TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNGTRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN

TRẦN MINH THUYẾT[1], PHẠM GIA KHÁNH[2]

1. Phần mở đầu

Xét bài toán sau: Tìm một cặp các hàm (u,P) thoả:

$$u_{tt}-u_{xx}+b(x,t)f(u,u_t)=F(x,t),\quad x\in\Omega=(0,1),\quad 0<t<T, \tag{1.1}$$

$$u_x(0,t)=P(t), \tag{1.2}$$

$$u(1,t)=0, \tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x), \tag{1.4}$$

trong đó u_0,u_1,b,f,F là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau. Hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa một phương trình tích phân phi tuyến sau đây:

$$P(t)=g(t)+H(u(0,t))-\int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{1.5}$$

trong đó $g,\ H,\ k$ là các hàm cho trước.

Trong [2], Áng và Định đã thiết lập định lí tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục cho bài toán giá trị biên và ban đầu (1.1)-(1.4) với u_0,u_1,P là các hàm cho trước và

$$\begin{cases} F(x,t)=0,\ b(x,t)=1, \\ f(u,u_t)=|u_t|^{\alpha-1}u_t,\ (0<\alpha<1). \end{cases} \tag{1.6}$$

Bằng sự tổng quát hoá của [2], Long và Định [7, 10, 11], Long và Thuyết [13], Long và Dũng [14], Long, Tâm và Trúc [15], Hóa và Ngọc [8] đã xét bài toán (1.1), (1.3), (1.4) với $b\equiv 1$ và liên kết với điều kiện biên không thuần nhất tại $x=0$ có dạng:

$$u_x(0,t)=g(t)+H(u(0,t))-\int_0^t k(t-s,u(0,s))ds. \tag{1.7}$$

Các tác giả trên đã lần lượt cứu xét nó trong [10] với $k\equiv 0$, $H(s)=hs$, trong đó $h>0$; trong [7] với $k\equiv 0$; trong [10, 15] với $H(s)=hs$, trong đó $h>0$. Một số tính chất về

---

[1] Tiến sĩ, Khoa Thống Kê – Toán, Trường Đại học Kinh tế TP.HCM.

[2] Thạc sĩ, Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ.

compact và liên thông của tập nghiệm của bài toán (1.1)-(1.5) ứng với $b \equiv 1$ cũng được xét trong [8].

Trong trường hợp $b \equiv 1$, $H(s)=hs$, trong đó h > 0, bài toán (1.1)-(1.5) được thành lập từ bài toán (1.1)-(1.4), trong đó, hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thỏa một bài toán Cauchy sau đây cho một phương trình vi phân thường:

$$P''(t) + \omega^2 P(t) = hu_{tt}(0,t), \quad 0 < t < T, \tag{1.8}$$

$$P(0) = P_0, \; P'(0) = P_1, \tag{1.9}$$

trong đó $\omega > 0$, $h \geq 0$, P_0, P_1 là các hằng số dương cho trước [11].

Trong [1], An và Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.4), (1.8), (1.9) với $u_0=u_1=P_0=0$ và với $b(x,t)f(u,u_t)-F(x,t)=f_1(u,u_t)$ tuyến tính, nghĩa là $f_1(u,u_t)=Ku+\lambda u_t$, trong đó K, λ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp sau, bài toán (1.1)-(1.4), (1.8) và (1.9) là mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và thanh đàn hồi nhớt tuyến tính tựa trên một nền cứng ([1,19]). Như vậy bài toán nghiên cứu ở đây là phi tuyến tương tự bài toán được xét trong [1,19].

Trong trường hợp mà $b(x,t)f(u,u_t) - F(x,t) = |u_t|^\alpha sign(u_t)$, bài toán (1.1)-(1.4), (1.8) và (1.9) mô tả sự va chạm của một vật rắn và thanh đàn hồi nhớt tuyến tính với ràng buộc đàn hồi phi tuyến ở mặt bên, ràng buộc liên kết với lực cản ma sát nhớt.

Từ (1.8), (1.9) ta biểu diễn $P(t)$ theo P_0, P_1, ω, h, $u_{tt}(0,t)$ và sau đó tích phân từng phần ta thu được:

$$P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{1.10}$$

trong đó:

$$g(t) = (P_0 - hu_0(0))\cos\omega t + (P_1 - hu_1(0))\frac{\sin\omega t}{\omega}, \tag{1.11}$$

$$k(t) = h\omega\sin\omega t. \tag{1.12}$$

Bằng cách khử ẩn hàm $P(t)$, ta thay thế điều kiện biên (1.2) bởi:

$$u_x(0,t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \tag{1.13}$$

Khi đó, chúng ta đưa bài toán (1.1)-(1.4), (1.8), (1.9) về (1.1)-(1.4), (1.10)-(1.12) hay (1.1), (1.3), (1.4), (1.11)-(1.13).

Trong [20], chúng tôi chứng minh bài toán (1.1)-(1.5) có duy nhất nghiệm yếu toàn cục và nghiệm này cũng ổn định với các hàm g, H và k.

Cùng loại như trên, bài toán cũng được xét bởi Long, Út và Trúc [16], Long, Định và Diễm [17].

Bài này gồm 2 phần. Trong phần 1, với một số giả thiết thích hợp trên các dữ kiện u_0, u_1, b, f, F, g, H, k, chúng tôi chỉ ra bài toán (1.1)-(1.5) có duy nhất một nghiệm yếu toàn cục. Chứng minh kết quả này được dựa vào phương pháp Galerkin liên kết với các đánh giá tiên nghiệm cùng với kĩ thuật hội tụ yếu và về tính compact. Ở phần này, định lí Schauder cũng được sử dụng trong việc chứng minh tồn tại nghiệm xấp xỉ Galerkin [20]. Một điều chú ý ở đây rằng phương pháp xấp xỉ tuyến tính trong các bài báo [6, 12, 15, 18] không sử dụng được trong bài này và trong các bài báo [2, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 14]. Phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm (u, P) của bài toán (1.1)-(1.5) là ổn định đối với các hàm b, F, g, H và k. Kết quả thu được ở trên đã tổng quát hoá tương đối các kết quả trong [1-3, 5-7, 10-20].

2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Đầu tiên, ta đặt các kí hiệu sau $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $T > 0$, và bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng: $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Để cho gọn, ta kí hiệu lại như sau $L^p(\Omega) = L^p$, $H^m(\Omega) = H^m$, $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}$. Chuẩn trong L^2 được kí hiệu $\|.\|$. Ta cũng dùng kí hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cho tích vô hướng trong L^2 hoặc để chỉ cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ta kí hiệu $\|.\|_X$ để chỉ chuẩn trong một không gian Banach X và gọi X' không gian đối ngẫu của X. Ta ký hiệu $L^p\left(0,T;X\right)$, $1\le p\le\infty$, là không gian các lớp tương đương chứa hàm $u:\left(0,T\right)\to X$ đo được, sao cho:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{với } 1\le p<\infty,$$

hay

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\|u(t)\|_X, \quad \text{với } p=\infty.$$

Ta định nghĩa:

$$V = \{v\in H^1 : v(1)=0\} \text{ và } \langle u,v\rangle_V = \langle u',v'\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

V là không gian con đóng của H^1, do đó, V là không gian Hilbert đối với tích vô hướng của H^1. Mặt khác, trên V, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{\langle v',v'\rangle}$ là hai chuẩn tương đương. Hơn nữa, phép nhúng $V\to C^0(\overline{\Omega})$ là compact và $\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})}\le \|v\|_V$ với mọi $v\in V$. Mặt khác, nếu ta đồng nhất L^2 với đối ngẫu của nó, ta có $V\to L^2 \text{Đ} V'$, với các nhúng liên tục và nằm trù mật.

Ta cũng dùng các kí hiệu u(t), $u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t)$, $u_x(t) = \nabla u(t)$, $u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt.

Ta thành lập các giả thiết sau:

(A_1) $b \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,+\infty))$, $b \geq 0$;

(A_2) $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L^2$;

(A_3) $g \in H^1(0,T)$ $\forall T > 0$;

(A_4) $k \in H^1(0,T)$ $\forall T > 0$ và $k(0) = 0$;

(A_5) $F \in L^2(Q_T)$, $Q_T = \Omega\times(0,T)$;

(A_6) Hàm số $H \in C^1(\mathbb{R})$ thoả $H(0) = 0$ và tồn tại một hằng số $h_0 > 0$ sao cho:

$$\hat{H}(\eta) = \int_0^\eta H(s)ds \geq -h_0, \text{ với mọi } \eta \in IR;$$

(F) Hàm số f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thoả $f(0,0) = 0$ và các điều kiện:

(F_1) f là đơn điệu không giảm đối với biến thứ hai, tức là

$$(f(u,v) - f(u,\tilde{v}))(v-\tilde{v}) \geq 0,\ \forall u,\ v,\ \tilde{v} \in \mathbb{R}.$$

Tồn tại hai hằng số α, $\beta \in (0,1]$ và hai hàm số liên tục B_1, B_2: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sao cho:

(F_2) $\left|f(u,v) - f(u,\tilde{v})\right| \leq B_1(|u|)\left|v-\tilde{v}\right|^\alpha$ $\forall u,\ v,\ \tilde{v} \in \mathbb{R}$,

(F_3) $\left|f(u,v) - f(\tilde{u},v)\right| \leq B_2(|v|)\left|u-\tilde{u}\right|^\beta$ $\forall u,\ \tilde{u},\ v \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có định lí sau:

Định lí 1. *Giả sử* (A_1)-(A_6) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó với mọi* $T > 0$, *tồn tại một nghiệm yếu* (u,P) *của bài toán* (1.1)-(1.5) *sao cho:*

$$u \in L^\infty(0,T;V),\ u_t \in L^\infty(0,T;L^2),\ u_t(0,t) \in L^2(0,T), \tag{2.1}$$

$$P \in H^1(0,T). \tag{2.2}$$

Hơn nữa, nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và các hàm số H,* B_2 *thoả thêm các điều kiện:*

(A_6') $H \in C^2(\mathbb{R})$, $H'(s) > -1$ $\quad \forall s \in \mathbb{R}$,

(F_4) $B_2(|v|) \in L^2(Q_T)$ $\quad \forall v \in L(Q_T), \forall T > 0.$

Khi đó nghiệm bài toán là duy nhất.

Chứng minh Định lí 1 được chứng minh chi tiết trong [20].■

Chú thích 1. Kết quả này mạnh hơn kết quả trong [10]. Thật vậy, tương ứng với cùng bài toán (1.1) – (1.5) với $k(t) \equiv 0$ và $H(s) = hs$, $h>0$, các giả thiết sau đây đã dùng trong [10] mà không cần thiết sử dụng ở đây:

$$0 < \alpha < 1,\ B_1(|u|) \in L^{2/(1-\alpha)}(Q_T) \quad \forall u \in L^\infty(0,T;V),\ \forall T > 0, \tag{2.3}$$

B_1, B_2 là các hàm không giảm. (2.4)

Kết quả thu được ở đây đã tổng quát hoá kết quả trong [13] và chứa đựng trường hợp $b(x,t) = 1$, $F(x,t) = 0$ như là một trường hợp riêng.

Chú thích 2. Điều kiện $k(0) = 0$ trong (A_4) chỉ là kĩ thuật, ta có thể bỏ qua.

Trong trường hợp riêng của H với $H(s)=hs$, $h>0$, định lí sau đây là hệ quả của Định lí 1.

Định lí 2. *Giả sử* (A_1)-(A_4) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó, với mỗi* $T>0$, *bài toán* (1.1)-(1.5) *có ít nhất một nghiệm yếu* (u,P) *thỏa* (2.1), (2.2).

Hơn nữa nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và hàm* B_2 *thỏa* (F_4), *khi đó nghiệm này là duy nhất.* ■

Định lí 2 cho cùng kết quả trong [11] nhưng giả thiết "B_1 không giảm" đã dùng trong [11] thì không cần thiết ở đây.

Trong trường hợp riêng với $k(t) \equiv 0$, kết quả sau đây là hệ quả của Định lí 1.

Định lí 3. *Giả sử* (A_1), (A_2), (A_3), (A_5) *và* (F_1)-(F_3) *đúng. Khi đó với mỗi* $T>0$, *bài toán* (1.1)-(1.4) *tương ứng với* $P = g$ *có ít nhất một nghiệm yếu thoả* (2.1).

Hơn nữa, nếu $\beta = 1$ *trong* (F_3) *và nếu các hàm* H *và* B_2 *lần lượt thoả các giả thiết* (A_6') *và* (F_4), *khi đó nghiệm này là duy nhất.*

Chú thích 3. Giống như chú thích 2, Định lí 3 cũng cho cùng kết quả trong [7] nhưng giả thiết: "B_1 không giảm" đã dùng trong [7] thì không cần thiết ở đây.

3. Sự ổn định của nghiệm

Trong phần này, ta giả sử rằng $\beta = 1$ trong (F_3) và các hàm H, B_2 lần lượt thoả (A_6'), (F_4). Do Định lí 1 bài toán (1.1)-(1.5) có nghiệm duy nhất (u,P) phụ thuộc vào g, k, H:

$$u = u(b,F,g,k,H),\ P = P(b,F,g,k,H), \tag{3.1}$$

trong đó b, F, g, k, H thoả các giả thiết (A_1), (A_3)-(A_6) và u_0, u_1, f là các hàm cố định thoả (A_2), (F_1)-(F_4).

Ta đặt:

$$\mathcal{H}(h_0, H_0) = \Big\{ H \in C^2(\mathbb{R}) : H(0) = 0,\ \int_0^x H(s)ds \geq -h_0,\ H'(x) > -1, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sup_{|s|\leq M}\left(|H(s)| + |H'(s)|\right) \leq H_0(M),\ \forall M > 0 \Big\},$$

trong đó $h_0 > 0$ là hằng số cho trước và $H_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ là hàm số cho trước.

Đặt

$$\mathcal{F} = C^0\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)\times L^2(Q_T])\times H^1(0,T)\times H^1(0,T).$$

Khi đó ta có định lí sau.

Định lí 4. *Giả sử* $\beta = 1$ *và* (A_2), (F_1)-(F_4) *đúng. Khi đó, với mỗi* $T > 0$, *nghiệm của bài toán* (1.1)-(1.5) *là ổn định đối với dữ kiện* b, F, g, k, H, *theo nghĩa:*

Nếu

$(b,F,g,k,H),\ (b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)\in\ \times\mathcal{H}(h_0,H_0),\ b,b_j\geq 0,\ k_j(0)=k(0)=0,$

sao cho

$(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)\to(b,F,g,k,H)$ *trong* $\times C^1([-M,M])$, *mạnh khi* $j\to+\infty$, *với mọi* $M>0$. (3.2)

Khi đó:

$$\left(u_j,u_j',u_j(0,t),P_j\right)\to\left(u,u',u(0,t),P\right)\ \textit{trong} \tag{3.3}$$

$$L^\infty(0,T;V)\times L^\infty(0,T;L^2)\times C^0([0,T])\times C^0([0,T])\ \textit{mạnh, khi}\ j\to+\infty,$$

trong đó $u_j=u(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j),\ P_j=P(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)$.

Chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng, nếu các dữ kiện (b,F,g,k,H) thoả

$$\|b\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\leq B_0,\ \|F\|_{L^2(Q_T)}\leq F_0,\ \|g\|_{H^1(0,T)}\leq G_0,\ \|k\|_{H^1(0,T)}\leq K_0,\ H\in\mathcal{H}(h_0,H_0), \tag{3.4}$$

trong đó B_0, F_0, G_0, K_0 là các hằng số. Khi đó, các đánh giá tiên nghiệm cho các dãy $\{u_m\}$ và $\{P_m\}$ trong chứng minh của Định lí 2.1 thoả:

$$\|u_m'(t)\|^2+\|u_m(t)\|_V^2\leq C_T^2,\forall t\in[0,T],\forall T>0, \tag{3.5}$$

$$\int_0^t|u_m'(0,s)|^2\,ds\leq C_T^2,\forall t\in[0,T],\forall T>0, \tag{3.6}$$

$$\int_0^t|P_m'(s)|^2\,ds\leq C_T^2,\forall t\in[0,T],\forall T>0, \tag{3.7}$$

trong đó C_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T, u_0, u_1, f, B_0, F_0, G_0, K_0, h_0 (độc lập với b, F, g, k, h). Do đó, giới hạn (u,P) trong các không gian hàm thích hợp của dãy $\{(u_m,P_m)\}$ là nghiệm của bài toán (1.1)–(1.5) thoả các đánh giá tiên nghiệm (3.5)-(3.7). Bây giờ do (3.2) ta có thể giả sử rằng tồn tại các hằng số $B_0>0,\ F_0>0,\ G_0>0,\ K_0>0$ sao cho các hàm (b_j,F_j,g_j,k_j,H_j) thoả (3.4) với $(b,F,g,k,H)=(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)$. Khi đó, nhờ các chú ý ở trên, ta suy ra rằng các nghiệm (u_j,P_j) của bài toán (1.1) – (1.5) tương ứng với $(b,F,g,k,H)=(b_j,F_j,g_j,k_j,H_j)$ thoả:

$$\|u_j'(t)\|^2+\|u_j(t)\|_V^2\leq C_T^2,\ \forall t\in[0,T],\ \forall T>0, \tag{3.8}$$

$$\int_0^t|u_j'(0,s)|^2\,ds\leq C_T^2,\forall t\in[0,T],\ \forall T>0, \tag{3.9}$$

$$\int_0^t|P_j'(s)|^2\,ds\leq C_T^2,\ \forall t\in[0,T],\forall T>0. \tag{3.10}$$

Đặt

$$\widetilde{b}_j = b_j - b,\ \widetilde{F}_j = F_j - F,\ \widetilde{g}_j = g_j - g,\ \widetilde{k}_j = k_j - k,\ \widetilde{H}_j = H_j - H. \tag{3.11}$$

Khi đó, $v_j = u_j - u$ và $Q_j = P_j - P$, thoả bài toán sau:

$$\begin{cases} v_j'' - v_{jxx} + \chi_j = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_{jx}(0,t) = Q_j(t),\ v_j(1,t) = 0, \\ v_j(x,0) = v_j'(x,0) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \chi_j = b_j(x,t) f(u_j, u_j') - b(x,t) f(u,u') - \tilde{F}_j(x,t), \\ Q_j(t) = \hat{g}_j(t) + H(u_j(0,t)) - H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s) v_j(0,s)ds, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\hat{g}_j(t) = \tilde{g}_j(t) + \tilde{H}_j(u_j(0,t)) - \int_0^t \tilde{k}_j(t-s) u_j(0,s)ds. \tag{3.14}$$

Do Bổ đề 2.6 với $u_0 = u_1 = 0$, $F = 0$, $\chi = \chi_j$, $P = Q_j$ [20, trang 25], ta có:

$$\left\|v_j'(t)\right\|^2 + \left\|v_j(t)\right\|_V^2 + 2\int_0^t Q_j(s) v_j'(0,s)ds + 2\int_0^t \left\langle \chi_j(s), v_j'(s)\right\rangle ds = 0. \tag{3.15}$$

Thay (3.12), (3.14) vào (3.15), ta nhận được bất đẳng thức[20]

$$\begin{aligned} \left\|v_j'(t)\right\|^2 + \left\|v_j(t)\right\|_V^2 + m_1 v_j^2(0,t) &\le 2\varepsilon S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{g}_j(t)\right|^2 + \int_0^t \left|\hat{g}'_j(s)\right|^2 ds \\ &+ \left\|\widetilde{b}_j\right\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}^2 \int_0^t \left\|f\left(u(s),u'(s)\right)\right\|^2 \sqrt{S_j(s)}ds \\ &+ \int_0^t \left\|\widetilde{F}_j(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \widetilde{R}_j(\varepsilon,s) S_j(s)ds \equiv \eta_j(t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

trong đó:

$$S_j(t) = \left\|v_j'(t)\right\|^2 + \left\|v_j(t)\right\|_V^2 + v_j^2(0,t), \tag{3.17}$$

$$m_1 = \min_{|s|\le C_T} H'(s) > -1,\quad m_2 = \max_{|s|\le C_T} |H''(s)|. \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j(\varepsilon,s) = 3 + \frac{1}{\varepsilon}\|k\|_{L^2(0,T)}^2 + 2\sqrt{T}\left\|k'\right\|_{L^1(0,T)} + m_2\left(\left|u'(0,s)\right| + \left|u_j'(0,s)\right|\right) \\ + \left\|b_j\right\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} \left\|B_2\left(\left|u'(s)\right|\right)\right\|. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ta chú ý rằng $v_j^2(0,t) \le \left\|v_j(t)\right\|_V^2$, do đó:

$$\left(1 + m_1\right) v_j^2(0,t) \le \left\|v_j'(t)\right\|^2 + \left\|v_j(t)\right\|_V^2 + m_1 v_j^2(0,t) \le \eta_j(t). \tag{3.20}$$

Nhân hai vế của (3.20) bởi một số δ > 0 và cộng với (3.16), ta có:

$$\begin{aligned}
&\|v_j'(t)\|^2 + \|v_j(t)\|_V^2 + [(1+m_1)\delta + m_1]v_j^2(0,t) \\
&\le 2(1+\delta)\varepsilon S_j(t) + (1+\delta)\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\hat{g}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} + \|\hat{g}_j'\|^2_{L^2(0,T)}\right) \\
&+ (1+\delta)\left(\|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|f(u(s),u'(s))\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \\
&+ (1+\delta)\int_0^t \widetilde{R}_j(\varepsilon,s)S_j(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

với mọi ε > 0, δ > 0 và $t \in [0,T]$. Chọn δ > 0 và ε > 0 sao cho $(1+m_1)\delta + m_1 \ge 1$, $2\varepsilon(1+\delta) \le \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
S_j(t) &\le 2(1+\delta)\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\hat{g}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} + \|\hat{g}_j'\|^2_{L^2(0,T)}\right) \\
&+ 2(1+\delta)\left(\|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|f(u(s),u'(s))\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \\
&+ 2(1+\delta)\int_0^t \widetilde{R}_j(\varepsilon,s)S_j(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Chú ý rằng $H^1(0,T) \to C^0([0,T])$, nên từ (3.20), ta có:

$$\begin{aligned}
S_j(t) &\le 2(1+\delta)\left(\frac{1}{\varepsilon}\hat{C}\|\hat{g}_j\|^2_{H^1(0,T)} + \|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|f(u(s),u'(s))\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \\
&+ 2(1+\delta)\|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)} + 2(1+\delta)\int_0^t \widetilde{R}_j(\varepsilon,s)S_j(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

trong đó $\hat{C}_T^{(1)}$ là một hằng số phụ thuộc vào T. Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (3.22) rằng:

(3.24)

$$\begin{aligned}
S_j(t) &\le 2(1+\delta)\left(\frac{1}{\varepsilon}\hat{C}_T^{(1)}\|\hat{g}_j\|^2_{H^1(0,T)} + \|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|f(u(s),u'(s))\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \\
&\times \exp\left(2(1+\delta)\int_0^T \widetilde{R}_j(\varepsilon,s)ds\right),
\end{aligned}$$

với mọi $t \in [0,T]$.

Chú ý rằng :

$$\int_0^T \widetilde{R}_j(\varepsilon,s)ds \le 3T + \frac{1}{\varepsilon}T\|k\|^2_{L^2(0,T)} + 2T\sqrt{T}\|k'\|^2_{L^2(0,T)}$$
$$+T\|b_j\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|B_2(|u'|)\|_{L^2(Q_T)} + m_2\sqrt{T}C_T \equiv \hat{C}_T^{(2)}. \tag{3.25}$$

Thay (3.25) vào (3.24), ta thu được:

$$S_j(t) \le 2(1+\delta)\left(\frac{1}{\varepsilon}\hat{C}_T^{(1)}\|\hat{g}_j\|^2_{H^1(0,T)} + \|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])}\|f(u(s),u'(s))\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)}\right)$$
$$\times\exp\left(2(1+\delta)\hat{C}_T^{(2)}\right) \tag{3.26}$$
$$\le \hat{C}_T^{(3)}\left[\|\hat{g}_j\|^2_{H^1(0,T)} + \|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} + \|\widetilde{F}_j\|^2_{L^2(Q_T)}\right]$$

với mọi $t\in[0,T]$.

$$|Q_j(t)| \le |\hat{g}_j(t)| + \max_{|s|\le C_T}|H'(s)|\sqrt{S_j(t)} + \|k\|_{L^2(0,T)}\left(\int_0^t S_j(s)ds\right)^{1/2}. \tag{3.27}$$

Ta dùng một lần nữa phép nhúng $H^1(0,T)\to C^0([0,T])$. Khi đó, ta suy từ (3.26) và (3.27) rằng:

$$\|Q_j\|_{C^0([0,T])} \le \hat{C}_T^{(4)}\left[\|\hat{g}_j\|_{H^1(0,T)} + \|\widetilde{b}_j\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} + \|\widetilde{F}_j\|_{L^2(Q_T)}\right]. \tag{3.28}$$

Do $\lim_{j\to+\infty}\|\widetilde{b}_j\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} = 0$ nên ở bước cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\lim_{j\to+\infty}\|\hat{g}_j\|^2_{H^1(0,T)} = 0. \tag{3.29}$$

Thật vậy, từ (3.2), (3.11), (3.14) kết hợp với (3.9), ta suy ra bất đẳng thức sau:

$$\|\hat{g}_j\|_{H^1(0,T)} \le \|\widetilde{g}_j\|_{H^1(0,T)} + TC_T\|\widetilde{k}_j\|_{H^1(0,T)} + \sqrt{T+C_T^2}\|\widetilde{H}_j\|_{C^1([-C_T,C_T])}. \tag{3.30}$$

Định lí 4 được chứng minh hoàn tất. ∎

Chú thích 4. Trong [20] chúng tôi đã chứng minh nghiệm của bài toán (1.1)-(1.5) là ổn định đối với ba hàm g, k, H, tức là:

Nếu

$$(g_j,k_j,H_j)\to(g,k,H) \text{ trong } H^1(0,T)\times H^1(0,T)\times C^1([-M,M]) \text{ mạnh,}$$

khi $j\to+\infty$, với mọi $M>0$.

Khi đó:

$$(u_j,\ u_j',\ u_j(0,t), P_j)\to(u,\ u',\ u(0,t),\ P)$$

trong $\quad L^\infty(0,T;V)\times L^\infty(0,T;L^2)\times C^0([0,T])\times C^0([0,T])$

mạnh, khi $j\to+\infty$, trong đó $u_j = u(b,F,g_j,k_j,H_j)$, $P_j = P(b,F,g_j,k_j,H_j)$, b, F là hàm cố định cho trước thoả (A_1), (A_5).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam, **XIII** (2), 1-7.

[2] Đặng Đình Áng, Alain Phạm Ngọc Định (1998), *Mixed problem for some semilinear wave equation with a nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **12**, 581-592.

[3] R. A. Adams (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork, 1975.

[4] Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43**, 547-561.

[5] Alain Phạm Ngọc Định (1983), *Sur un problème hyperbolique faiblement nonlinéaire en dimension* 1, Demonstratio Math. **16**, 269-289.

[6] Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19**, 45-63.

[7] Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long (1997), *The semilinear wave equation associated with a nonlinear boundary*, Demonstratio Math. **30**, 557-572.

[8] Lê Hoàn Hóa, Lê Thị Phương Ngọc (2006), *The connectivity and compactness of solution set of an integral equation and weak solution set of an initial boundary value problem*, Demonstratio Math., **39**(to appear).

[9] J. L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris.

[10] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1992), *On the quasilinear wave:* $u_{tt} - \Delta u + f(u,u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19**, 613-623.

[11] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data,* Nonlinear Anal. **24**, 1261-1279.

[12] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm (1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29**, 1217-1230.

[13] Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36**, No.4, 915-938.

[14] Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng (2004), *A nonlinear wave equation associated with a nonlinear integral equation involving boundary value*, Electronic J. Diff. Equa. **2004**, No. 103, pp.1-21. ISSN: 1072-6691. URL:http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.

[15] Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math., **38**, No.2, 365-386.

[16] Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **63**, No. 2, 198 - 224 .

[17] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems, (đã nhận đăng).

[18] E.L.Ortiz, Alain Phạm Ngọc Định (1987), *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. 18, 452-464.

[19] Nguyễn Phú Vinh (2003), *Dao động của vật rắn và thanh đàn hồi với ràng buộc đàn hồi nhớt ở mặt bên*, Tạp chí Phát triển Khoa học Công nghệ, ĐHQG Tp. HCM, Tập 6, Số 12, 5-14.

[20] Phạm Gia Khánh (2005), *Phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên chứa phương trình tích phân phi tuyến*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Cần Thơ, 52 trang.

Tóm tắt:

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNGTRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN

Chúng tôi xét bài toán biên - giá trị đầu như sau:

$$u_{tt} - u_{xx} + b(x,t)f(u,u_t) = F(x,t), \quad x \in \Omega = (0,1), \quad 0 < t < T,$$
$$u_x(0,t) = P(t), \; u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x),$$

trong đó u_0, u_1, b, f, F *là các hàm cho trước, ẩn hàm* $u(x,t)$ *và giá trị biên chưa biết* $P(t)$ *thoả một phương trình tích phân phi tuyến sau đây:*

$$P(t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

trong đó g, H, k *là các hàm cho trước. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và có duy nhất một nghiệm yếu cho bài toán, và bàn về tính ổn định của nghiệm (u,P) đối với các hàm* b, F, g, H *và k. Trong chứng minh, phương pháp Galerkin được sử dụng.*

Abstract:

Stability of solutions of a nonlinear wave equation associated with a nonlinear integral equation

We consider the following initial-boundary value problem:

$$u_{tt} - u_{xx} + b(x,t)f(u,u_t) = F(x,t), \quad x \in \Omega = (0,1), \quad 0 < t < T,$$
$$u_x(0,t) = P(t), \; u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x),$$

where u_0, u_1, b, f, F *are given functions, the unknown function* $u(x,t)$ *and the unknown boundary value* $P(t)$ *satisfy the following nonlinear integral equation:*

$$P(t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

where g, H, k *are given functions. We prove the stability and unique of the solution (u,P) with respect to the functions* b, F, g, H *and k. The method of Galerkin was used.*