# VÀI ĐỊNH LÍ MINIMAX CHO HÀM ĐA TRỊ

VÕ VIẾT TRÍ*, NGUYỄN XUÂN HẢI**, NGUYỄN HỒNG QUÂN**

**TÓM TẮT**

*Chúng tôi chứng minh vài điều kiện đủ cho sự tồn tại đẳng thức minimax và điểm yên ngựa. Các kết quả được thiết lập cho các hàm đa trị vô hướng xác định trên nửa dàn tôpô.*

***Từ khóa:*** định lí minimax, điểm yên ngựa, nửa dàn , ánh xạ $\Delta$-KKM.

**ABSTRACT**

***Some minimax theorems for set-valued maps***

*We prove several sufficient conditions for the existence of minimax equalities and saddle points. Results are established for set-valued maps defined on topological semilattices.*

***Keywords:*** minimax theorem, Saddle point, Semilattice, -KKM mapping.

## 1. Giới thiệu và tổng quan

Gọi $X$ là một tập không rỗng và $F : X \times X \to 2^R$ là một hàm đa trị vô hướng. Ta nói một đẳng thức minimax thỏa cho $F$ nếu

$$\inf \bigcup_{y\in X} \sup \bigcup_{x\in X} F(x,y) = \sup \bigcup_{x\in X} \inf \bigcup_{y\in X} F(x,y). \tag{1}$$

Trong trường hợp $X$ là một không gian tôpô compact và $F$ là hàm liên tục thì các tập và $\bigcup_{y\in X} F(x,y)$ là các tập compact, do đó $\max \bigcup_{x\in X} F(x,y)$ và $\min \bigcup_{y\in X} F(x,y)$ tồn tại. Hơn nữa các ánh xạ đơn trị $y \to \max \bigcup_{x\in X} F(x,y)$ và $x \to \min \bigcup_{y\in X} F(x,y)$ là liên tục. Bởi vậy, trong trường hợp này nếu đẳng thức minimax thỏa cho $F$ thì nó được viết dưới dạng

$$\min \bigcup_{y\in X} \max \bigcup_{x\in X} F(x,y) = \max \bigcup_{x\in X} \min \bigcup_{y\in X} F(x,y). \tag{2}$$

Một điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times X$ được gọi là điểm yên ngựa của $F$ nếu

$$\max \bigcup_{x\in X} F(x,\bar{y}) = F(\bar{x},\bar{y}) = \min \bigcup_{y\in X} F(\bar{x},y).$$

* TS, Trường Đại học Thủ Dầu Một; *Email: trivv@tdmu.edu.vn*
** TS, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ( Cơ sở TP Hồ Chí Minh)

Nếu $F$ có điểm yên ngựa thì đẳng thức minimax luôn thỏa cho $F$, và (1) được viết ở dạng

$$\inf \bigcup_{y\in X} \max \bigcup_{x\in X} F(x,y) = \sup \bigcup_{x\in X} \min \bigcup_{y\in X} F(x,y). \tag{3}$$

Một điều kiện để có đẳng thức kiểu (1) được thiết lập lần đầu trong [2], trong khi các điều kiện đủ để có đẳng thức dạng (2) đã được đưa ra gần đây bởi các tác giả ([3-8]). Bài báo này thiết lập vài kết quả mới cho sự tồn tại điểm yên ngựa và đẳng thức minimax (1) được thỏa.

Ta nhắc lại vài khái niệm cần thiết về sau. Gọi $X$, $Y$ là các không gian tôpô và $G: X \to 2^Y$ là một hàm đa trị. $G$ được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại $x_0$ nếu mỗi tập mở $U \subseteq Y$ thỏa $G(x_0) \cap U \neq \varnothing$, tồn tại một lân cận mở $V$ của $x_0$ sao cho: $\forall x \in V,\ G(x_0) \cap U \neq \varnothing$. $G$ gọi là nửa lên tục trên (usc) tại $x_0$ nếu với mỗi tập mở $U \supseteq G(x_0)$, tồn tại một lân cận mở $V$ của $x_0$ sao cho $U \supseteq G(V)$. $G$ gọi là liên tục tại $x_0$ nếu và chỉ nếu nó vừa usc vừa lsc tại $x_0$. Ta nói rằng $G$ là lsc (usc, liên tục) nếu nó là lsc (usc, liên tục) tại mọi điểm của $X$.

Từ đây trở đi, với tập không rỗng $X$, ta luôn kí hiệu $\langle X \rangle$ là lớp tất cả các tập con hữu hạn của $X$. Tập sắp thứ tự bộ phận $(X, \le)$ được gọi là nửa dàn trên (gọi tắt là nửa dàn) nếu mỗi cặp phần tử bất kì $(x, y)$ đều có cận trên đúng $\sup\{x, y\}$. $(X, \le)$ gọi là nửa dàn tôpô nếu $X$ là một không gian tôpô và ánh xạ $(x, y) \to \sup\{x, y\}$ liên tục. Nếu $x_1, x_2 \in X$ sao cho $x_1 \le x_2$ thì tập $[x_1, x_2] = \{y \in X : x_1 \le y \le x_2\}$ được gọi là một khoảng thứ tự (hoặc cho gọn là khoảng). Với một tập con hữu hạn $N \in \langle X \rangle$, tập hợp $conv_\Delta N = \bigcup_{x\in N} [x, \sup N]$ được gọi là một bao lồi của $N$. Tập con $C \subseteq X$ được gọi là một tập $\Delta-$lồi nếu với mọi $N \in \langle C \rangle$, $conv_\Delta N \subseteq C$.

Gọi $(X_1, \le_1)$ và $(X_2, \le_2)$ là hai nửa dàn tôpô. Trên $X_1 \times X_2$ ta trang bị tôpô tích và đưa vào $X_1 \times X_2$ quan hệ thứ tự bộ phận như sau: với $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ và $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ ta xác định $(x_1, x_2) \le (y_1, y_2)$ nếu và chỉ nếu $x_1 \le_1 y_1$ và $x_2 \le_2 y_2$. Khi đó $(X_1 \times X_2, \le)$ là nửa dàn tôpô với $\sup\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} = (\sup\{x_1, y_1\}, \sup\{x_2, y_2\})$. Ta gọi nửa dàn này là nửa dàn tích.

Với $X$ là một nửa dàn tôpô, $D \subseteq X$ và $G: X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị, $G$ được gọi là một ánh xạ $\Delta-$KKM nếu với mọi tập con hữu hạn $N \in \langle D \rangle$, ta có $conv_\Delta N \subseteq \bigcup_{x\in N} G(x)$.

Định lí sau đây sẽ được dùng để chứng minh các kết quả chính của bài báo. Định lí này được thiết lập trong [1].

***Định lí 1.1.*** *Giả sử X là nửa dàn tôpô có các khoảng liên thông đường và $G : X \to 2^X$ là ánh xạ đa trị thỏa các điều kiện sau*

(i) *$G$ có các ảnh đóng;*

(ii) *$G$ là ánh xạ $\Delta - KKM$;*

(iii) *tồn tại $N_0 \in \langle X \rangle$ và một tập con compact K của X sao cho $\bigcap_{x \in X} G(x) \subseteq K$.*

*Khi đó $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \varnothing$.*

## 2. Các định lí minimax

***Định lí 2.1.*** *Giả sử X là nửa dàn tôpô có các khoảng liên thông đường, $\delta \in R$ và $F : X \times X \to 2^R$ là một hàm đa trị thỏa các điều kiện sau*

a) *với mỗi $N \in \langle X \rangle$ và $y \in conv_\Delta N$, $\min_{x \in N} \sup F(x, y) \le \delta$;*

b) *với mỗi $x \in X$, tập $\{ y \in X : \sup F(x, y) \le \delta \}$ là đóng;*

c) *tồn tại $N_0 \in \langle X \rangle$ và một tập con compact $K$ của $X$ sao cho $\forall y \in X \setminus K$, $\max_{x \in N_0} \sup F(x, y) > \delta$.*

*Khi đó tồn tại $\bar{y} \in X$ sao cho $\sup \bigcup_{x \in X} F(x, \bar{y}) \le \delta$. Do đó, nếu với bất kì $\delta > F_* := \sup \bigcup_{x \in X} \inf \bigcup_{y \in X} F(x, y)$, các điều kiện* a)-c) *được thỏa thì* $\inf \bigcup_{y \in X} \sup \bigcup_{x \in X} F(x, y) = \sup \bigcup_{x \in X} \inf \bigcup_{y \in X} F(x, y)$.

*Chứng minh*. Định nghĩa hàm đa trị $G : X \to 2^X$, được xác định bởi

$G(x) = \{ y \in X : \sup F(x, y) \le \delta \}$ cho mọi $x \in X$.

Bởi giả thiết b), $G$ có các ảnh đóng, nghĩa là điều kiện (i) của Định lí 1.1 được thỏa. Giả thiết c) có nghĩa rằng với mọi $y \in X \setminus K$, tồn tại $x \in N$ sao cho $\sup F(x, y) > \delta$. Điều này kéo theo rằng nếu với $y$ nào đó thỏa $\sup F(x, y) \le \delta$ cho mọi $x \in N$, thì $y$ phải thuộc $K$. Do đó

$$\bigcap_{x \in N_0} G(x) = \bigcap_{x \in N_0} \{ y \in X : \sup F(x, y) \le \delta \} \subseteq K.$$

Vậy điều kiện (iii) của Định lí 1.1 thỏa cho $G$. Ta chứng minh $G$ là một ánh xạ $\Delta -$KKM. Lấy bất kì tập con hữu hạn $N \in \langle X \rangle$ và bất kì $y \in conv_\Delta N$. Giả thiết a) kéo theo sự tồn tại $x \in N$ sao cho $\sup F(x, y) \le \delta$, nghĩa là $y \in \{ y' \in X : \sup F(x, y') \le \delta \} = G(x)$. Do đó $conv_\Delta N \subseteq \bigcup_{x \in N} G(x)$. Vậy, $G$ thỏa tất cả các điều kiện của Định lí 1.1. Theo Định lí 1.1 ta có

$$\bigcap_{x\in X} G(x) = \bigcap_{x\in X}\{y \in X : \sup F(x,y) \le \delta\} \ne \emptyset.$$

Suy ra tồn tại $\bar{y} \in X$ sao cho: $\sup F(x,\bar{y}) \le \delta$ với mọi $x \in X$. Do đó

$$\sup \bigcup_{x\in X} F(x,\bar{y}) \le \sup\{\sup F(x,\bar{y}),\ x \in X\} \le \delta.$$

Chú ý rằng bất đẳng thức sau luôn thỏa

$$F^* = \inf \bigcup_{y\in X} \sup \bigcup_{x\in X} F(x,y) \ \ge\ \sup \bigcup_{x\in X} \inf \bigcup_{y\in X} F(x,y) = F_*.$$

Do đó, nếu với bất kì $\delta > F_*$, các điều kiện a)-c) được thỏa thì

$$\inf \bigcup_{y\in X} \sup \bigcup_{x\in X} F(x,y) \ \le\ \sup \bigcup_{x\in X} F(x,\bar{y}) \le \delta.$$

Cho $\delta \to F_*$ ta có

$$\inf \bigcup_{y\in X} \sup \bigcup_{x\in X} F(x,y) \ \le\ \sup \bigcup_{x\in X} \inf \bigcup_{y\in X} F(x,y).$$

Các bất thức trên kéo theo $\inf \bigcup_{y\in X} \sup \bigcup_{x\in X} F(x,y) = \sup \bigcup_{x\in X} \inf \bigcup_{y\in X} F(x,y)$. Chứng minh hoàn thành.

Gọi $X$ là nửa dàn tôpô và $F : X \times X \to 2^R$ là một hàm đa trị. Ta nói $F$ là $\Delta-$tựa lõm nếu với mọi $y \in X$, $N \in \langle X\rangle$ *và* $x \in conv_\Delta N$, tồn tại $x' \in N$ sao cho $F(x',y) \subseteq F(x,y) - R_+$. Sau đây là vài điều kiện đủ để các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa.

***Mệnh đề 2.1.*** *Nếu với mỗi* $x \in X$, $F(x,\cdot)$ *là lsc thì giả thiết* b) *của Định lí 2.1 được thỏa*.

1) *Giả thiết* a) *của Định lí 2.1 được thỏa nếu với mỗi* $y \in X$, $\sup F(y,y) \le \delta$ *và tập* $U_y := \{x \in X : \sup F(x,y) > \delta\}$ *là* $\Delta-$*lồi. Trong trường hợp F là* $\Delta-$*tựa lõm thì* $U_y$ *là* $\Delta-$*lồi*.

*Chứng minh.*

1) Lấy bất kì lưới $\{y_\alpha\}$ trong $V_x = \{y \in X : \sup F(x,y) \le \delta\}$ hội tụ đến $y_0$. Ta phải chứng tỏ rằng $\sup F(x,y_0) \le \delta$. Với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $t_0 \in F(x,y_0)$ sao cho $\sup F(x,y_0) \le t_0 + \varepsilon$. Khi $F(x,\cdot)$ là lsc, tồn tại lưới $\{t_\alpha\}$ sao cho $t_\alpha \in F(x,y_\alpha)$ và $t_\alpha \to t_0$. Ta có $t_\alpha \le \sup F(x,y_\alpha) \le \delta$ cho mọi $\alpha$. Vì $(-\infty,\delta]$ là đóng, ta có $t_0 \le \delta$. Khi đó $\sup F(x,y_0) \le t_0 + \varepsilon \le \delta + \varepsilon$. Vì $\varepsilon$ là tùy ý, ta có $\sup F(x,y_0) \le \delta$.

2) Giả sử trái lại, a) của Định lí 2.1 không thỏa. Thế thì tồn tại $N \in \langle X\rangle$ và $y \in conv_\Delta N$ sao cho $\sup F(x,y) > \delta$ với mọi $x \in N$. Suy ra $N \subseteq U_y$. Vì $U_y$ là $\Delta-$lồi,

ta có $y \in conv_{\Delta} N \subseteq U_y$, nghĩa là $\sup F(y,y) > \delta$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\sup F(y,y) \le \delta$.

Trong trường hợp của hàm đơn trị, ta có hệ quả sau.

***Hệ quả 2.1.*** *Giả sử $X$ là nửa dàn tôpô có các khoảng liên thông đường, $\delta \in R$ và $f : X \times X \to R$ là một hàm (đơn trị ) thỏa các điều kiện sau*

a) *với mỗi $N \in \langle X \rangle$ và $y \in conv_{\Delta} N$, tồn tại $x \in N$ với $f(x,y) \le \delta$;*

b) *với mỗi $x \in X$, tập $\{ y \in X : f(x,y) \le \delta \}$ là đóng;*

c) *tồn tại $N_0 \in \langle X \rangle$ và một tập con compact $K$ của $X$ sao cho $\forall y \in X \setminus K$, tồn tại $x \in N_0$ sao cho $f(x,y) > \delta$.*

*Khi đó $\exists \bar{y} \in X$ sao cho $f(x,\bar{y}) \le \delta$ với mọi $x \in X$. Hệ quả là, nếu với bất kì $\delta > \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} f(x,y)$, các điều kiện* a)-c) *được thỏa thì $\inf_{y\in X} \sup_{x\in X} f(x,y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} f(x,y)$.*

Tiếp theo ta chứng minh một kết quả cho sự tồn tại điểm yên ngựa.

***Định lí 2.2.*** *Giả sử $X$ là nửa dàn tôpô có các khoảng liên thông đường và $F : X \times X \to 2^R$ là một hàm đa trị thỏa các điều kiện sau*

a) *với mỗi $\Gamma \in \langle X \times X \rangle$ và $(x,y) \in conv_{\Delta}\Gamma$, tồn tại $(a,b) \in \Gamma$ với $\sup F(a,y) \le \inf F(x,b)$;*

b) *với bất kì $(a,b) \in X \times X$, tập $\{ (x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b) \}$ là đóng;*

c) *tồn tại $\Gamma_0 \in \langle X \times X \rangle$ và một tập con compact $K$ của $X \times X$ sao cho $\forall (x,y) \in X \times X \setminus K$, tồn tại $(a,b) \in \Gamma_0$ với $\sup F(a,y) > \inf F(x,b)$.*

*Khi đó $F$ có điểm yên ngựa, và do đó ta có $\inf \bigcup_{y\in X} \max \bigcup_{x\in X} F(x,y) = \sup \bigcup_{x\in X} \min \bigcup_{y\in X} F(x,y)$.*

*Chứng minh.*

Định nghĩa hàm đa trị $G : X \times X \to 2^{X\times X}$, được xác định bởi

$G(a,b) = \{ (x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b) \}$ cho mọi $(a,b) \in X \times X$.

Lấy bất kì $\Gamma \in \langle X \times X \rangle$ và $(x,y) \in conv_{\Delta}\Gamma$, bởi giả thiết a) tồn tại $(a,b) \in \Gamma$ sao cho $\sup F(a,y) \le \inf F(x,b)$. Điều này có nghĩa rằng

$(x,y) \in \{ (x',y') \in X \times X : \sup F(a,y') \le \inf F(x',b) \} = G(a,b).$

Do đó

$conv_{\Delta}\Gamma \subseteq \bigcup_{(a,b)\in\Gamma} \{ (x',y') \in X \times X : \sup F(a,y') \le \inf F(x',b) \} = \bigcup_{(a,b)\in\Gamma} G(a,b).$

Vậy $G$ là ánh xạ $\Delta - KKM$.

Giả thiết b) nói rằng $G$ có các ảnh đóng. Giả thiết c) tương đương với tồn tại $\Gamma_0 \in \langle X \times X \rangle$ và một tập con compact $K$ của $X \times X$ sao cho

$$X \times X \setminus K \subseteq \bigcup_{(a,b)\in\Gamma_0} \left\{(x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) > \inf F(x,b)\right\}$$

$$= \bigcup_{(a,b)\in\Gamma_0} [X \times X \setminus \left\{(x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b)\right\}]$$

$$= X \times X \setminus \bigcap_{(a,b)\in\Gamma_0} \left\{(x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b)\right\}$$

$$= X \times X \setminus \bigcap_{(a,b)\in\Gamma_0} G(a,b).$$

Do đó $\bigcap_{(a,b)\in\Gamma_0} G(a,b) \subseteq K.$ Vậy , theo Định lí 1.1, tồn tại $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times X$ sao cho

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \bigcap_{(a,b)\in X\times X} G(a,b) = \bigcap_{(a,b)\in X\times X} \left\{(x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b)\right\},$$

Nghĩa là $\sup F(a,\bar{y}) \le \inf F(\bar{x},b)$ cho mọi $(a,b) \in X \times X$ . Với $(a,b) = (\bar{x},\bar{y})$ ta có $\sup F(\bar{x},\bar{y}) \le \inf F(\bar{x},\bar{y})$. Do đó ta phải có $\sup F(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{x},\bar{y}) = \inf F(\bar{x},\bar{y})$. Bây giờ cho $b = \bar{y}$ ta có: $\sup F(a,\bar{y}) \le \inf F(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{x},\bar{y})$ với mọi $a \in X$. Suy ra $\max \bigcup_{a\in X} F(a,\bar{y}) = F(\bar{x},\bar{y})$ .Tương tự, lấy $a = \bar{x}$ ta cũng suy ra $\min \bigcup_{b\in X} F(\bar{x},b) = F(\bar{x},\bar{y})$. Vậy $(\bar{x},\bar{y})$ là điểm yên ngựa.

Mệnh đề sau cho một điều kiện đủ để giả thiết b) của Định lí 2.2 thỏa.

***Mệnh đề 2.2***. *Giả sử X là nửa dàn tôpô compact,* $F(a,\cdot)$ *và* $F(\cdot,b)$ *là lsc cho mỗi* $(a,b) \in X \times X$ *, thế thì tập* $V(a,b) = \left\{(x,y) \in X \times X : \sup F(a,y) \le \inf F(x,b)\right\}$ *là đóng.*

*Chứng minh.*

Lấy bất kì lưới $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ trong $V(a,b)$ hội tụ đến $(x_0, y_0)$. Lấy bất kì $t \in F(a,\bar{y})$ và $h \in F(\bar{x},b)$. Khi đó tồn tại các lưới $t_\alpha \in F(a,y_\alpha)$ và $h_\alpha \in F(x_\alpha,b)$ sao cho $t_\alpha \to t$ và $h_\alpha \to h$. Bởi vì $\sup F(a,y_\alpha) \le \inf F(x_\alpha,b)$ cho mọi $\alpha$ , ta có $t_\alpha \le h_\alpha$ cho mọi $\alpha$ . Do đó $t \le h$. Vì $t, h$ là tùy ý, ta có $\sup F(a,\bar{y}) \le \inf F(\bar{x},b)$ .

Hệ quả sau phát biểu cho hàm đơn trị, chứng minh của nó được suy trực tiếp từ Định lí 2.2.

***Hệ quả 2.2.***

*Giả sử X là nửa dàn tôpô có các khoảng liên thông đường và* $f : X \times X \to R$ *là một hàm (đơn trị ) thỏa các điều kiện sau*

a) *với mỗi* $\Gamma \in \langle X \times X \rangle$ *và* $(x,y) \in conv_{\Delta}\Gamma$, *tồn tại* $(a,b) \in \Gamma$ *với* $f(a,y) \le f(x,b)$;

b) *với bất kì* $(a,b) \in X \times X$, *tập* $\{(x,y) \in X \times X : f(a,y) \le f(x,b)\}$ *là đóng*;

c) *tồn tại* $\Gamma_0 \in \langle X \times X \rangle$ *và một tập con compact K của* $X \times X$ *sao cho* $\forall (x,y) \in X \times X \setminus K$, *tồn tại* $(a,b) \in \Gamma_0$ *với* $f(a,y) > f(x,b)$.

*Khi đó f có điểm yên ngựa, và do đó ta có* $\inf_{y \in X} \max_{x \in X} f(x,y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Horvath, C. D., & Llinares J. V. (1996), "Maximal elements and fixed points for binary relations on topological ordered space", *J. Math. Econom.*, 25, 291-306.
2. Khanh P.Q, & Quan N.H, "Topologically-based characterizations of the existence of solutions of optimization-related problems", *Math. Nachr.*, DOI 10.1002/mana.201400323
3. Li, S.J., Chen G.Y., & Lee G.M., (2000), "Minimax Theorems for Set-Valued Mappings", *Journal of optimization theory and applications*, Vol. 106, No. 1, 183–200.
4. Li Z.F., & Wang S.Y., (1998), "A type of minimax inequality for vector-valued mappings", *J. Math. Anal.Appl.*, 227, 68–80.
5. Luc D.T., & Vargas C., (1992), "A saddle point theorem for set-valued maps", *Nonlinear Anal.*, 18, 1–7.
6. Yang, M.G., Xu J.P., Huang, N.J., & Yu, S.J., (2010), "Minimax theorems for vector-valued mappings in abstract convex spaces", *Taiwanese J.Math.*, 14(2), 719–732.
7. Zhang Y., Li S.J., & Zhu S.K., (2012), "Mininax problems for set-valued mappings", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 33(2), 239–253.
8. Zhang Y., & Li S.J., "Minimax theorems for scalar set-valued mappings with nonconvex domains and applications", *J. Glob. Optim.*, DOI 10.1007/s10898-012-9992-2.

*(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 09-5-2016; ngày phản biện đánh giá: 30-5-2016; ngày chấp nhận đăng: 13-6-2016)*