CẤU TRÚC TOPO CỦA TẬP NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TRONG KHONG GIAN FRÉCHET

Le Hoan Hoa[1], Ño Hoai Vu[2], Le Thò Kim Anh[3]

1. Giôi thieu

Trong bài báo này chung toi xet söi ton tai nghiem va tính chất compact, lien thong của tap nghiem cua phöông trình tích phan phi tuyen co dang

$$x(t)= \phi(t) + \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))ds + \int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds, \quad t\geq 0. \quad (1)$$

Trong ño $\mu_i,\theta_i : [0,\infty)\to[0,\infty)$, $i=1,2$, $f:[0,\infty)^2\times E\to E$, $g:[0,\infty)\times E\to E$, $K:[0,\infty)^2\to L(E,E)$. E khong gian Banach thöc vôi chuan $|.|$, L(E,E) la khong gian cac toan töû tuyen tính lien tuc töø E vao E.

Phöông trình dang (1) ña ñöôïc kha nhieu nha toan hoc quan tam, ben canh viec chöùng minh söï ton tai nghiem viec khao sat cấu trúc cua tap nghiem cung ñöôïc đề cập chẳng hạn như:

Tröông hôp E = R va ham $f(t,s,x(s))=v(s,t)x(\theta_1(s))$, Avramescu [1] ña chöùng minh söï ton tại nghiem cua phöông trình

$$x(t)=\phi(t)+\int_0^{\mu_1(t)} V(t,s)x(\theta_1(s)))ds+\int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)g(s,x(\theta_2(s)))ds, \quad t\geq 0.$$

Tröông hôp E la khong gian Banach thöc Hóa, Ngoc [3] ña chöùng minh tap nghiem cua phöông trình $x(t)=\int_0^t f(t,s,x(s))ds+\int_0^t g(t,s,x(s))ds, \quad t\geq 0.$ la khac rong, compact, lien thong.

Với các kỹ thuật và ý tưởng tương tự như trong [2], [3] chúng tôi sẽ chứng minh tập nghiệm của phương trình (1) khác rỗng, compact và liên thông với các giả thiết của các hàm f, g nhẹ hơn trong [1], [2], [3]. Kết quả chính của bài báo được trình bày ở Định lý 2.1. Các định lý dùng để chứng minh các kết quả của bài báo này bao gồm những định lý sau:

Ñònh ly 1.1 [2]

Cho $(E,|.|)$ la khong gian Banach thöc, D la tap mô bò chan vôi bien ∂D va bao ñong $\overline{D}$. $T:\overline{D}\to E$ la toan töû hoan toan lien tuc thoa cac gia thiet:

(i) T khong co ñiem co ñònh tren ∂D va $\deg(I-T,D,0)\neq 0$.

---

[1] PGS. TS. – Trường ĐHSP TP. HCM

[2] ThS. – Trường ĐHCN TP. HCM

[3] ThS. – Trường ĐH Tiền Giang

(ii) Vôi moi $\varepsilon > 0$ ton tại toan töû hoan toan lien tuc T_ε thoa:

$\left|T(x) - T_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{D}$ va vôi moi $h(t) \in E$ sao cho $\left|h\right| < \varepsilon$ phöông trình $T_\varepsilon(x) + h = x$ co nhieu nhat mot nghiem tren $\overline{D}$. Khi ño tap $N(I - T, D)$ gom cac nghiem cua phöông trình x = T(x) la khac rong, compact, lien thong .

Ñònh ly 1.2 [2]

Cho E, F la hai khong gian Banach, D la tap con môû cua E va anh xa lien tuc $f : D \to F$. Khi ño vôi moi $\varepsilon > 0$ ton tai anh xa Lipschitz ñòa phöông $f_\varepsilon : D \to F$ sao cho: $\left|f(x) - f_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$ va $f_\varepsilon\left(D\right) \subset cof\left(D\right)$ với cof (D) la bao loi cua D .

Ñònh ly 1.3 [2]

Cho M la tap con ñong khac rong cua khong gian metric X, Y la khong gian ñònh chuan, toan töû $f : M \to Y$ lien tuc. Khi ño ton tai anh xa lien tuc $g : X \to Y$ sao cho:

(i) $g\left(X\right) \subset cof\left(M\right)$.

(ii) $g\left(x\right) = f(x), \quad \forall x \in M$.

Gia thiet 1.4 (Gia thiet (A) [2]**)**

Cho X la khong gian vec tô topo loi ñòa phöông, P la ho tach cac nöûa chuan tren X. Ñat D la tap con cua X va $U : D \to X$, vôi moi $a \in X$ ñònh nghóa $U_a(x)$= U(x)+a la mot anh xa töø D vao X. Toan töû U goi la thoa gia thiet (A) tren tap con Ω cua X neu

(A.1) Vôi moi $a \in \Omega,\ U_a(D) \subset D$.

(A.2) Vôi moi $a \in \Omega,\ p \in P$ Ton tai $k_a \in \mathbf{Z}+$ co tính chat $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in N, \delta > 0: \quad \alpha_a^p(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha_a^p(U_a^r(x), U_a^r(y)) < \varepsilon$ trong ño $\alpha_a^p(x,y) = \max\left\{p\left(U_a^i(x) - U_a^j(y)\right), i,j = 0,1,2,...,k_a\right\},\ N = \left\{1,2,3,...\right\}, Z+ = N \cup \left\{0\right\}$.

Ñònh ly 1.5 [2]

Cho X la day khong gian ñay ñu, loi ñòa phöông vôi ho tach cac nöûa chuan P. U ,C la cac toan töû tren X sao cho:

(i) U thoa gia thiet (A).

(ii) Vôi p tuy y thuoc P ton tai k > 0 (ñoc lap với p) sao cho $p(U(x) - U(y)) \le k\, p(x-y)$ vôi moi x,y $\in X$.

(iii) Ton tai $x_0 \in X$ co tính chat: Vôi p tuy y thuoc P ton tai $r \in N, \lambda \in [0,1)$ (r, λ phụ thuộc vôi p) sao cho $p(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)) \le \lambda\, p(x-y)$.

(iv) C hoan toan lien tuc vai $p(C(A)) < \infty$ khi $p(A) < \infty, A \subset X$.

(v) $\lim\limits_{p(x)\to\infty} \dfrac{p(C(x))}{p(x)} = 0, \quad \forall x \in X$.

Khi ñoi U + C coi ñiem coi ñònh.

2. Ket qua chính

Ñat $BC([0,\infty),R)$ là không gian các hàm liên tục, bị chặn $f:[0,+\infty) \to R$ và $L^p([0,\infty))$ là không gian các hàm đo được $f:[0,+\infty) \to R$ sao cho $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|^p\, dt < \infty$. Trên $BC([0,\infty),R)$, $L^p([0,\infty))$ lần lượt xét hai chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |f(t)| \text{ và } \|f\|_p = \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ñat X_0 $= C([0,\infty);E)$ la khong gian gom tat ca cac ham lien tuc tö $[0,+\infty)$ vao E. Với mỗi số tự nhiên n đặt $a = \max\limits_{s\in[0,n]} \{n, \theta_1(s), \theta_2(s)\}$ trên X_0 xét họ nửa chuẩn $p_a(x) = \sup\limits_{t\in[0,a]} \{|x(t)|\}$, ta có X_0 là không gian Fréchet với metric

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_a(x-y)}{1+p_a(x-y)}.$$

Đat X_a = C ([0,a] , E) la khong gian Banach cua tat ca cac ham lien tuc tö [0, a] vao E. Tren X_a xet hai chuan

$\|x\|_n = \sup\limits_{t\in[0,a]} \{|x(t)|\}$ va $\|x\|_N = \sup\limits_{t\in[0,a]} \{e^{-NK(t)}|x(t)|\}$ ở đây $K(t) = \int\limits_0^t k(s)\, ds$, N la hằng so thöc döông (sẽ chọn sau).

Chú ý:

a. Chuẩn $\|x\|_n$ töông ñöông vôi chuan $\|x\|_N$.

b. Tap con S của X_0 la compact töông ñoi neu va chæ neu vôi moi $n \in N$, S lien tuc ñong bac trong X_a va tap $\{x(t) : x \in S, t \in [0,a]\}$ la compact töông ñoi trong E .

Xet phöông trình (1) vôi cac gia thiet sau:

V2.1 $\mu_i, \theta_i : [0,\infty) \to [0,\infty)$ la cac ham lien tuc thỏa:

$$\mu_i(t) \le t,\ \theta_i(t) \le t, \quad i = 1,2.$$

V2.2 $\mu_i, \theta_i : [0,\infty) \to [0,\infty)$ la cac ham lien tuc thỏa:

$$\mu_i(t) \le \frac{n\,t}{a}, \quad i = 1,2 .$$

V2.3 $K:[0,\infty)^2 \to L(E,E)$ liên tục.

V2.4 $f:[0,\infty)^2 \times E \to E$ lien tuc thỏa điều kiện:

Ton tai ham $\phi:\ [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ lien tuc va $\phi(r) \le r$ sao cho:

$\left| f(t,s,x) - f(t,s,y) \right| \le k(t)h(s)\,\phi\left(\left|x-y\right|\right)$ ở đây $h,k:\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $h(s) \in BC([0,\infty), R)$ và k(t) thỏa một trong hai điều sau:

(i) $k(t) \in L^1[0,\infty)$.

(ii) $k(t) \in L^p[0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$.

V2.5 $g:[0,\infty) \times E \to E$ la anh xa hoàn toàn liên tục thoa: $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{|g(t,x)|}{|x|} = 0$

đều với t thuộc tập con bị chặn của $[0,+\infty)$.

Ñònh ly 2.1

Neu cac gia thiet V2.1, V2.3, V2.4 i, V2.5 (hoac V2.2, V2.3, V2.4 ii, V2.5) thoa thì tập nghiệm của phöông trình (1) khác rỗng, compact và liên thông. Để chứng minh định lý 2.1 cần chứng minh các bổ đề sau: Ñat

$$U(x)(t) = \phi(t) + \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))\,ds$$, $U_z(x)(t) = z(t) + U(x)(t)$.

Chọn hằng số N trong $\|.\|_N$ thoa N > $H = \|h\|_\infty$.

Bo ñe 1

Neu $f(t,s,x(t))$ thoa gia thiet V2.4 i va $\mu_1, \theta_1, \mu_2, \theta_2$ thoa V2.1 thì $U_z : X_a \to X_a$ la anh xa co $\forall z \in X_a$ (vôi chuan $\|x\|_N$).

Chứng minh

Ta co:

$$\left|U_z(x)(t) - U_z(y)(t)\right| = \left| \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))\,ds - \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,y(\theta_1(s)))\,ds \right|$$

$$\le \int_0^{\mu_1(t)} k(s)h(s)\phi\left(\left|x(\theta_1(s))) - y(\theta_1(s))\right|\right)ds$$

$$\le \int_0^{\mu_1(t)} k(s)h(s)\left|x(\theta_1(s))) - y(\theta_1(s))\right|ds$$

Tương đương

$$e^{-NK(t)}\left|U_z(x)(t)-U_z(y)(t)\right| \le e^{-NK(t)}\int_0^{\mu_1(t)} k(s)h(s)e^{K(\theta_1(s))}e^{-K(\theta_1(s))}\left|x(\theta_1(s)))-y(\theta_1(s))\right|ds.$$

$$\le \frac{1}{N}e^{-NK(t)}\int_0^t h(s)\left(\frac{de^{NK(s)}}{ds}\right)\|x-y\|_N\, ds$$

$$\le \frac{H}{N}e^{-NK(t)}\left(e^{NK(s)}\right)\Big|_0^t\|x-y\|_N \quad = \frac{H}{N}\|x-y\|_N,\ \forall t\in[0,a]$$

Vaiy

$$\|U_z(x)-U_z(y)\|_N \le \frac{H}{N}\|x-y\|_N .$$

Điều này suy ra được U_z laì aình xaì co hơn nữa H, N không phụ thuộc vào a do ñoì $U_z(x)$ thoia (i), (ii), (iii) cuia ñình lyì 1.5.

Boì ñeì 2

Neiu $f(t,s,x(t))$ thoia giai thieit V2.4 ii vai $\mu_1, \theta_1, \mu_2, \theta_2$ thoia V2.2 thì

$$\left\|U_z^m(x)-U_z^m(y)\right\|_n \le \frac{\left(H\|k\|_p a^{\frac{1}{q}}\right)^m}{(m!)^{\frac{1}{q}}}\|x-y\|_n,\ \forall m\in N$$ trong ñoì p, q laì hai soi thöïc thoia $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Chứng minh

Ta coi:

$$\left|U_z(x)(t)-U_z(y)(t)\right| = \left|\int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))ds - \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,y(\theta_1(s)))ds\right|$$

$$\le \int_0^{\mu_1(t)} k(s)h(s)\phi\left(\left|x(\theta_1(s)))-y(\theta_1(s))\right|\right)ds$$

$$\le \int_0^{\frac{n}{a}t} k(s)h(s)\left|x(\theta_1(s)))-y(\theta_1(s))\right|ds$$

$$\le H\|x-y\|_n\int_0^t k(s)ds$$

$$\le H\|x-y\|_n\left(\int_0^t |k(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq H\|k\|_p t^{\frac{1}{q}} \|x-y\|_n, \quad \forall t\in[0,a].$$

Vậy $\|U_z(x)-U_z(y)\|_n \leq H\|k\|_p t^{\frac{1}{q}}\|x-y\|_n, \forall t\in[0,a].$

Dung phöông phap quy nap ta co

$$\left|U_z(U_z^m(x))(t)-U_z(U_z^m(y))(t)\right| = \left|\int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,U_z^m(x))ds - \int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,U_z^m(y))ds\right|$$

$$\leq \int_0^{\mu_1(t)} k(s)h(s)\phi\left(\left|U_z^m(x)-U_z^m(y)\right|\right)ds$$

$$\leq \int_0^t k(s)h(s)\left|U_z^m(x)-U_z^m(y)\right|ds$$

$$\leq H\left(\int_0^t (k(s))^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t \left|U_z^m(x)-U_z^m(y)\right|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq H\|k\|_p\left(\int_0^t\left(\frac{\left(\|k\|_p s^{\frac{1}{q}}H\right)^m}{(m!)^{\frac{1}{q}}}\|x-y\|_n\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\frac{\left(H^q\|k\|_p^q\, a\right)^{m+1}}{[(m+1)!]}\right]^{\frac{1}{q}}\|x-y\|_n, \quad \forall t\in[0,a].$$

Vậy $\quad \left\|U_z^m(x)-U_z^m(y)\right\|_n \leq \dfrac{\left(H\|k\|_p a^{\frac{1}{q}}\right)^m}{(m!)^{\frac{1}{q}}}\|x-y\|_n, \quad \forall m\in N.$

Vì $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\dfrac{\left(H^q\|k\|_p^q\, a\right)^{m+1}}{[(m+1)!]}\right]^{\frac{1}{q}} = 0$ nên tồn tại m_a (phụ thuộc với a) sao cho

$$\left[\frac{\left(H^q\|k\|_p^q\, a\right)^{m+1}}{[(m+1)!]}\right]^{\frac{1}{q}} < 1$$

với mọi $m > m_a$. Vậy U_z thỏa giả thiết (i), (ii), (iii) cua ñònh ly 1.5.

Bo ñe 3

Neu cac gia thiet V2.1 (hoac V2.2) va V2.5 thoa thì $C : X_a \to X_a$ cho bởi $C(x)(t) = \int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\left(g(s, x(\theta_2(s)))\right) ds$ la mot toán tö hoan toan lien tuc tren $\left(X_a, \|.\|_n\right)$.

Chu *ý*: Nếu C hoan toan lien tuc tren $\left(X_a, \|.\|_n\right)$ thì cung hoan toan lien tuc tren $\left(X_a, \|.\|_N\right)$.

Chöng minh

Trên L(E, E) xét chuẩn $\|K\|_{L(E,E)} = \sup_{|x|=1}\left\{ |Kx| \right\}$, và đặt $K = \sup_{0\le s\le t\le a}\left\{ \|K(t,s)\|_{L(E,E)} \right\}$.

Bước 1: Chứng minh C(x) lien tuc

Xet day $\{x_m\}_m$ trong X_a sao cho $\lim_{m\to\infty} x_m = x_0$. Ñat B = $\left\{ x_m(s) : s \in [0,a], m \in Z_+ \right\}$ thì B la tập compac (xem [2]).

Với mỗi số $\varepsilon > 0$ vì g liên tuc tren tap con compact $[0,a]\times B$ nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho:

$$|x(t) - y(t)| < \delta \Rightarrow |g(s, x(s)) - g(s, y(s))| \le \frac{\varepsilon}{aK}, \forall s \in [0,a].$$

Vì $\lim_{m\to\infty} x_m = x_0$ trong X_a nên

$$\exists m_0 : \forall m \ge m_0 \Rightarrow |x_m(s) - x(s)| < \delta, \forall s \in [0,a]$$

$$\Rightarrow |x_m(\theta_2(s)) - x_0(\theta_2(s))| < \delta, \forall s \in [0,a] \Rightarrow \|x_m - x\|_n < \delta.$$

Ta có:

$$|C(x_m)(t) - C(x)(t)| = \left| \int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\left(g(s, x_m(\theta_2(s)))\right) ds - \int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\left(g(s, x_0(\theta_2(s)))\right) ds \right|$$

$$\le \int_0^{\mu_2(t)} \|K(t,s)\|_{L(E,E)} |g(s, x_m(\theta_2(s))) - g(s, x_0(\theta_2(s)))| ds$$

$$\le \int_0^{a} \frac{K\varepsilon}{Ka} ds = \varepsilon .$$

$\Rightarrow \ \|C(x_m)-C(x_0)\|_n<\varepsilon$. Vaäy C lieân tuïc .

Bước 2: Chứng minh C(x)(t) lieân tuïc ñoàng baäc

Giaû söû Δ laø moät taäp bò chaën trong X_a khi ñoù $A=\{x(s):x\in\Delta,\, s\in[0,a]\}$ laø moät taäp bò chaën trong E. Vì g laø hoàn toàn liên tục suy ra $g([0,a]\times A)$ laø taäp bò chaën trong E do đó $\forall t,t'\in[0,a]$: $|t-t'|<\delta,\, x\in\Delta$ ta coù

$$|C(x)(t)-C(x)(t')|=\left|\int_0^{\mu_2(t)}K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds-\int_0^{\mu_2(t')}K(t',s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds\right|$$

$$\le\int_0^{\mu_2(t)}\left|\big(K(t,s)-K(t',s)\big)g(s,x(\theta_2(s)))\right|ds+\int_{\mu_2(t')}^{\mu_2(t)}\left|K(t',s)g(s,x(\theta_2(s)))\right|ds$$

$$\le\int_0^{a}\|K(t,s)-K(t',s)\|_{L(E,E)}|g(s,x(\theta_2(s)))|ds+\int_{\mu_2(t')}^{\mu_2(t)}\|K(t',s)\|_{L(E,E)}|g(s,x(\theta_2(s))))|ds$$

Do söï lieân tuïc đều cuûa haøm K(t,s), $\mu_2(t)$ và tập $g([0,a]\times A)$ bị chặn neân C(x)(t) lieân tuïc ñoàng baäc treân $[0,a]$. Ta coù $V=\overline{co}\left[g\big([0,a]\times A\big)\cup\{0\}\right]$ laø taäp compact trong E suy ra $V_1=\overline{co}$[K(t,s)(V)] laø moät taäp compact trong E. Vì $K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)\in V_1,\ \forall(t,s)\in[0,a]^2,\ x\in\Delta$

$$\Rightarrow\quad C(x)(t)=\left\{\int_0^{\mu_2(t)}K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds\right\}\subset\mu_2(t)V_1,\forall t\in[0,a].$$

Vaäy $C(\Delta)$ compact töông ñoái treân X_a vaø do ñoù C laø toaùn töû hoaøn toaøn lieân tuïc treân X_a vaø vì thế C cuõng hoaøn toaøn lieân tuïc treân X_0.

Boå ñeà 4: $\lim\limits_{\|x\|_n\to\infty}\dfrac{\|C(x)\|_n}{\|x\|_n}=0$

Ta coù $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ sao cho $\dfrac{|g(s,x(\theta_2(s)))|}{|x|}<\dfrac{\varepsilon}{2a}$ với mọi x thỏa $|x|\ge\delta$ và với mọi $s\in[0,a]$. Vì g là ánh xạ compact nên khi $|x|\le\delta\Rightarrow\ |g(s,x)|\le M$, $\forall s\in[0,a]$, choïn $\delta_1:\dfrac{M}{\delta_1}<\dfrac{\varepsilon}{2a}$;$\forall x\in X_n:\|x\|_n\ge\delta_1$, đặt $I_1=\{s\in[0,a]:|x(\theta_2(s))|\le\delta\}$, $I_2=[0,a]\setminus I_1$ ta coù:

$$
\begin{aligned}
\frac{|C(x)(t)|}{\|x\|_n} &= \frac{1}{\|x\|_n}\left|\int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds\right| \\
&\le \frac{1}{\|x\|_n}\int_0^a \|K(t,s)\|_{L(E,E)}\,|g(s,x(\theta_2(s)))|\,ds \\
&\le \frac{K}{\|x\|_n}\left(\int_{I_1}|g(s,x(\theta_2(s)))|ds+\int_{I_2}\frac{|g(s,x(\theta_2(s)))||x|}{|x|}ds\right) \\
&\le \frac{K}{\|x\|_n}\left(Ma+|x|\left(\frac{\varepsilon a}{2a}\right)\right) \\
&\le K\left(\frac{Ma}{\|x\|_n}+\frac{|x|}{\|x\|_n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
&\le K\varepsilon,\ \forall t\in[0,a].
\end{aligned}
$$

Suy ra $\dfrac{\|C(x)\|_n}{\|x\|_n} \le K\varepsilon$. Vay $\lim\limits_{p_a(x)\to\infty}\dfrac{p_a(C(x))}{p_a(x)}=0, \quad \forall x\in X_a$.

Chöng minh ñònh ly 2.1

Bước 1: Tập nghiệm của phương trình (1) trên [0, a] khác rỗng, compact, liên thông.

Do bo ñe 1 (hoặc 2), 3, 4 suy ra U, C thoa man gia thiet cua Ñònh ly 1.5 vì vậy toán tử $(I-U)^{-1}$ liên tục đều trên X_a hơn nữa tồn tại tập mở bị chặn D với biên ∂D và bao đóng $\overline{D}$ sao cho $(I-U)^{-1}C\left(\overline{D}\right)\subset D$ và $(I-U)^{-1}C$ có điểm cố định trong $\overline{D}$ (nhưng không nằm trên biên ∂D). Dễ thấy $\overline{D}$ là tập con lồi, đóng và bị chặn trong X_a

Đặt $T=(I-U)^{-1}C$, như thế điểm cố định trên của T trên $\overline{D}$ cũng là điểm cố định của U + C và chính là nghiệm của phương trình (1) trong $\overline{D}$.

Do T là toán tử hoàn toàn liên tục trên X_a, T không có điểm cố định ∂D, $T\left(\overline{D}\right)\subset D$, D là tập lồi nên $\deg(I-T,D,0)=1$.

Đặt $A=\left\{x(s): s\in[0,a], x\in\overline{D}\right\}$ khi đó $\overline{A}$ là tập bị chặn trong E theo Ñònh ly 1.3 tồn tại hàm liên tục g^* là mở rộng của $g|_{[0,a]\times\overline{A}}$ trên $[0,a]\times E$ sao cho $g^*\left([0,a]\times E\right)\subset cog\left([0,a]\times\overline{A}\right)$

Theo Ñònh ly 1.2 ton tai ham Lipschitz ñòa phöông $g_\varepsilon(s,x)$ tren $[0,a]\times E$ sao cho $\forall s\in[0,a],\quad \forall x\in E$ ta có: $\left|g_\varepsilon(s,x)-g^*(s,x)\right|<\dfrac{\delta}{2aK}$ và

$$g_\varepsilon\left([0,a]\times E\right)\subset cog^*\left([0,a]\times E\right)\subset cog\left([0,a]\times \overline{A}\right)$$

do đó g_ε hoàn toàn liên tục.

Ñat $C_\varepsilon : X_a \to X_a$ với $C_\varepsilon(x)(t)=\int\limits_0^{\mu_2(t)} K(s,t)g_\varepsilon(s,x(\theta_2(s)))ds$ từ bo ñe 3 ta co $T_\varepsilon=(I-U)^{-1}C_\varepsilon$ hoàn toàn lien tuc, hơn nữa vì $(I-U)^{-1}$ liên tục đều nên:

$$\left|C_\varepsilon(x)(t)-C(x)(t)\right|=\left|\int\limits_0^{\mu_2(t)} K(s,t)g_\varepsilon(s,x(\theta_2(s)))ds-\int\limits_0^{\mu_2(t)} K(s,t)g(s,x(\theta_2(s)))ds\right|$$

$$\leq \int\limits_0^{\mu_2(t)} \left|K(s,t)\left(g_\varepsilon(s,x(\theta_2(s)))-g^*(s,x(\theta_2(s)))\right)\right|ds$$

$$\leq \frac{Ka\delta}{2aK}<\delta\ .$$

$$\Rightarrow\quad \left\|T_\varepsilon(x)-T(x)\right\|_n<\varepsilon\ .$$

Tiếp theo ta chöùng minh: Với mỗi h sao cho $\|h\|_n<\varepsilon$ phöông trình $x=T_\varepsilon(x)+h$ co nhieu nhat mot nghiem tren $\overline{D}$.

Gia sö x(t), y(t) la hai nghiem cua phöông trình (1). Do $\mu_1(t),\mu_2(t)$ thỏa giả thiết V2.1(hoặc V2.1) nên suy ra x(0)=y(0)=h(0). Ñat $b=\sup\left\{\alpha\in[0,a]: x(t)=y(t), 0\leq t\leq\alpha\right\}$ dễ thấy $b\in[0,a]$. Ta can chöùng minh b = a.

Giả sö ngöôïc lai b < a vì g_ε Lipschitz ñòa phöông nen ton tai so thöïc r > 0 sao cho g_ε Lipschitz vôùi hang so m tren $[0,a]\times B_r$ trong ño $B_r=\left\{z\in E:\left|z-x(b)\right|<r\right\}$. Do tính lien tuc cua x, y $\Rightarrow \exists\delta>0 : b+\delta\leq a\ ,\ x(t)\ ,\ y(t)\in B_r$ với mọi $t\in[b,b+\delta]$. Chú ý rằng $[b,b+\delta]\subset[0,a]$ nên với mọi $t\in[b,b+\delta]$ ta có:

$$|x(t)-y(t)| \le \int_b^t |f(t,s,x(\theta_1(s))) - f(s,t,y(\theta_1(s)))|ds$$

$$+\int_b^t |K(t,s)g_\varepsilon(s,x(\theta_2(s))) - K(s,t)g_\varepsilon(s,y(\theta_2(s)))|ds$$

$$\le \int_b^t \left(k(s)h(s)+K\right)|x(\theta_2(s)) - y(\theta_2(s))|ds$$

Ñat $\varphi(s)=k(s)h(s)+K$ thì $\varphi \in L^p([0,a])$ nên $\varphi \in L^1([0,a])$ và ta có

$$|x(t)-y(t)| \le 0\left(\int_b^t \left(k(s)h(s)+K\right)ds\right) = 0 \quad \forall t \in [0,b+\delta]$$

(Bat ñang thöc Bellman)

Mau thuan vôi gia thiet. Vay b = a hay x(t) = y(t), $\forall t \in [0,a]$.

Như vậy toán tử T thỏa các giả thiết trong định lý 1.1 nên bước 1 đã được chứng minh.

Bước 2 :Tập nghiệm của phương trình (1) trên $[0,+\infty)$ khác rỗng, compact, liên thông.

Trước hết chú ý rằng nếu x(t) là một nghiệm của phương trình (1) trên $[0,\infty)$ thì $x|_{[0,a]}(t)$ cũng là một nghiệm của (1) trên [0, a]. Ngược lại với mỗi nghiệm $x_a(t)$ của phương trình (1) trên [0, a] đều có thể mở rộng thành nghiệm trên $[0,\infty)$. Tương tự như trong [2], ta có các kết quả sau:

Đặt S là tập nghiệm của (1) trên $[0,\infty)$ theo [2, Định lý [5] S khác rỗng.

Đặt S_a là tập nghiệm của (1) trên [0, a] ta có S_a compact và liên thông trên X_a nên S compact, liên thông trên X_0.

Vay ñònh ly 2.1 ña ñöôc chöng minh.

TAI LIEU THAM KHAO

[1] C. Avramescu (2006), *Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii*, Electronic Journal of Qualitative Theorem of Differential Equations, No.5 pp, 1-14.

[2] Le Hoan Hoa and Klaus Schimtt (1994), *Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation*, Results in Mathematics Vol.25 pp 291-313.

[3] Le Hoan Hoa, Le Thi Phuong Ngoc (2006), *The connectivity and compactness of solution set of an integral equation and weark solution set of an initial- boundary value problem*, Demonstratio Mathematica Vol. XXXIX No 2, pp 357-376.

[4] Leszek Gasi'nski, Nikolaos S.Papageorgiou (2005), *Nonlinear Analysis*, Taylor Francis Group, LLC.
[5] Andrzej Fryszkowski (2004), *Fixed point theory for decomposable sets*, Kluwer Academic Publishers.

Tom tat

Trong bài báo này chung toi xet sö ton tai nghiem va cấu trúc cua tap nghiem (compac, lien thong) cua phöông trình tích phan phi tuyen co dang

$$x(t)=\phi(t)+\int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))ds+\int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds \quad ,t\geq 0. \quad (1)$$

Trong ño: $\mu_i,\theta_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\forall i=1,2$, $f:[0,\infty)^2\times E\to E$, $g:[0,\infty)\times E\to E$, $K:[0,\infty)^2\to L(E,E)$, E khong gian Banach thöc vôi chuan $|.|$, L(E,E) la khong gian cac toan tö tuyen tính lien tuc tö E vao E vôi cac gia thiet cua cac ham f, g ñöôc mô rong hôn trong [1] , [2] ,[3].

Abstract

Topological structure of solutions set of an intergral equation in Fréchet Space

In this paper we consider the set of solutions (connectivity and compactness) to the following intergral equation

$$x(t)=\phi(t)+\int_0^{\mu_1(t)} f(t,s,x(\theta_1(s)))ds+\int_0^{\mu_2(t)} K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds \quad ,t\geq 0.$$

Where $\mu_i,\theta_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\forall i=1,2$, $f:[0,\infty)^2\times E\to E$, $g:[0,\infty)\times E\to E$, $K:[0,\infty)^2\to L(E,E)$. E is a real Banach space with norm |.| and L(E,E) the Banach space of continuous linear operator with domain E and range in E with the conditions for f, g which are more general than that in [1], [2], [3].