

ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG VỚI ĐIỀU KIỆN CO KIỂU PATA SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN b -MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

NGUYỄN TRUNG HIẾU*, BÙI THỊ NGỌC HÂN**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng điều kiện co kiểu Pata trong bài báo [8] cho hai ánh xạ trong không gian b -mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lý điểm bất động chung cho chúng. Đồng thời, chúng tôi suy ra một số hệ quả từ định lý, xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được và vận dụng định lý được thiết lập để khảo sát sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.

Từ khóa: điểm bất động chung, không gian b -mêtric sắp thứ tự, điều kiện co kiểu Pata suy rộng.

ABSTRACT

Some common fixed point theorems for generalized Pata-type contractions in partially ordered b -metric spaces

In this paper, we extend the Pata-type contraction in [8] to two mappings in partially ordered b -metric spaces and state certain common fixed point theorems for them. We also deduce some corollaries, construct some illustrated examples and apply the obtained theorem to study the existence of solutions to the system of nonlinear integral equations.

Keywords: common fixed point, partially ordered b -metric spaces, generalized Pata-type contraction.

1. Giới thiệu

Các định lý điểm bất động là công cụ hữu ích trong việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của những bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng. Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ là kết quả cơ bản nhất về điểm bất động. Do đó, nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu mở rộng nguyên lý này cho những không gian khác nhau cũng như cho các dạng ánh xạ co khác nhau. Trong hướng mở rộng thứ nhất, nhiều khái niệm không gian mêtric suy rộng đã được giới thiệu như không gian mêtric sắp thứ tự, không gian mêtric nón, không gian b -mêtric [2]. Trong các không gian mêtric suy rộng đó, không gian b -mêtric nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều tác giả trong lĩnh vực lý thuyết điểm bất động bởi vì tính không liên tục của ánh xạ b -mêtric. Nhiều kết quả về điểm bất động trong không gian b -mêtric đã được thiết lập (xem [2] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Bên cạnh việc đề xuất những không gian mêtric suy rộng, một số tác giả đã giới thiệu những điều kiện co suy rộng [4]. Năm 2011, Pata [9] đã giới thiệu một điều kiện co suy rộng mới và thiết lập một số kết quả về điểm bất động của điều kiện co này. Kể

* ThS, Trường Đại học Đồng Tháp; Email: ngtrunghieu@dth.edu.vn

** SV, Trường Đại học Đồng Tháp

từ đó, những mở rộng của điều kiện co kiểu Pata trên không gian metric cũng như không gian metric suy rộng cũng được nghiên cứu. Năm 2014, Balasubramanian [3] đã thiết lập định lý điểm bất động cho ánh xạ kiểu Pata trong không gian metric nón đầy đủ; Eshaghi và cộng sự [6] cũng đã thiết lập một số kết quả điểm bất động kép cho điều kiện co kiểu Pata trong không gian metric đầy đủ sắp thứ tự, đồng thời, việc ước lượng tốc độ hội tụ của dãy lặp về điểm bất động kép cũng được giới thiệu; Kadelburg và cộng sự [8] đã khảo sát điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong không gian metric sắp thứ tự.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong bài báo [8] cho hai ánh xạ trong không gian b -metric sắp thứ tự và thiết lập định lý điểm bất động chung cho điều kiện co mới này. Đồng thời, chúng tôi vận dụng định lý được thiết lập để khảo sát sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1. ([5]) Cho X là một tập hợp khác rỗng và $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z \in X$ và với $s \geq 1$,

$$(1) d(x, y) = 0 \text{ khi và chỉ khi } x = y.$$

$$(2) d(x, y) = d(y, x).$$

$$(3) d(x, y) \leq s(d(x, z) + d(z, y)).$$

Khi đó, ánh xạ d được gọi là một b -metric trên X và bộ (X, d, s) được gọi là một không gian b -metric.

Định nghĩa 1.2. ([5]) Cho (X, d, s) là một không gian b -metric. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, kí hiệu là $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Điểm x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, d, s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Định nghĩa 1.3. ([7]) Cho (X, \circ) là một tập sắp thứ tự và hai ánh xạ $f, g : X \rightarrow X$. Khi đó, cặp (f, g) được gọi là *tăng yếu* nếu $fx \circ gfx$ và $gx \circ fgx$ với mọi $x \in X$.

Lưu ý rằng, mỗi metric là một ánh xạ liên tục. Tuy nhiên, điều này không đúng đối với b -metric [2]. Bổ đề sau được dùng để khắc phục tính không liên tục của b -metric trong những chứng minh ở phần sau.

Bổ đề 1.4. ([1]) Cho (X, d, s) là một không gian b -metric và hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ lần lượt hội tụ đến x, y . Khi đó

$$\frac{1}{s^2}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq s^2d(x, y).$$

Đặc biệt, nếu $x = y$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Hơn nữa, với mọi $z \in X$, ta có

$$\frac{1}{s}d(x, z) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, z) \leq sd(x, z).$$

Hai bổ đề sau được sử dụng trong chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1.5. Với $a \geq 1$, tồn tại hai số dương a, b thỏa mãn $(1+x)^a \leq ax^a + b$ với mọi $x \geq 0$.

Bổ đề 1.6. Cho (X, d, s) là một không gian b -mêtric và $\{x_n\}$ là dãy trong (X, d, s) . Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương.

(1) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) .

(2) $\{x_{2^n}\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) và $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Chứng minh. (1) \Rightarrow (2). Từ giả thiết, ta có $\{x_{2^n}\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) và $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

(2) \Rightarrow (1). Với mọi $n, m \geq 0$, chúng ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $n = 2k + 1, m = 2l$ với mọi $k, l \geq 0$. Khi đó

$$d(x_n, x_m) = d(x_{2k+1}, x_{2l}) \leq sd(x_{2k+1}, x_{2k}) + sd(x_{2k}, x_{2l}).$$

Trường hợp 2. $n = 2k, m = 2l + 1$ với mọi $k, l \geq 0$. Khi đó

$$d(x_n, x_m) = d(x_{2k}, x_{2l+1}) \leq sd(x_{2k}, x_{2l}) + sd(x_{2l}, x_{2l+1}).$$

Trường hợp 3. $n = 2k + 1, m = 2l + 1$ với mọi $k, l \geq 0$. Khi đó

$$d(x_n, x_m) = d(x_{2k+1}, x_{2l+1}) \leq sd(x_{2k+1}, x_{2k}) + s^2d(x_{2k}, x_{2l}) + s^2d(x_{2l}, x_{2l+1}).$$

Từ các trường hợp trên, suy ra $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) . \square

2. Các kết quả chính

Kí hiệu Y là tập hợp các hàm số $y : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ tăng và $y(0) = 0$. Định lí sau là một mở rộng của [8, Theorem 3.2] sang không gian b -mêtric sắp thứ tự.

Định lí 2.1. Cho (X, d, s, \circ) là một không gian b -mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $f, g : X \rightarrow X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \circ gx_0$.

(2) Cặp ánh xạ (f, g) tăng yếu

(3) Tồn tại $a \geq 1, b \in [0, a], g \geq 0$ và hàm $y \in Y$ sao cho

$$d(fx, gy) \leq \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(x, y) + ge^a y(e) \frac{1}{s} + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(fx, x_0) + d(gy, x_0) \frac{1}{s} \quad (2.1)$$

với mọi $e \in [0, 1]$ và mọi $x, y \in X$ mà $x \circ y$, trong đó

$$M_{fg}(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, gy), \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{2s}\}$$

(4) f hoặc g liên tục, hoặc (X, d, s, \circ) thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \circ x$ với mọi n .

Khi đó, f và g có điểm bất động chung.

Chứng minh.

Bước 1. Chứng minh nếu z là điểm bất động của f hoặc g thì z là điểm bất động chung của f và g . Thật vậy, Giả sử z là điểm bất động của f . Từ điều kiện (2.1), ta có

$$\begin{aligned} d(z, gz) &= d(fz, gz) \leq \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(z, z) + ge^a y(e) \left[d(z, x_0) + d(z, x_0) + d(fz, x_0) + d(gz, x_0) \right] \\ &= \frac{1-e}{s^3} d(z, gz) + ge^a y(e) \left[d(z, x_0) + d(gz, x_0) \right] \\ &\leq (1-e) d(z, gz) + ge^a y(e) \left[d(z, x_0) + d(gz, x_0) \right]. \end{aligned}$$

Đặt $K = g \left[d(z, x_0) + d(gz, x_0) \right]$. Suy ra $ed(z, gz) \leq Ke^a y(e) \leq Key(e)$. Điều này dẫn đến $d(z, gz) \leq Ky(e)$ với mọi $e \in [0, 1]$. Cho $e = 0$, ta được $d(z, gz) \leq Ky(0) = 0$. Suy ra $d(z, gz) = 0$ hay z là điểm bất động của g . Vậy z là điểm bất động chung của f và g .

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được nếu z là điểm bất động của g thì z là điểm bất động chung của f và g .

Bước 2. Chứng minh f và g có điểm bất động chung

Với $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 \circ gx_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{2n+2} = fx_{2n+1}$ và $x_{2n+1} = gx_{2n}$ với $n \in \mathbb{N}$. Do cặp (f, g) tăng yếu nên

$$x_0 \circ x_1 = gx_0 \circ fgx_0 = fx_1 = x_2 \circ gfx_1 = fx_2 = x_3 \circ \dots \circ x_n \circ \dots$$

Do đó, $\{x_n\}$ là dãy tăng. Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{2n_0} = x_{2n_0+1}$ thì $x_{2n_0} = gx_{2n_0}$ hay x_{2n_0} là điểm bất động của g . Do đó, theo Bước 1 ta có x_{2n_0} là điểm bất động chung của f và g . Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{2n_0+1} = x_{2n_0+2}$ thì $x_{2n_0+1} = fx_{2n_0+1}$ hay x_{2n_0+1} là điểm bất động của f . Do đó, theo Bước 1 ta có x_{2n_0+1} là điểm bất động chung của f và g . Bây giờ, ta giả sử $x_n \neq x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, trong (2.1), thay x bởi x_{2n-1} , y bởi x_{2n} và đặt $K = g \left[d(x_{2n-1}, x_0) + 2d(x_{2n}, x_0) + d(x_{2n+1}, x_0) \right] \geq 0$, ta có

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) = d(fx_{2n-1}, gx_{2n}) \leq \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(x_{2n-1}, x_{2n}) + K e^a y(e),$$

trong đó

$$\begin{aligned} M_{fg}(x_{2n-1}, x_{2n}) &= \max \left\{ d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), \frac{d(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n})}{2s} \right\} \\ &\leq \max \left\{ d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), \frac{d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})}{2} \right\} \\ &= \max \{ d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n}, x_{2n+1}) \}. \end{aligned}$$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\max \{ d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n}, x_{2n+1}) \} = d(x_{2n}, x_{2n+1})$. Khi đó

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq \frac{1-e}{s^3} d(x_{2n}, x_{2n+1}) + K e^a y(e) \leq (1-e) d(x_{2n}, x_{2n+1}) + K e^a y(e).$$

Suy ra $e d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq K e^a y(e) \leq K e y(e)$. Theo lí luận ở Bước 1, ta suy ra $d(x_{2n}, x_{2n+1}) = 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Do đó $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq d(x_{2n-1}, x_{2n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, trong (2.1), bằng cách thay x bởi x_{2n+1} , y bởi x_{2n} ta cũng chứng minh được $d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \leq d(x_{2n+1}, x_{2n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm. Khi đó, tồn tại $d^* \geq 0$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^*$. Đặt $c_{2n} = d(x_{2n}, x_0)$. Vì $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm nên

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leq \dots \leq d(x_0, x_1) = c_1. \tag{2.2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_1) + d(x_0, x_{2n+2}) &\leq s d(x_{2n+1}, x_0) + s d(x_0, x_1) + s d(x_0, x_{2n+1}) + s d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \\ &\leq 2s(c_1 + c_{2n+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Từ (2.1), (2.2), và (2.3), ta có

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= d(x_{2n+1}, x_0) \\ &\leq s d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + s^2 d(x_{2n+2}, x_1) + s^2 d(x_1, x_0) \\ &\leq (s + s^2)c_1 + s^2 d(fx_{2n+1}, gx_0) \\ &\leq (s + s^2)c_1 + s^2 \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(x_{2n+1}, x_0) \\ &\quad + s^2 g e^a y(e) + d(x_{2n+1}, x_0) + d(x_0, x_0) + d(x_{2n+2}, x_0) + d(x_1, x_0) \\ &\leq (s + s^2)c_1 + s^2 \frac{1-e}{s^3} \max \left\{ d(x_{2n+1}, x_0), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_1, x_0), \frac{d(x_{2n+1}, x_1) + d(x_0, x_{2n+2})}{2s} \right\} \\ &\quad + s^2 g e^a y(e) + d(x_{2n+1}, x_0) + s d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + s d(x_{2n+1}, x_0) + d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (s + s^2)c_1 + (1 - e)(c_1 + c_{2n+1}) + s^2ge^ay(e) \mathbb{E} + (1 + s)c_1 + (1 + s)c_{2n+1} \mathbb{E} \\ & \mathbb{E} (1 + s + s^2)c_1 + (1 - e)c_{2n+1} + s^2ge^ay(e) \mathbb{E} + (1 + s)c_1 \mathbb{E} + \frac{1 + s}{1 + (1 + s)c_1} c_{2n+1} \mathbb{E}. \end{aligned}$$

Do đó

$$ec_{2n+1} \mathbb{E} (1 + s + s^2)c_1 + (1 - e)c_{2n+1} + s^2ge^ay(e) \mathbb{E} + (1 + s)c_1 \mathbb{E} + \frac{1 + s}{1 + (1 + s)c_1} c_{2n+1} \mathbb{E}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.5, suy ra tồn tại hai số dương c, d sao cho $ec_{2n+1} \mathbb{E} ce^ay(e)c_{2n+1}^a + d$. Giả sử $\{c_{2n+1}\}$ không bị chặn. Khi đó, tồn tại dãy con

$c_{2n_i+1} \mathbb{E} \mathbb{E}$ thỏa mãn $ec_{2n_i+1} \mathbb{E} ce^ay(e)c_{2n_i+1}^a + d$. Chọn $e = e_i = \frac{1 + d}{c_{2n_i+1}}$, ta có

$$1 + d \mathbb{E} c_{2n_i+1} \mathbb{E} \frac{1 + d}{c_{2n_i+1}} y \mathbb{E} c_{2n_i+1} \mathbb{E} \frac{1 + d}{c_{2n_i+1}} c_{2n_i+1}^a + d. \text{ Điều này dẫn đến } 1 \mathbb{E} c(1 + d)^a y \mathbb{E} c_{2n_i+1} \mathbb{E} \frac{1 + d}{c_{2n_i+1}} \mathbb{E} 0.$$

Điều này là một mâu thuẫn. Vậy $\{c_{2n+1}\}$ là dãy bị chặn. Bằng lập luận tương tự như trên, ta cũng chứng minh được $\{c_{2n+2}\}$ là dãy bị chặn. Vậy $\{c_n\}$ là dãy bị chặn. Mặt khác, từ (2.1), ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(fx_{2n-1}, gx_{2n}) \\ & \mathbb{E} \frac{1 - e}{s^3} d(x_{2n-1}, x_{2n}) + ge^ay(e) \mathbb{E} + d(x_{2n-1}, x_0) + 2d(x_{2n}, x_0) + d(x_{2n+2}, x_0) \mathbb{E}. \end{aligned}$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M \mathbb{E} 0$ sao cho $c_n \mathbb{E} M$ với mọi $n \mathbb{E} \mathbb{E}$. Do đó

$$\mathbb{E} + d(x_{2n-1}, x_0) + 2d(x_{2n}, x_0) + d(x_{2n+2}, x_0) \mathbb{E} \mathbb{E} (1 + 4M)^b.$$

Đặt $K = g(1 + 4M)^b \mathbb{E} 0$. Ta có $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \mathbb{E} \frac{1 - e}{s^3} d(x_{2n-1}, x_{2n}) + Ke^ay(e)$.

Cho $n \mathbb{E} \mathbb{E}$, ta có $d^* \mathbb{E} \frac{1 - e}{s^3} d^* + Ke^ay(e) \mathbb{E} (1 - e)d^* + Ke^ay(e)$. Suy ra $ed^* \mathbb{E} Ke^ay(e) \mathbb{E} Key(e)$. Vì vậy $d^* = 0$ hay $\lim_{n \mathbb{E} \mathbb{E}} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do $\lim_{n \mathbb{E} \mathbb{E}} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ nên theo Bổ đề 1.6 ta chỉ cần chứng minh $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s, \circ) . Giả sử ngược lại $\{x_{2n}\}$ không là dãy Cauchy trong (X, d, s, \circ) . Khi đó, tồn tại $d > 0$ và hai dãy con $\{x_{2n(k)}\}, \{x_{2m(k)}\}$ của $\{x_{2n}\}$ sao cho

$$m(k)^3 n(k)^3 k \text{ và } d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})^3 d. \quad (2.7)$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, $n(k)$ ta chọn $m(k)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn (2.7).

Khi đó

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}) < d. \quad (2.8)$$

Ta có

$$d \leq d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \leq sd(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}) + sd(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}). \quad (2.9)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ trong (2.9), ta có

$$\frac{d}{s} \leq \limsup_{k \in \mathbb{N}} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}). \quad (2.10)$$

Từ (2.8), ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) &\leq s^2 d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}) + s^2 d(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-2}) + sd(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}) \\ &< s^2 d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}) + s^2 d(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-2}) + sd. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ trong (2.11), ta có

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \leq sd. \quad (2.12)$$

Ta cũng có

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) + sd(x_{2n(k)}, x_{2n(k)-1}). \quad (2.13)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ trong (2.13) và sử dụng (2.10), ta có

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq s^2 d. \quad (2.14)$$

Tương tự,

$$d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq sd(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}) + sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}). \quad (2.15)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ trong (2.15) và sử dụng (2.14), ta có

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq s^3 d. \quad (2.16)$$

Mặt khác, trong (2.1), thay x bởi $x_{2n(k)-1}$ và y bởi $x_{2m(k)}$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)+1}) &= d(fx_{2n(k)-1}, gx_{2m(k)}) \\ &\leq \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)}) + ge^a y(e) \frac{1}{s} + d(x_{2n(k)-1}, x_0) + d(x_{2m(k)}, x_0) \\ &\quad + d(x_{2n(k)}, x_0) + d(x_{2m(k)+1}, x_0) \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $c_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\frac{1}{s} + d(x_{2n(k)-1}, x_0) + d(x_{2m(k)}, x_0) + d(x_{2n(k)}, x_0) + d(x_{2m(k)+1}, x_0) \frac{1}{s} \leq (1 + 4M)^b.$$

Khi đó

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)+1}) \leq \frac{1-e}{s^3} \max \{d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)}), d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)}), d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}), \\ \frac{d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}) + d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)})}{2s} + ge^a y(e)(1+4M)^b\}. \quad (2.17)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ trong (2.17), sử dụng (2.10), (2.14) và (2.16), ta được

$$\frac{d}{s} \leq \frac{1-e}{s^3} \max \{s^2 d, 0, \frac{s^3 d + s d}{2s} + ge^a y(e)(1+4M)^b\} = \frac{1-e}{s} d + ge^a y(e)(1+4M)^b.$$

Suy ra $ed \leq Ke^a y(e) \leq Key(e)$ với $K = sg(1+4M)^b - 3 > 0$. Vì vậy $d = 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Vậy $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) . Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, d, s) . Do (X, d, s) là không gian b -mêtric đầy đủ nên tồn tại $z \in X$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$.

Giả sử f là ánh xạ liên tục. Khi đó, $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f x_n = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = fz$ hay z là điểm bất động của f . Theo Bước 1, ta có z là điểm bất động chung của f và g . Tương tự, nếu g liên tục thì ta cũng chứng minh được z là điểm bất động chung của f và g .

Giả sử giả thiết (H) được thỏa mãn. Do $\{x_n\}$ là dãy tăng và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ nên $x_n \leq z$. Do đó, trong (2.1), thay x bởi x_{2n+1} và y bởi z , ta được

$$d(x_{2n+2}, gz) = d(fx_{2n+1}, gz) \\ \leq \frac{1-e}{s^3} M_{fg}(x_{2n+1}, z) + ge^a y(e) + d(x_{2n+1}, x_0) + d(z, x_0) + d(x_{2n+2}, x_0) + d(gz, x_0) \\ \leq \frac{1-e}{s^3} \max \{d(x_{2n+1}, z), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(z, gz), \frac{d(x_{2n+1}, gz) + d(z, x_{2n+2})}{2s}\} \\ + ge^a y(e) + d(x_{2n+1}, x_0) + d(z, x_0) + d(x_{2n+2}, x_0) + d(gz, x_0). \quad (2.18)$$

Cho $n \in \mathbb{N}$ trong (2.18) và sử dụng Bổ đề 1.4, ta có

$$\frac{1}{s} d(z, gz) \leq \frac{1-e}{s^3} s d(z, gz) + ge^a y(e) + 2s d(z, x_0) + d(z, x_0) + d(z, gz) \\ \leq \frac{1-e}{s} d(z, gz) + ge^a y(e) + 2s d(z, x_0) + d(z, x_0) + d(z, gz).$$

Suy ra $ed(z, gz) \leq Ne^a y(e)$ với $N = sg + 2sd(z, x_0) + d(z, x_0) + d(z, gz) > 0$. Điều này dẫn đến $d(z, gz) \leq Ny(e)$ với mọi $e \in [0, 1]$. Cho $e = 0$, ta có $d(z, gz) \leq Ny(0) = 0$. Suy ra $d(z, gz) = 0$. Vì vậy $gz = z$ hay z là điểm bất động của g . Suy ra z là điểm bất động chung của f và g . \square

Trong Định lí 2.1 bằng cách chọn $f = g$ chúng tôi nhận được hệ quả sau, là một mở rộng của [8, Theorem 3.2] sang không gian b -mêtric.

Hệ quả 2.2. Cho (X, d, s, \circ) là một không gian b -mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $f : X \otimes X$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $x \circ fx$ với mọi $x \in X$.

(2) Tồn tại $x_0 \in X$, $a \geq 1$, $b \in [0, a]$, $g \geq 0$ và hàm $y \in Y$ sao cho

$$d(fx, fy) \leq \frac{1-e}{s^3} M_s(x, y) + ge^a y(e) \frac{1}{s} + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(fx, x_0) + d(fy, x_0) \frac{1}{s}$$

với mọi $e \in [0, 1]$ và mọi $x, y \in X$ mà $x \circ y$, trong đó

$$M_s(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2s} \right\}.$$

(3) f liên tục hoặc (X, d, s, \circ) thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \circ x$ với mọi n .

Khi đó, f có điểm bất động.

Vì mỗi mêtric là một b -mêtric với $s = 1$ nên từ Định lí 2.1 ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.3. Cho (X, d, s, \circ) là một không gian mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $f, g : X \otimes X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \circ gx_0$.

(2) Cặp ánh xạ (f, g) tăng yếu.

(3) Tồn tại $a \geq 1$, $b \in [0, a]$, $g \geq 0$ và hàm $y \in Y$ sao cho

$$d(fx, gy) \leq (1-e)M(x, y) + ge^a y(e) \frac{1}{s} + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(fx, x_0) + d(gy, x_0) \frac{1}{s}$$

với mọi $e \in [0, 1]$ và mọi $x, y \in X$ mà $x \circ y$, trong đó

$$M_{fg}(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, fx), d(y, gy), \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{2} \right\}.$$

(4) f hoặc g liên tục, hoặc (X, d, s, \circ) thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \circ x$ với mọi n .

Khi đó, f và g có điểm bất động chung.

Nhận xét 2.4. Vì mỗi mêtric là một b -mêtric với $s = 1$ nên từ Hệ quả 2.2 ta nhận được [8, Theorem 3.2].

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra ví dụ minh họa cho sự tồn tại điểm bất động của cặp ánh xạ (f, g) thỏa mãn giả thiết Định lí 2.1 và chứng tỏ rằng Định lí 2.1 là một sự tổng quát của Hệ quả 2.2.

Ví dụ 2.5. Cho $X = \{0\} \dot{\cup} [1,3] \dot{\cup} [4,5]$ với thứ tự \circ xác định bởi: $x \circ y$ nếu $x \geq y$ trên $\dot{\cup}$ và ánh xạ $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ xác định bởi $d(x,y) = (x - y)^2$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, (X, d, s, \circ) là không gian b -mêtric sắp thứ tự đầy đủ với $s = 2$. Xét ánh xạ $f : X \rightarrow X$ xác định bởi

$$fx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in \{0,3\} \\ 2 & \text{nếu } x = 5 \\ 1 & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $x \in X$, ta có $x \circ^3 fx$ hay $x \circ fx$. Lấy $x_0 = 0, e = 0, a = b = g = 1$ và $y(t) = t$ với mọi $t \in [0,1]$. Chọn $(x,y) = (5,3)$, ta có

$$\frac{1-e}{2^3} M_s(x,y) + ge^a y(e)^{\frac{1}{s}} + d(x,x_0) + d(y,x_0) + d(fx,x_0) + d(fy,x_0)^{\frac{1}{s}} = \frac{9}{8} < 2 = d(fx,fy).$$

Suy ra giả thiết (2) trong Hệ quả 2.2 không thỏa mãn. Do đó, Hệ quả 2.2 không áp dụng được cho ánh xạ f .

Bây giờ, ta xét ánh xạ g xác định bởi $g0 = 0$ và $gx = 1$ với mọi $x \in [1,3] \dot{\cup} [4,5]$.

Ta có $x_0 \circ^3 gx_0$ hay $x_0 \circ gx_0$. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta có $fx \geq gfx$ và $gx \geq fgx$ với mọi $x \in X$. Do đó, $fx \circ gfx$ và $gx \circ fgx$ với mọi $x \in X$ hay (f,g) là cặp ánh xạ tăng yếu.

Đặt

$$VP = \frac{1-e}{2^3} M_{fg}(x,y) + ge^a y(e)^{\frac{1}{s}} + d(x,x_0) + d(y,x_0) + d(fx,x_0) + d(gy,x_0)^{\frac{1}{s}}.$$

Khi đó, với mọi $(x,y) \in X \times X$ mà $x \circ y$ ta có $x \circ^3 y$. Với mọi $e \in [0,1]$, ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x = y = 0$ hoặc $x, y \in [1,3]$ hoặc $x \in [4,5], y \in [1,3] \dot{\cup} [4,5]$. Khi đó $d(fx,gy) = 0$.

Trường hợp 2. $x \in \{3,5\}, y \in [1,3]$ hoặc $x = 5, y \in [4,5]$. Khi đó $d(fx,gy) = 1$ và

$$VP \leq \frac{9}{8}(1-e) + (11+y^2)e^2 \leq \frac{9}{8}(1-e) + 12e^2 \leq \frac{9}{8}2e - \frac{9e^2}{32} + \frac{1071}{1024} + 8e^2.$$

Như vậy, từ các trường hợp trên, ta có điều kiện (3) của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Hơn nữa, g là ánh xạ liên tục trên X . Do đó, các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.1 áp dụng được cho cặp ánh xạ (f,g) .

Ví dụ sau chứng tỏ rằng Hệ quả 2.3 là một sự tổng quát của [8, Theorem 3.2].

Ví dụ 2.6. Cho $X = \{1,2,3,4,5\}$ với thứ tự \circ xác định bởi: $x \circ y$ nếu $x \geq y$ trên $\dot{\cup}$ và ánh xạ $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ xác định bởi

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ne\`u } x = y \\ 1 & \text{ne\`u } (x, y) \in \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\} \\ 3 & \text{ne\`u } (x, y) \in \{(1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1)\} \\ 2 & \text{tr\`ong h\`op con lai.} \end{cases}$$

Khi \`o, (X, d, s, \circ) l\`a kh\`ong gian m\`etric sắp thứ tự đầy đủ. Xét ánh xạ $f: X \rightarrow X$ xác định bởi

$f1 = f2 = f3 = 1, f4 = 2, f5 = 3$. Khi \`o, với mọi $x \in X$, ta có $x \leq fx$ hay $x \circ fx$. Lấy $x_0 = 0, e = \frac{1}{8}, a = b = g = 1$ và $y(t) = t$ với mọi $t \in [0, 1]$. Lấy $(x, y) = (5, 4)$, ta có

$$(1 - e)M(x, y) + ge^ay(e) \frac{d}{dt} + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(fx, x_0) + d(fy, x_0) \frac{d}{dt} = \frac{121}{64} < 2 = d(fx, fy).$$

Suy ra điều kiện co trong [8, Theorem 3.2] không thỏa mãn. Do \`o, [8, Theorem 3.2] không áp dụng được cho ánh xạ f .

Bây giờ, ta xét ánh xạ g xác định bởi $gx = 1$ với mọi $x \in X$. Ta có $x_0 \leq gx_0$ hay $x_0 \circ gx_0$. Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta có $fx \geq gfx$ và $gx \geq fgx$ với mọi $x \in X$. Do \`o, $fx \circ gfx$ và $gx \circ fgx$ với mọi $x \in X$ hay (f, g) là cặp ánh xạ tăng yếu.

Đặt

$$VP = (1 - e)M_{fg}(x, y) + ge^ay(e) \frac{d}{dt} + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(fx, x_0) + d(gy, x_0) \frac{d}{dt}.$$

Khi \`o, với mọi $(x, y) \in X \times X$ mà $x \circ y$ ta có $x \leq y$. Với mọi $e \in [0, 1]$, ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $(x, y) \in \{(2, 1), (3, 2), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Khi \`o $d(fx, gy) = 0$.

Trường hợp 2. $(x, y) \in \{(4, 1), (5, 1)\}$. Khi \`o $d(fx, gy) = 1$ và $VP = 1 + (1 - e)^2 + 4e^2$.

Trường hợp 3. $(x, y) \in \{(4, 2), (5, 3)\}$. Khi \`o $d(fx, gy) = 1$ và $VP = 1 + (1 - e)^2 + 5e^2$.

Trường hợp 4. $(x, y) \in \{(4, 3), (5, 2)\}$. Khi \`o $d(fx, gy) = 1$ và $VP = \frac{3}{2} + (1 - e)^2 + 5e^2$.

Trường hợp 5. $(x, y) \in \{(5, 4), (4, 4), (5, 5)\}$. Khi \`o

$$d(fx, gy) = 1 \text{ và } VP = 2 + \frac{3e^2}{2} + \frac{23e^2}{4}.$$

Như vậy, từ các trường hợp trên, giả thiết (3) của Hệ quả 2.3 được thỏa mãn. Hơn nữa, (f, g) là cặp ánh xạ tăng yếu và liên tục. Do đó, các giả thiết của Hệ quả 2.3 được thỏa mãn. Vì vậy, Hệ quả 2.3 áp dụng được cho cặp ánh xạ (f, g) .

Cuối cùng, chúng tôi sử dụng Định lý 2.1 để khảo sát sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.

Hệ quả 2.7. Cho $C[a, b]$ là tập hợp các hàm số liên tục trên $[a, b]$, quan hệ thứ tự trên $C[a, b]$ xác định bởi: $x \leq y$ nếu $x(t) \leq y(t)$ với mọi $t \in [a, b]$ và b -mêtric d với $s = 2^{p-1}$ trên $C[a, b]$ xác định bởi $d(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|^p$ với mọi $x, y \in C[a, b]$ và với $p > 1$. Xét hệ phương trình tích phân phi tuyến

$$\begin{cases} x(t) = g(t) + \int_a^b K_1(t, s, x(s)) ds \\ x(t) = g(t) + \int_a^b K_2(t, s, x(s)) ds \end{cases} \quad (2.19)$$

trong đó $t \in [a, b]$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $K_1, K_2 : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số cho trước. Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:

(H1) g là hàm số liên tục trên $[a, b]$, với mỗi $t \in [a, b]$ và $x \in C[a, b]$ các hàm số $K_1(t, s, x(s))$ và $K_2(t, s, x(s))$ khả tích theo biến s trên $[a, b]$.

(H2) $Tx, Sx \in C[a, b]$ với $x \in C[a, b]$, trong đó

$$Tx(t) = g(t) + \int_a^b K_1(t, s, x(s)) ds \quad \text{và} \quad Sx(t) = g(t) + \int_a^b K_2(t, s, x(s)) ds \quad \text{với} \quad t \in [a, b].$$

(H3) Với $t, s \in [a, b]$, $x \in C[a, b]$, ta có $K_1(t, s, x(t)) \leq K_2(t, s, \int_a^b K_1(s, u, x(u)) du + g(s))$

và $K_2(t, s, x(t)) \leq K_1(t, s, \int_a^b K_2(s, u, x(u)) du + g(s))$.

(H4) Tồn tại $x_0 \in C[a, b]$ sao cho $x_0(t) \leq g(t) + \int_a^b K_1(t, s, x_0(s)) ds$ với mọi $t \in [a, b]$

(H5) Tồn tại hằng số $a \geq 1$ và $b \in [0, a]$ sao cho với $t, s \in [a, b]$ và $x, y \in C[a, b]$ thỏa mãn $x(u) \leq y(u)$ với mọi $u \in [a, b]$, ta có

$$\begin{aligned} & \left| K_1(t,s,x(t)) - K_2(t,s,y(t)) \right|^p \\ & \leq \xi(s,t) \max \left\{ |x(t) - y(t)|^p, |x(t) - Tx(t)|^p, |y(t) - Sy(t)|^p, \frac{|x(t) - Sy(t)|^p + |y(t) - Tx(t)|^p}{2^p} \right\} \\ & \quad + e^a y(e) \left(|x(t) - x_0(t)|^p + |y(t) - x_0(t)|^p + |Tx(t) - x_0(t)|^p + |Sy(t) - x_0(t)|^p \right) \end{aligned}$$

với mọi $e \in [0, 1]$, trong đó $x : [a, b] \rightarrow [a, b] \otimes [0, \infty)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\sup_{t \in [a, b]} \int_a^b \xi(s, t) ds \leq \frac{1}{2^{3p-3}(b-a)^{p-1}}.$$

Khi đó, hệ phương trình tích phân phi tuyến (2.19) có nghiệm $x \in C[a, b]$

Chứng minh. Xét hai ánh xạ $T, S : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ xác định bởi

$$Tx(t) = g(t) + \int_a^b K_1(t, s, x(s)) ds \quad \text{và} \quad Sx(t) = g(t) + \int_a^b K_2(t, s, x(s)) ds$$

với mọi $t \in [a, b]$ và $x \in C[a, b]$. Khi đó, sự xác định của cặp ánh xạ S, T được suy ra từ giả thiết (H1) và (H2). Hơn nữa, sự tồn tại điểm bất động chung của cặp ánh xạ S, T dẫn đến sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân (2.19). Do đó, ta sẽ chứng minh rằng cặp ánh xạ S, T thỏa mãn các giả thiết của Định lý 2.1.

(1) Từ giả thiết (H4), ta suy ra tồn tại $x_0 \in C[a, b]$ sao cho $x_0 \circ Sx_0$.

(2) Với $x \in C[a, b]$ và $s, t \in [a, b]$, từ giả thiết (H3), ta có

$$\begin{aligned} Tx(t) & \leq g(t) + \int_a^b K_2(t, s, x(s)) ds + \int_a^b K_1(s, u, x(u)) du + g(s) \leq g(t) + \int_a^b K_2(t, s, Tu(s)) ds = STx(t), \\ Sx(t) & \leq g(t) + \int_a^b K_1(t, s, x(s)) ds + \int_a^b K_2(s, u, x(u)) du + g(s) \leq g(t) + \int_a^b K_1(t, s, Su(s)) ds = TSx(t). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $Tx \circ STx$ và $Sx \circ TSx$ với mọi $x \in C[a, b]$. Do đó, cặp T, S là cặp ánh xạ tăng yếu.

(3) Lấy $q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Từ giả thiết (H5), ta có

$$\begin{aligned}
 & |Tx(t) - Sy(t)|^p \\
 & \int_a^b \int_a^b |K_1(t,s,x(s)) - K_2(t,s,y(s))| ds \\
 & \int_a^b \int_a^b ds \int_a^b |K_1(t,s,x(s)) - K_2(t,s,y(s))|^p ds \\
 & \int_a^b (b-a)^{p-1} \int_a^b x(t,s)(1-e) \max \left\{ |x(t) - y(t)|^p, |x(t) - Tx(t)|^p, |y(t) - Sy(t)|^p, \right. \\
 & \left. \frac{|x(t) - Sy(t)|^p + |y(t) - Sx(t)|^p}{2^p} \right\} ds \\
 & + \int_a^b e^a y(e) \int_a^b |x(t) - x_0(t)|^p + |y(t) - x_0(t)|^p + |Tx(t) - x_0(t)|^p + |Sy(t) - x_0(t)|^p ds \\
 & \int_a^b (1-e)(b-a)^{p-1} M_{fg}(x,y) \int_a^b x(t,s) ds \\
 & + (b-a)^p e^a y(e) \int_a^b d(x,x_0) + d(y,x_0) + d(Tx,x_0) + d(Sy,x_0) ds \\
 & \int_a^b \frac{1-e}{2^{3p-3}} M_{fg}(x,y) + (b-a)^p e^a y(e) \int_a^b d(x,x_0) + d(y,x_0) + d(Tx,x_0) + d(Sy,x_0) ds.
 \end{aligned}$$

Do đó, điều kiện (2.1) thỏa mãn với $g = (b-a)^{p-3} \cdot 0$.

(4) $C[a,b]$ là không gian b -mêtric đầy đủ với b -mêtric d đã chọn. Hơn nữa, giả sử $\{x_n\}$ là dãy tăng trong $C[a,b]$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Khi đó, với mỗi $t \in [a,b]$, ta có $x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_n(t) \leq \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$. Do đó, với mỗi $t \in [a,b]$, ta có $x_n(t) \leq x(t)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra $x_n \leq x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vậy giả thiết (H) trong Định lí 2.1 được thỏa mãn.

Như vậy, các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Do đó, cặp ánh xạ (T, S) có điểm bất động chung $x \in C[a,b]$. Vì vậy, phương trình tích phân phi tuyến (2.19) có nghiệm $x \in C[a,b]$. \square

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Aghajani, A., Abbas, M., & Roshan, J. R. (2014), “Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b -metric spaces”, *Math. Slovaca*, 64(4), 941-960.
2. An, T. V., Dung, N. V., Kadelburg, Z., & Radenovic, S. (2015), “Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems”, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 109, 175-198.
3. Balasubramanian, S. (2014), “A Pata-type fixed point theorem”, *Math. Sci.*, 8(3), 65-69.
4. Collaco, P. & Silva, J. C. E. (1997), “A complete comparison of 25 contraction conditions”, *Nonlinear Anal.*, 30(1), 471-476.
5. Czerwik, S. (1998), “Nonlinear set-valued contraction mappings in b -metric spaces”, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), 263-276.
6. Eshaghi, M., Mohseni, S., Delavar, M. R., Sen, M. D. L., Kim, G. H., & Arian, A. (2014), “Pata contractions and coupled type fixed point”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2014:130, 1-10.
7. Gordji, D. E., Baghani, H., & Kim, G. H. (2012), “Common fixed point theorems for (y, f) -weak nonlinear contraction in partially ordered sets”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:62, 1-12.
8. Kadelburg, Z. & Radenovic, S. (2014), “Fixed point and tripled fixed point theorems under Pata-type conditions in ordered metric spaces”, *Int. J. Anal. Appl.*, 6(1), 113-122.
9. Pata, V. (2011), “A fixed point theorem in metric spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 10, 299-305.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 29-01-2016; ngày phản biện đánh giá: 10-6-2016;
ngày chấp nhận đăng: 13-6-2016)