KHAI THÁC LỊCH SỬ TOÁN TRONG DẠY - HỌC KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

LÊ THỊ HOÀI CHÂU*

Trình bày định nghĩa *tích phân* ở trường trung học phổ thông là điều rất khó. Trong một số sách giáo khoa khái niệm *tích phân xác định* được đưa vào qua biểu thức:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Xuất phát từ định nghĩa này, làm thế nào mà học sinh có thể hiểu được mối liên hệ giữa phép tính tích phân với việc nghiên cứu tâm quán tính hay bài toán tìm diện tích? Còn nếu trình bày ngay từ đầu bài toán tổng quát tính diện tích hình thang cong thì liệu có quá trừu tượng với học sinh không?

Lịch sử đã cần đến hai thiên niên kỷ để xây dựng hoàn chỉnh phép tính trên các đại lượng vô cùng bé. *Phương pháp vét kiệt* của Eudoxe chỉ được hoàn thiện dần qua nhiều thế hệ các nhà bác học. Nhưng, những kỹ thuật *phân cắt* mà nhiều người trong số họ đã sử dụng hoàn toàn có thể thực hiện được bởi học sinh lớp 11, 12. Ta hãy khai thác chúng để giúp học sinh hiểu nghĩa của khái niệm.

Hiển nhiên, vấn đề ở đây không phải là trình bày chi tiết các phương pháp của Archimède, của Ibn Qurra hay của Fermat và Pascal, mà, như tên bài báo đã chỉ ra, là đưa khái niệm *tích phân (xác định)* vào lớp 12. Như vậy, chúng ta sẽ sử dụng kiến thức, kỹ năng của học sinh ở trình độ này, đặc biệt là khái niệm giới hạn, phương trình đường cong, phép chứng minh quy nạp, và ... cả máy tính bỏ túi (để rút ngắn thời gian thực hiện các phép tính trung gian, thậm chí để vẽ đồ thị của một số hàm đơn giản). Các bài toán lịch sử sẽ được trình bày sao cho học sinh có thể giải được.

Những bài toán đầu tiên có liên quan đến lịch sử phép tính vi-tích phân đều nói về tính toán diện tích, thể tích hay chiều dài các cung. Một trong những người có đóng góp quan trọng nhất cho bài toán cầu phương hình tròn là Antiphon (khoảng năm 430 trước công nguyên). Ông cho rằng bằng cách cứ liên tiếp nhân đôi số cạnh của một đa giác đều nội tiếp trong một đường tròn thì hiệu số giữa diện tích hình tròn với diện tích đa giác cuối cùng sẽ bị vét kiệt. Lập luận đó đã chứa đựng mầm mống của *phương pháp vét kiệt* nổi tiếng mà Eudoxe (năm 410-356 trước công nguyên) được thừa nhận là tác giả. Phương pháp này lấy mệnh đề sau làm cơ sở: *Nếu từ bất*

* Khoa Toán - Tin, Trường ĐHSP Tp. HCM.

kỳ một đại lượng nào mà bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó, rồi từ chỗ còn lại lại bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó,v.v. ... thì cuối cùng sẽ còn lại một đại lượng nhỏ hơn bất kỳ đại lượng cùng loại nào được ấn định trước.

Trong số những người cổ đại thì Archimède là người đã có những ứng dụng đẹp nhất của *phương pháp vét kiệt* và tên tuổi ông đã trở nên gần gũi với phép tính tích phân. Một trong những ví dụ thường được nhắc đến của ông là bài toán cầu phương đoạn parabol: *A, B là hai điểm tùy ý thuộc một parabol. Tìm diện tích hình phẳng tạo bởi cung parabol (AB) và đoạn thẳng AB.* Người ta tìm thấy lời giải bài toán này trong bức thư Archimède gửi Eratosthène. Trong bức thư đó, bằng *phương pháp vét kiệt*, ông chứng minh được rằng diện tích của hình phẳng tạo bởi parabol và AB là $S = \frac{4}{3}S(\Delta ACB)$ với C là điểm thuộc cung parabol sao cho tiếp tuyến tại C song song với AB. Với phương pháp này, Archimède còn khám phá ra nhiều công thức tính diện tích, thể tích khác.

Nhưng, để đưa khái niệm tích phân xác định vào lớp 12 thì có lẽ phép cầu phương của Ibn Qurra, Fermat, Pascal gần gũi và phù hợp với học sinh hơn.

I. TỪ CÁC BÀI TOÁN CẦU PHƯƠNG

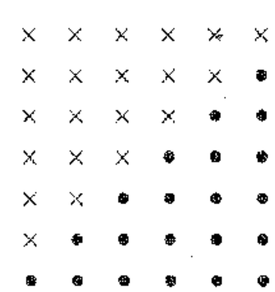
1. Phương pháp của Ibn Qurra

Công thức tính tổng $T_{n,p} = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Để giải bài toán cầu phương parabol, Inb Qurra (836 - 901) cần có công thức tính tổng $T_{n,2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ với n là số tự nhiên cho trước. Về phần mình, Alhazen (965 - 1040) phải tính $T_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p$ (với n, p là hai số tự nhiên cho trước) khi giải bài toán tìm thể tích tạo bởi phép quay một đoạn parabol quanh trục của nó.

Điều thú vị là các công thức cho phép tính những tổng này đã được Inb Qurra và Alhazen chứng minh bằng hình học. Chẳng hạn, Inb Qurra lập luận rằng $T_{n,1} = 1 + 2 + 3 + ... + n$ có thể được biểu diễn bằng một tam giác vuông cân. Để tính $T_{n,1}$, ông đặt hai lần tam giác đó sao cho chúng tạo thành một hình chữ nhật (hình 1) mà cạnh là n và (n + 1). Từ đó suy ra:

$$T_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$



Hình 1

Với cùng một phương pháp, Alhazen phân hình chữ nhật ABCD thành các hình chữ nhật nhỏ (hình 2) và tìm ra công thức tổng quát:

$$(n+1)\,T_{n,p} = T_{n,p+1} + \sum_{m=1}^{n} T_{m,p} \qquad (2)$$

Áp dụng công thức (2) cho trường hợp p = 1 và kết hợp với (1) thì Alhazen có:

$$T_{n,2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

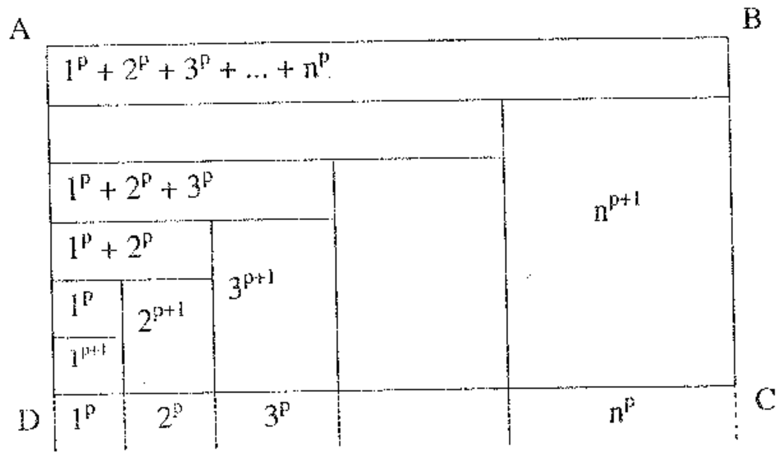
Từ đó, bằng cách viết :

$$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$$

$$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2]$$

$$= T_{2n,2} - 4\,T_{n,2}$$

Alhazen suy ra : $$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \qquad (4)$$



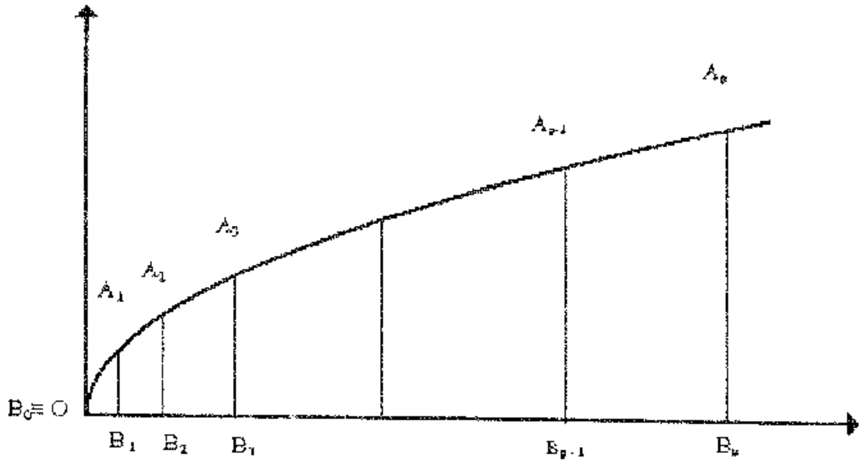
Hình 2

Phương pháp của Ibn Qurra

Bài toán cầu phương mà Ibn Qurra muốn giải quyết là:

Tính diện tích S(a) của hình phẳng xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$ với a > 0 cho trước (hình 3)

Ibn Qurra đã phân chia hình phẳng cần tính diện tích theo cách sau:



Hình 3

Gọi n là số tự nhiên cho trước. Lấy $h = \frac{a}{n^2}$. Trên trục Ox lấy các điểm B_p có hoành độ x_p sao cho: $x_0 = 0$; $x_1 = 1h$;

$x_2 = x_1 + 3h = 4h$;

$x_3 = x_2 + 5h = 9h$; ....

$x_p = x_{p-1} + (2p - 1)h = p^2h$; ...

$x_n = n^2h = a$.

Các điểm A_p có tọa độ $(p^2h, p\sqrt{h})$ và diện tích hình thang $A_{p-1}A_pB_pB_{p-1}$ là

$$T_p = \frac{1}{2}(x_p - x_{p-1})[p\sqrt{h} + (p-1)\sqrt{h}] = (2p-1)^2\frac{h\sqrt{h}}{2}$$

Từ đó suy ra diện tích đa giác $OA_1A_2...A_nB_nO$ bằng

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} T_p = \frac{h\sqrt{h}}{2}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2$$

Thay $h = \frac{a}{n^2}$ và sử dụng công thức (4), Ibn Qurra có:

$$S_n = \frac{2}{3}a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \qquad (5)$$

Từ đây, theo phương pháp vét kiệt, Ibn Qurra suy ra diện tích cần tính là: $S(a) = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

Với học sinh lớp 12

Bài toán cầu phương trong lịch sử có thể đưa ra cho học sinh lớp 12 với lưu ý rằng:

- Công thức (3) dễ dàng chứng minh được bằng kiến thức của học sinh lớp 11.
- Từ (3) có thể chứng minh (4) theo cách viết của Alhazen.
- Từ (5), thay cho phương pháp vét kiệt, ta lập luận:

$$S(a) = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{3} a\sqrt{a}$$

- Câu hỏi có thể nêu ra sau khi giải xong bài toán: *đặt* $S(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$. *Tính* $S'(x)$.

  Có nhận xét gì?

2. Phương pháp của Fermat

Nhà toán học Pierre Fermat (1601 - 1665) đã viết nên những trang tuyệt đẹp trong lịch sử toán học thuộc các lĩnh vực *lý thuyết số, hình học giải tích và lý thuyết xác suất*[1]. Về phần mình, Pascal (1623 - 1662) vừa là nhà văn, nhà triết học, vừa là nhà vật lý học và toán học lỗi lạc. Tên tuổi của ông gắn liền với nhiều phát minh vĩ đại. Ông cùng chia sẻ với Fermat những phát minh ra tính toán các xác suất. Hai nhà bác học người Pháp này đều tìm cách giải bài toán cầu phương parabol.

Fermat gọi *parabol* là mọi đường cong có phương trình $y = kx^m$ trong đó m là một số nguyên dương (phương pháp của ông có thể khái quát hóa cho trường hợp m là một số hữu tỉ dương).

Vấn đề là *tính diện tích* $S(\alpha)$ *của hình phẳng được xác định bởi* $0 \le x \le \alpha$; $0 \le y \le kx^m$ ($\alpha \in R^+$ *cho trước*).

Để giải bài toán cầu phương các parabol và hyperbol, Fermat đã khai thác những tính chất sau của cấp số nhân:

Với mọi $x \in (0, 1)$, ta có: $$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad (6)$$

Từ đó suy ra: $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad (7)$$

và với $n \in N$ cho trước thì : $$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = n + 1 \qquad (8)$$

Giới hạn (8) có thể được khái quát hóa cho trường hợp $n \in Q^+$

Bằng ngôn ngữ ngày nay, tư tưởng của lời giải bài toán do Fermat đưa ra có thể được trình bày là như sau:

---

[1] Về *lý thuyết số*, ông để lại những định lý rất nổi tiếng, trong đó có *định lý lớn Fermat* mà nhiều nhà toán học lỗi lạc đã tìm cách chứng minh nhưng cho đến hiện nay vẫn chưa giải quyết được trọn vẹn, mặc dù có sự hỗ trợ của máy tính điện tử. Ông cũng là người đã xây dựng nên, hầu như cùng thời với Descartes, những nguyên lý của ngành *hình học giải tích* mà sự ra đời của nó đã tạo nên một cuộc cách mạng trong lịch sử toán học.

- Lấy trên trục x'Ox các điểm A_i có hoành độ $x_i = \alpha q^i$ trong đó q là một số tùy ý thuộc (0,1).
- Tính diện tích r_i , r'_i của các hình chữ nhật $A_iA_{i-1}C_{i-1}B_i$, $A_iA_{i-1}B_{i-1}D_i$ (hình 4).
- Tăng số điểm chia ra vô hạn rồi sử dụng công thức (7) với $x = q^{m+1}$ để xấp xỉ $S(\alpha)$.
- Cho q tiến tới 1, áp dụng công thức (8) và từ đó suy ra diện tích cần tính là $S(\alpha) = k\alpha^{m+1}/(m + 1)$.

Với học sinh lớp 12

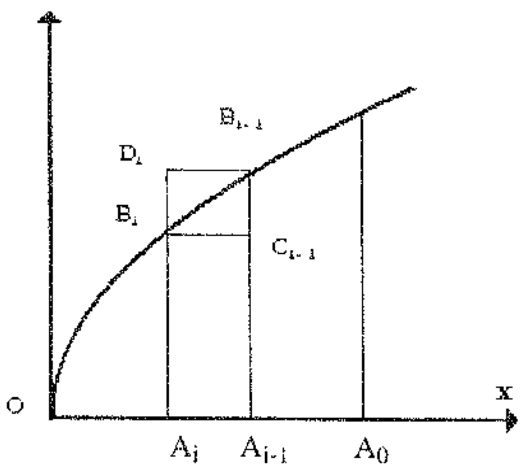
Lưu ý rằng các công thức (6), (7) đã được đưa vào khi nghiên cứu cấp số nhân ở lớp 11, và từ (6) dễ dàng suy ra đẳng thức (8). Bài toán cầu phương parabol của Fermat có thể nêu cho học sinh lớp 12 qua từng bước:

- Lấy trên trục x'Ox các điểm A_i có hoành độ $x_i = \alpha q^i$ trong đó q là một số tuỳ ý thuộc (0,1). Tính diện tích s_i , S_i của các hình chữ nhật $A_iA_{i-1}C_{i-1}B_i$, $A_iA_{i-1}B_{i-1}D_i$.

- Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n+1} s_i = k\alpha^{m+1}q^m(1-q)\sum_{i=1}^{n+1}(q^{m+1})^{i-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} S_i = k\alpha^{m+1}(1-q)\sum_{i=1}^{n+1}(q^{m+1})^{i-1}$$



Hình 4

- Từ đó suy ra: $k\alpha^{m+1}q^m \dfrac{1-q}{1-q^{m+1}} \le S(\alpha) \le k\alpha^{m+1} \dfrac{1-q}{1-q^{m+1}}$

- Tính $S(\alpha)$ bằng cách cho $q \to 1$: $S(\alpha) = \dfrac{k\alpha^{m+1}}{m+1}$

- Đặt $S(x) = \dfrac{kx^{m+1}}{m+1}$. *Tính S'(x). Có nhận xét gì ?*

3. Phương pháp của Pascal

Pascal muốn *tính diện tích $S(\alpha)$ của hình phẳng xác định bởi $0 \le x \le \alpha$; $0 \le y \le x^p$.*

Phương pháp của Pascal là dựng các hình chữ nhật có chiều rộng bằng d, tính diện tích của chúng. Để tính tổng các diện tích này ông sử dụng công thức tìm $T_{n,p}$ mà ông đã chứng minh được bằng phương pháp quy nạp:

$$T_{n,p} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + Q_p(n)$$

Sau đó ông giải thích rằng để tính S có thể bỏ qua một số số hạng khi số hình chữ nhật tăng lên vô hạn (tức là khi d tiến tới 0).

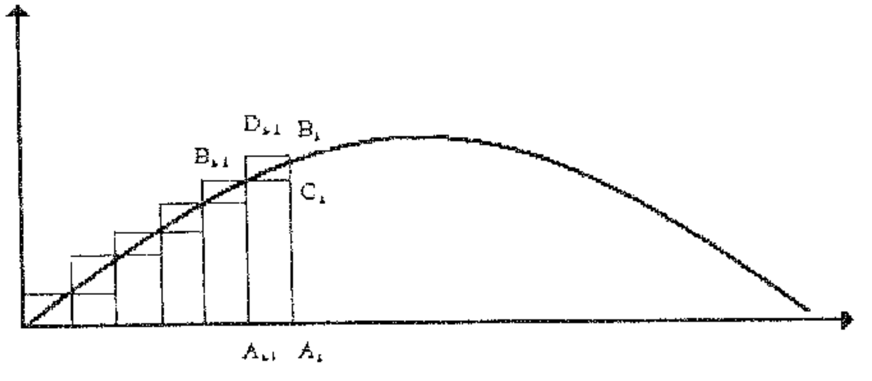
Bằng cách chọn những hàm số phù hợp, có thể hướng dẫn học sinh lớp 12 dùng phương pháp của Pascal nhưng không cần sử dụng công thức trên. Chẳng hạn, có thể chọn f(x) = sinx và đưa ra những bài toán sau:

- Bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{p=1}^{n}\sin(ph)=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

- *Chứng minh rằng diện tích hình phẳng xác định bởi $0 \le x \le \alpha$; $0 \le y \le sinx$ ($\alpha \in [0, \pi/2]$ cho trước) là $S(\alpha) = 1 - cos\alpha$..*

Áp dụng phương pháp của Pascal:



Hình 5

- Giả sử A là điểm có tọa độ (α, 0). Chia đoạn OA thành n đoạn bằng nhau (n chọn tùy ý trong N^+) bởi các điểm chia $A_0 \equiv O, A_1, A_2, ..., A_n = A$ (hình 5). Độ dài mỗi đoạn bằng $h = \alpha/n$. Hoành độ điểm A_i là ih.
- Tính diện tích s_i, S_i của các hình chữ nhật $A_{i-1}A_iC_iB_{i-1}$, $A_{i-1}A_iB_iD_{i-1}$

  $s_i = h\sin(i-1)h$; $S_i = h\sin(ih)$
- Tính tổng các diện tích s_i và tổng các diện tích S_i với i = 1, 2, ..., n

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}h\sin(i-1)h=\frac{h\sin\frac{(n-1)h}{2}\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

và

$$\sum_{i=1}^{n}S_i=\sum_{i=1}^{n}h\sin(ih)=\frac{h\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

- Từ đó suy ra:

$$\frac{\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}[\cos\frac{\alpha}{2n}-\cos(\alpha-\frac{\alpha}{2n})]\le S(\alpha)\le\frac{\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}[\cos\frac{\alpha}{2n}-\cos(\alpha+\frac{\alpha}{2n})]$$

- Tính $S(\alpha)$ bằng cách cho n tiến tới ∞.

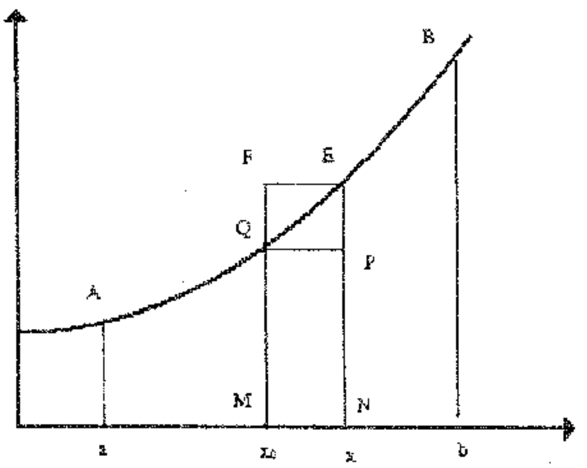
• *Đặt S(x) = 1 - cos x. Có nhận xét gì?*

II. ĐẾN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

• Kết quả các bài toán tính diện tích theo phương pháp của Ibn Qurra, Fermat, Pascal có thể được khái quát hóa thành mệnh đề sau:

Cho f(x) là một hàm số dương, liên tục, đơn điệu trên [a, b]. Nếu gọi S(x) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), y = 0, hai đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại các điểm (0, a), (0, x), trong đó x∈[a, b], thì S'(x) = f(x) (nói cách khác, F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b]).

Chỉ dẫn:



Hình 6

Gọi x_0 là một điểm tùy ý thuộc (a, b). Trong mọi trường hợp ta luôn luôn có:

$$s \le S(x) - S(x_0) \le S$$

(s, S theo thứ tự là diện tích hình chữ nhật "bé hơn", "lớn hơn" hình thang cong MNEQ trong đó $MN = |x - x_0|$). Suy ra:

$$0\le\left|\frac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\le|f(x)-f(x_0)|$$

Do f(x) liên tục tại x_0 nên từ bất đẳng thức trên ta có:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Nghĩa là hàm số S(x) có đạo hàm tại x_0 và $S'(x_0) = f(x_0)\ \forall x_0 \in (a, b)$.
Cũng từ bất đẳng thức trên ta có nếu

$x_0 = a$ thì $S'(a^+) = f(a)$ và nếu $x_0 = b$ thì $S'(b^-) = f(b)$.

Vậy $S'(x_0) = f(x_0)\ \forall x_0 \in [a, b]$, hay S(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b].

- Gọi F(x) là một nguyên hàm nào đó của f(x) trên [a, b].

Khiđó S(x) = F(x) + C. Với lưu ý là S(a) = 0 ta có: C = - F(a).
Suy ra: S(x) = F(x) - F(a) ∀x ∈ [a, b].
Đặc biệt: S(b) = F(b) - F(a) (9)

- Chứng minh rằng công thức tính (9) đúng cho mọi hàm số f(x) dương, liên tục trên [a, b] (ở đây chỉ cần nhận xét rằng f(x) liên tục trên [a, b] nên có thể chia [a, b] thành những đoạn nhỏ sao cho f(x) đơn điệu trong mỗi đoạn đó rồi áp dụng công thức (9) trên từng đoạn).

- Giả sử f(x) là hàm số liên tục trên một khoảng K chứa [a, b], F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K. Biểu thức F(b) - F(a) được gọi là tích phân xác định lấy từ a đến b của hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và ký hiệu là

$$\int_b^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

III. KẾT LUẬN

Nếu như mục đích ở trường trung học phổ thông không phải là nghiên cứu sâu khái niệm *tích phân xác định* thì cũng cần giúp cho học sinh hiểu được nghĩa của khái niệm, bởi học toán không phải chỉ để giải các bài toán có bản chất thuần túy toán học, mà quan trọng hơn là để học tư duy, học cách giải quyết vấn đề, và biết sử dụng kiến thức toán học vào các lĩnh vực khác nhau.

Với những bài toán trên, khái niệm đã được đưa vào một cách rất tự nhiên.

Ngoài ra, ta còn có thể khai thác nhiều phương diện khác qua các bài toán đó. Trước hết, chúng cho phép thiết lập mối liên hệ giữa phép tính vi phân và phép tính tích phân. Bằng ngôn ngữ hình học ta nói bài toán tìm diện tích hình phẳng là bài toán ngược của bài toán tìm tiếp tuyến.

Chúng cũng cho phép học sinh tiếp cận với phương pháp vi phân, kỹ thuật xấp xỉ,... Đó là những phương pháp đặc trưng cho giải tích và không thể thiếu khi học sinh nghiên cứu môn học này ở bậc đại học. Trước mắt, chúng giúp cho học sinh giải các bài toán của vật lý và kỹ thuật.

Để kết luận, có lẽ cũng nên nói rõ rằng việc nghiên cứu lịch sử đã gợi lên một số tình huống cho phép học sinh hiểu nghĩa của khái niệm. Sử dụng tình huống nào và sử dụng ra sao là một sự lựa chọn còn phụ thuộc vào nhiều ràng buộc. Nhưng, không có lý do gì biện minh cho cách dạy *bắt học sinh phải nhớ mà không cần hiểu.* Những chứng minh phức tạp có thể bỏ qua, song khái niệm sinh ra nhằm giải quyết vấn đề gì thì học sinh cần biết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Amy Dahan - Dalmedico, Jeanne Peiffer, (1986), *Une histoire des mathématiques,* Editions du Seuil, Paris.

[2] Bkouche Rudolf, (2000), *Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science,* Reperes, N°39.

[3] Ngô Thúc Lanh (chủ biên), *Giải tích 12,* Sách chỉnh lý hợp nhất năm 2000, NXB Giáo dục.

Tóm tắt:

Khai thác lịch sử Toán trong dạy – học khái niệm tích phân

Bài báo này trình bày một hướng khai thác lịch sử trong dạy học toán học. Tri thức được xét ở đây là khái niệm tích phân xác định. Với những tình huống được gợi lên từ lịch sử, ta có thể giúp học sinh tìm được nghĩa của khái niệm tích phân xác định và mối quan hệ giữa nó với khái niệm đạo hàm.

Abstract:

Using history of mathematics in teaching – studying integral concepts

This article phesents a direction using history in teaching mathematics. The knowledge mentioned here is the concept of defined integral with the situation reminded from history, students can be helped to undrestand the concept of defined integral and its relation to the concept of derivative.