$ và $u_m \in W(M,T)$, ta có

$$\ddot{u}_m = -B(\|\nabla u_m\|_0^2)Au_m + f(r,u_{m-1}) + (u_m - u_{m-1})D_u f(r,u_{m-1}) \in L^\infty(0,T;V_0).$$

Suy ra $u_m \in W_1(M,T)$. Định lý 3.1 được chứng minh.

Kết quả sau đây cho ta sự hội tụ cấp hai của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu của bài toán (1.1).

Định lý 3.6

Giả sử $(H_1)-(H_3)$ *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M>0,\ T>0$ *sao cho*

(i) Bài toán (1.1) có duy nhất một nghiệm yếu $u\in W_1(M,T)$.

(ii) Dãy qui nạp $\{u_m\}$ *xác định bởi* (3.4) – (3.5) *hội tụ cấp hai mạnh về nghiệm yếu* u *của bài toán* (1.1) *trong không gian* $W_1(T)=\{v\in L^\infty(0,T;\tilde{V}_1):\ \dot{v}\in L^\infty(0,T;V_0)\}$ *theo nghĩa*

(3.23) $$\|u_m-u\|_{W_1(T)}\le C_T\beta_T^{2^m}\quad \forall m,$$

ở đây $0\le\beta_T<1,\ C_T$ *là các hằng số độc lập với* m.

Chú thích 2:

Trường hợp phương trình (1.1) không chứa số hạng $(1/r)u_r$, trong [21] cũng thu được kết quả hội tụ cấp hai như định lý 3.6 này. Mặt khác cho dù phương trình (1.1) có chứa số hạng $(1/r)u_r$, kết quả của chúng tôi vẫn tổng quát hơn trường hợp $B\equiv 1,\ \ f=f(u)$ đã xét trong [2].

Chứng minh định lý 3.6:

a) *Sự tồn tại nghiệm của bài toán* (1.1): Trước hết ta chú ý rằng $W_1(T)$ là không gian Banach đối với chuẩn $\|v\|_{W_1(T)}=\|v\|_{L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)}+\|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;V_0)}$. ([7])

Ta sẽ chứng minh $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Giả sử $v_m=u_{m+1}-u_m$. Khi đó v_m thoả mãn bài toán biến phân sau

(3.24) $$\begin{cases}\langle\ddot{v}_m(t),w\rangle+b_{m+1}(t)\,a(v_m(t),w)+\big(b_{m+1}(t)-b_m(t)\big)\langle Au_m(t)),w\rangle\\ \qquad\qquad\qquad\qquad=\langle F_{m+1}(t)-F_m(t),w\rangle,\ \ \forall w\in\tilde{V}_1,\\ v_m(0)=\dot{v}_m(0)=0,\end{cases}$$

trong đó

(3.25) $$\begin{cases}F_{m+1}(t)-F_m(t)=v_mD_uf(r,u_m)+\frac{1}{2}v_{m-1}^2D_u^2f(r,\lambda_m),\\ \lambda_m=u_{m-1}+\theta v_{m-1},\ \ (0\le\theta\le 1),\\ b_{m+1}(t)-b_m(t)=B(\|\nabla u_{m+1}(t)\|_0^2)-B(\|\nabla u_m(t)\|_0^2).\end{cases}$$

Thay $w=\dot{v}_m$ trong (3.24), sau đó lấy tích phân theo t, ta thu được

(3.26) $$\begin{aligned}z_m(t)&\le\int_0^t b'_{m+1}(s)\|\nabla v_m(s)\|_0^2\,ds\\ &\quad-2\int_0^t\Big[B(\|\nabla u_{m+1}(s)\|_0^2)-B(\|\nabla u_m(s)\|_0^2)\Big]\langle Au_m(s),\dot{v}_m(s)\rangle ds\\ &\quad+2\int_0^t\langle v_mD_uf(r,u_m),\dot{v}_m(s)\rangle ds+\int_0^t\langle v_{m-1}^2D_u^2f(r,\lambda_m),\dot{v}_m(s)\rangle ds.\end{aligned}$$

trong đó $z_m(t) = \| \dot{v}_m(t) \|_0^2 + b_0 \| \nabla v_m(t) \|_0^2$.

Tương tự ở trên, sử dụng các bổ đề 2.1 – 2.3, 2.6, 2.7 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$, ta sẽ có đánh giá từng số hạng trong vế phải của (3.26) và cuối cùng ta thu được

(3.27) $$z_m(t) \le \frac{1}{8} \bar{K}_1^2 T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + \gamma_M^{(1)} \int_0^t z_m(s)ds,$$

trong đó $\gamma_M^{(1)} = 1 + \frac{2}{\sqrt{b_0}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{b_0}}\right)\bar{d}_1(1+M^{2p-2})M^2\gamma_1 + \frac{\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}}$.

Sử dụng bổ đề Gronwall cho (3.27), ta nhận được

(3.28) $$z_m(t) \le \frac{1}{8} \bar{K}_1^2 T e^{T\gamma_M^{(1)}} \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4,$$

Do đó

(3.29) $$\| v_m \|_{W_1(T)} \le \mu_T \| v_{m-1} \|_{W_1(T)}^2,$$

ở đây $\mu_T = (1 + \frac{1}{\sqrt{b_0}})\sqrt{\frac{1}{8}\bar{K}_1^2 T e^{T\gamma_M^{(1)}}}$. Từ (3.29), ta có

(3.30) $$\| u_m - u_{m+p} \|_{W_1(T)} \le \frac{\beta^{2^m}}{\mu_T(1-\beta)},$$

với mọi m và p, trong đó $\beta = 2M\mu_T < 1$. Vậy $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$ và do đó tồn tại $u \in W_1(T)$ sao cho

(3.31) $u_m \to u$ mạnh trong $W_1(T)$.

Chú ý là $u_m \in W_1(M,T)$. Khi đó từ dãy $\{u_m\}$ ta có thể lấy ra một dãy con $\{u_{m_j}\}$ sao cho

$u_{m_j} \to u$ trong $L^\infty(0,T;V_2)$, yếu *,

$\dot{u}_{m_j} \to \dot{u}$ trong $L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)$, yếu *,

$\ddot{u}_{m_j} \to \ddot{u}$ trong $L^2(0,T;V_0)$, yếu,

$u \in W(M,T)$.

Ta lại có, bởi các bổ đề 2.1 – 2.4 và giả thiết $(H_2)-(H_3)$,

(3.32) $$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \langle b_m(t)Au_m(t) - B(\| \nabla u(t) \|_0^2)Au(t), w(t)\rangle dt \right| \\ &\le \bar{d}_0(1+M^{2p}) \| u_m - u \|_{L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)} \| w \|_{L^1(0,T;\tilde{V}_1)} \\ &\quad + 2\bar{d}_1(1+M^{2p-2})M \| u_{m-1} - u \|_{W_1(T)} \| u \|_{L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)} \| w \|_{L^1(0,T;\tilde{V}_1)}, \end{aligned}$$

với mọi $w \in L^1(0,T;\tilde{V}_1)$. Từ (3.31), (3.32) ta kết luận rằng

(3.33) $\quad b_m(t)Au_m \to B(\|\nabla u(t)\|_0^2)Au$ trong $L^\infty(0,T;(\tilde{V}_1)')$, yếu *.

Tương tự ta cũng thu được từ $\|f(r,u_{m-1}) - f(r,u)\|_{L^\infty(0,T;V_0)} \le \bar{K}_1 \|u_{m-1} - u\|_{L^\infty(0,T;\tilde{V}_1)}$, rằng

(3.34) $\quad f(r,u_{m-1}) \to f(r,u)$ mạnh trong $L^\infty(0,T;V_0)$.

Chuyển qua giới hạn trong (3.2) khi $m = m_j \to \infty$, ta thu được $u \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu của bài toán (1.1).

b) *Tính duy nhất của nghiệm*. Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (1.1) với $u_i \in W_1(M,T)$, $i = 1,2$. Khi đó $v = u_1 - u_2$ thoả mãn bài toán biến phân sau

(3.35)
$$\begin{cases} \langle \ddot{v}(t), w\rangle + \tilde{b}_1(t)a(v(t),w) + \left(\tilde{b}_1(t) - \tilde{b}_2(t)\right)\langle Au_2(t), w\rangle \\ \qquad\qquad\qquad = \langle \tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_2(t), w\rangle, \quad \forall w \in \tilde{V}_1, \\ v(0) = \dot{v}(0) = 0, \end{cases}$$

ở đây $\tilde{b}_i(t) = B\left(\|\nabla u_i(t)\|_0^2\right)$, $\tilde{f}_i(t) = f(r,u_i)$, $i = 1,2$.

Thay $w = \dot{v}$ trong (3.35), sau đó lấy tích phân theo t, thực hiện các đánh giá khá dài ta thu được

(3.36) $\quad \|\dot{v}(t)\|_0^2 + \|\nabla v(t)\|_0^2 \le \tilde{K}_M \int_0^t (\|\dot{v}(s)\|_0^2 + \|\nabla v(s)\|_0^2) ds, \quad \forall t \in [0,T]$,

với $\tilde{K}_M = \left(1 + \frac{1}{b_0}\right)\left[4\bar{d}_1(1 + M^{2p-2})M^2 + \bar{K}_1\right]^2$.

Áp dụng bổ đề Gronwall, ta suy ra $\|\dot{v}(t)\|_0^2 + \|\nabla v(t)\|_0^2 = 0$, $\forall t \in [0,T]$, hay $u_1 = u_2$.

Tính duy nhất của nghiệm được chứng minh.

c) Đánh giá (3.23) trong định lý 3.6 được suy ra từ (3.30), (3.31) và do đó định lý 3.6 được chứng minh hoàn tất.

Chú thích 3:

Một số kết quả liên quan đến trường hợp phương trình (1.1) không chứa số hạng $(1/r)u_r$ cũng được xét trong [12, 13, 19].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R.A. Adams (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork.
2. D.T.T. Binh, A.P.N. Dinh, N.T. Long (2001), "Linear recursive schemes associated with the nonlinear wave equation involving Bessel's operator", *Math. Comp. Modelling*, 34 (5-6), pp. 541-556.

3. G.F. Carrier (1945), "On the nonlinear vibrations problem of elastic string", *Quart. J. Appl. Math*. 3, pp. 157-165.
4. Y. Ebihara, L.A. Medeiros, M.M. Minranda (1986), "Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation", *Nonlinear Anal.* 10, pp. 27-40.
5. M. Hosoya, Y. Yamada (1991), "On some nonlinear wave equation I: Local existence and regularity of solutions", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math.* 38, pp. 225-238.
6. G.R. Kirchhoff (1876), "Vorlesungen ber Mathematiche Physik: Mechanik", *Teuber, Leipzig,* Section 29.7.
7. J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires,* Dunod; Gauthier – Villars, Paris.
8. N.T. Long, A.P.N. Dinh (1995), "Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance", *Comp. Math. Appl.* 30 (1), pp. 63-78.
9. N.T. Long, et al. (1993), "On the nonlinear vibrations equation with a coefficient containing an integral", *Comp. Maths. Math. Phys.* 33 (9), pp. 1171-1178.
10. N.T. Long, T.M. Thuyet (1999), "On the existence, uniqueness of solution of the nonlinear vibrations equation", *Demonstratio Math*. 32 (4), pp. 749-758.
11. N.T. Long, A.P.N. Dinh, D.T.T. Binh (1999), "Mixed problem for some semilinear wave equation involving Bessel's operator", *Demonstratio Math.* 32 (1), pp. 77-94.
12. N.T. Long, A.P.N. Dinh, T.N. Diem (2002), "Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator", *J. Math. Anal. Appl*. 267 (1), pp. 116-134.
13. N.T. Long (2002), "On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ associated with the mixed homogeneous conditions", *J. Math. Anal. Appl*. 274 (1), pp. 102-123.
14. N.T. Long, L.T.P. Ngoc (2007), "On a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation in the unit membrane: The quadratic convergence and asymptotic expansion of solutions", *Demonstratio Math.* 40 (2), pp. 365-392.
15. N.T. Long, L.T.P. Ngoc (2009), "On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations", *Vietnam J. Math.* 37 (2 – 3), pp. 141-178.
16. L.A. Medeiros (1994), "On some nonlinear perturbation of Kirchhoff-Carrier operator", *Comp. Appl. Math.* 13, pp. 225-233.
17. LA. Medeiros J. Limaco, S.B. Menezes (2002), "Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part one", *J. Comput. Anal. Appl.* 4 (2), pp. 91-127.

18. LA. Medeiros, J. Limaco, S.B. Menezes (2002), "Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part two", *J. Comput. Anal. Appl.* 4 (3), pp 211-263.
19. L.T.P. Ngoc, N.T. Long (2010), "Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions", *Acta Applicanda Mathematicae* (to appear).
20. S.I. Pohozaev (1975), "On a class of quasilinear hyperbolic equation", *Math. USSR. Sb.* 25, pp. 145-158.
21. E.L. Ortiz, A.P.N. Dinh (1987), "Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method", *SIAM J. Math. Anal.* 18, pp. 452-464.
22. R.E. Showater (1994), "Hilbert space methods for partial differential equations", *Electronic J. Diff. Equat., Monograph* 01.