VÀI VÍ DỤ VỀ CÁC MD5 – ĐẠI SỐ VÀ CÁC MD5 – PHÂN LÁ ĐO ĐƯỢC LIÊN KẾT VỚI CÁC MD5 – NHÓM TƯƠNG ỨNG

LÊ ANH VŨ [1], NGUYỄN CÔNG TRÍ [2]

Mở đầu

Khái niệm về không gian phân lá lần đầu tiên xuất hiện khi khảo sát các lời giải của một hệ khả tích các phương trình vi phân thường. Kể từ công trình của Reeb (xem [4]) năm 1952, các phân lá mới thực sự trở thành đối tượng nghiên cứu mang tính chất hình học và nhanh chóng phát triển thành ngành tôpô phân lá – một ngành thuộc lĩnh vực Hình học – Tôpô.

Năm 1982, A. Connes (xem [1]) đưa ra khái niệm độ đo hoành rất thích hợp đối với việc nghiên cứu các phân lá. Ta gọi mỗi phân lá với một độ đo hoành đã cho trên nó là phân lá đo được. Tôpô phân lá tìm được nhiều ứng dụng trong Toán học nói riêng, trong khoa học tự nhiên nói chung, đặc biệt là trong Vật lý, Cơ học.

Năm 1980, khi nghiên cứu biểu diễn nhóm Lie và phương pháp quỹ đạo của Kirillov (xem [3]), Đỗ Ngọc Diệp (xem [2]) đã đề nghị xét một lớp con các nhóm Lie và đại số Lie thực giải được mà rất đơn giản về phương diện phân tầng các K–quỹ đạo (quỹ đạo Kirillov). Đó là lớp các MD–nhóm và MD–đại số. Một nhóm Lie thực giải được mà các K–quỹ đạo của nó hoặc không chiều hoặc chiều cực đại được gọi là MD–nhóm. Khi số chiều cực đại đúng bằng số chiều của nhóm thì nhóm còn được gọi là $\overline{MD}$–nhóm. Đại số Lie của một MD–nhóm (tương ứng, $\overline{MD}$–nhóm) được gọi là MD–đại số (tương ứng, $\overline{MD}$–đại số).

---

[1] Tiến sĩ, Khoa Toán – Tin học Trường ĐHSP TP. HCM.

[2] Khoa Toán thống kê Trường ĐH Kinh tế TP. HCM.

Năm 1982, Hồ Hữu Việt (xem [5]) đã phân loại triệt để lớp các $\overline{MD}$-đại số. Lớp này chỉ gồm các đại số Lie giao hoán n chiều $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$), đại số Lie 2 chiều aff**R** và đại số Lie 4 chiều aff**C**.

Việc phân loại lớp các MD–đại số cho đến nay vẫn còn là một bài toán mở. Để đơn giản hơn, ta phân nhỏ lớp các MD–nhóm và MD–đại số theo số chiều. Tức là xét các lớp con MDn– nhóm (và MDn–đại số) gồm các MD–nhóm (và MD–đại số) n chiều. Vì tất cả các đại số Lie dưới 4 chiều đã được liệt kê hết từ lâu nên ta chỉ xét các lớp MDn–nhóm và MDn–đại số với $n \geq 4$.

Năm 1984, Đào Văn Trà (xem [6]) đã liệt kê toàn bộ lớp các MD4–đại số. Đến năm 1990, lớp các MD4–đại số được Lê Anh Vũ (xem [7], [9]) phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie). Cho đến thời điểm bài báo này xuất hiện, lớp các MD5–đại số vẫn chưa được liệt kê và phân loại đầy đủ.

Về phương diện hình học, nếu bỏ đi các K– quỹ đạo 0 chiều, họ các K–quỹ đạo chiều cực đại của mỗi MD–nhóm liên thông có những tính chất tương tự như họ các lá của một phân lá. Điều này cho phép ta kết hợp việc nghiên cứu các MD–nhóm và MD–đại số với các phân lá.

Năm 1990, tác giả thứ nhất đã chứng minh được rằng họ các K– quỹ đạo chiều cực đại của mỗi MD4–nhóm liên thông bất khả phân đều tạo thành các phân lá đo được mà được gọi là các MD4–phân lá tương ứng với nhóm đó. Lớp các MD4–phân lá đã được tác giả thứ nhất phân loại tôpô triệt để, cho thêm một phép mô tả chúng bởi tác động của nhóm Lie giao hoán $\mathbf{R}^2$, đồng thời đặc trưng các C*– đại số tương ứng với các MD4–phân lá đó bằng phương pháp KK–song hàm tử (xem [8]). Nói một cách vắn tắt, bài toán nghiên cứu lớp *MD4* xem như đã được giải quyết trọn vẹn về phương diện Tôpô – Hình học và đại số toán tử. Từ nay, có thể bắt đầu "tấn công" lớp MDn với $n \geq 5$.

Tháng 12 năm 2003, tác giả thứ nhất đã giới thiệu ba ví dụ về MD5–đại số và MD5–nhóm liên thông đơn liên tại hội nghị quốc tế về Đại số – Tôpô – Hình học ở Bangkok, Thailand và công bố trong bài [9]. Các kết quả đã biết về lớp MD4 được chuyển sang cho ba ví dụ này với những cải biên thích hợp.

Bài báo này nhằm giới thiệu thêm một vài ví dụ về các đại số và nhóm Lie thuộc lớp MD5 (khác với ba ví dụ đã xét trong [9]) rồi chuyển các kết quả đã đạt được từ lớp các MD4–nhóm và MD4–đại số sang cho chúng. Cụ thể, bài toán cơ bản được chúng tôi nghiên cứu bao gồm các bước sau đây:

Bước 1: Liệt kê ra một số MD5–đại số khác với ba ví dụ đã được nêu trong [9].

Bước 2: Mô tả bức tranh hình học các K–quỹ đạo của mỗi MD5–nhóm liên thông đơn liên ứng với MD5–đại số đã liệt kê.

Bước 3: Khảo sát tôpô phân lá của các MD5–phân lá đo được liên kết với mỗi MD5–nhóm đã xét.

Các kết quả chính mà chúng tôi nhận được là:

1. *Liệt kê được bốn MD5–đại số và một họ vô hạn các MD5–đại số phụ thuộc một tham số thực khác 0 và 1. Tất cả các MD5–đại số này đều không đẳng cấu.*
2. *Mô tả bức tranh hình học các K–quỹ đạo của tất cả các MD5–nhóm liên thông, đơn liên ứng với các MD5–đại số đã liệt kê.*
3. *Chứng tỏ được rằng, đối với mỗi MD5–nhóm liên thông đơn liên đã xét, họ các K–quỹ đạo chiều cực đại lập thành một phân lá đo được. Các phân lá tạo thành được gọi là các MD5–phân lá. Mô tả chi tiết tôpô phân lá của các MD5–phân lá đã xét đồng thời đặc trưng một cách giải tích các C*– đại số liên kết với từng MD5–phân lá đó.*

Việc liệt kê ra các MD5–đại số và mô tả tôpô phân lá của các MD5–phân lá là những tính toán thuần túy đại số và giải tích dựa trên những dự cảm trực giác hình học. Phương pháp mô tả hình học các K–quỹ đạo của các MD5–nhóm đã xét là phương pháp đã được giới thiệu đầy đủ trong tài liệu [8].

Chúng tôi xin chân thành cám ơn Giáo sư Tiến sĩ khoa học Đỗ Ngọc Diệp, người thầy đáng kính luôn dành cho chúng tôi sự động viên, giúp đỡ quý báu trong nghiên cứu khoa học suốt nhiều năm qua. Chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm và Tổ Hình học khoa Toán – Tin học, Phòng Khoa học Công nghệ và Sau đại học, Phòng Kế hoạch – Tài chính Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã giúp đỡ, tạo điều kiện vật chất và tinh thần cho chúng tôi hoàn thành bài báo khoa học này.

Chúng tôi rất hân hạnh được cám ơn Trường Đại học Sư phạm Tây Nam Trung Quốc, đặc biệt là Giáo sư Karping Shum và Giáo sư Guiyun Chen

đã mời, tài trợ cho tác giả thứ nhất tham dự và đọc báo cáo kết quả nghiên cứu tại Hội thảo Toán học quốc tế tại Trùng Khánh, Trung Quốc tháng 10 / 2004.

§1. Vài ví dụ về MD5 – đại số và bức tranh các k – quỹ đạo của các MD5 – nhóm liên thông đơn liên tương ứng

Suốt bài này, G luôn là ký hiệu để chỉ một nhóm Lie liên thông đơn liên 5 chiều và $\mathcal{G}$ là đại số Lie của G. Với tư cách là một không gian vectơ thực 5 chiều, $\mathcal{G} \equiv \mathbf{R}^5$ bởi một cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ đã chọn cố định trong $\mathcal{G}$. Không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$ được ký hiệu là $\mathcal{G}^*$. Đương nhiên $\mathcal{G}^* \equiv \mathbf{R}^5$ bởi cơ sở đối ngẫu $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ trong $\mathcal{G}$.

1.1. Liệt kê vài MD5 – đại số

Ta xét các đại số Lie $\mathcal{G}_{5,1,1}$, $\mathcal{G}_{5,1,2}$, $\mathcal{G}_{5,1,3}$, $\mathcal{G}_{5,2,1}$, $\mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}$ $(\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\})$. Tất cả chúng đều là các đại số Lie thực 5 chiều sinh bởi $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ và các móc Lie được cho lần lượt dưới đây.

1.1.1. $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \langle X_5 \rangle \equiv \mathbf{R}$.

1. $\mathcal{G}_{5,1,1}$: $[X_4, X_5] = X_5$, các móc Lie còn lại đều bằng không.
2. $\mathcal{G}_{5,1,2}$: $[X_3, X_4] = X_5$, các móc Lie còn lại đều bằng không.
3. $\mathcal{G}_{5,1,3}$: $[X_1, X_2] = X_5$; $[X_3, X_4] = X_5$, các móc Lie còn lại đều bằng không.

1.1.2. $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \langle X_4, X_5 \rangle \equiv \mathbf{R}^2$.

1. $\mathcal{G}_{5,2,1}$: $[X_3, X_4] = X_4$, $[X_3, X_5] = X_5$, các móc Lie còn lại đều bằng không.
2. $\mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}$: $[X_3, X_4] = X_4$, $[X_3, X_5] = \lambda X_5$, các móc Lie còn lại đều bằng không $(\lambda \in \mathrm{R}\setminus\{0, 1\})$.

Dễ thấy rằng tất cả các đại số Lie vừa liệt kê ở trên đều giải được vì đại số con dẫn xuất thứ hai $\mathcal{G}^2$ của chúng đều triệt tiêu, do đó $\mathcal{G}^\infty$ cũng triệt tiêu. Các nhóm Lie liên thông, đơn liên tương ứng với các đại số Lie nêu trên được ký hiệu lần lượt là $G_{5,1,1}$, $G_{5,1,2}$, $G_{5,1,3}$, $G_{5,2,1}$, $G_{5,2,2(\lambda)}$, $(\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0, 1\})$. Trong mục tiếp theo, ta sẽ mô tả bức tranh hình học các K–quỹ đạo của mỗi nhóm này (xem định lí 1). Nhờ bức tranh quỹ đạo, ta sẽ thấy rằng tất cả các đại số Lie và các nhóm Lie được xét đều thuộc lớp MD5 (xem hệ quả 2).

1.2. Bức tranh hình học các K–quỹ đạo của các MD5–nhóm tương ứng

Giả sử G là một nhóm thuộc $\{G_{5,1,1}, G_{5,1,2}, G_{5,1,3}, G_{5,2,1}, G_{5,2,2(\lambda)}\}$, $\mathcal{G}$ là đại số Lie tương ứng thuộc $\{\mathcal{G}_{5,1,1}, \mathcal{G}_{5,1,2}, \mathcal{G}_{5,1,3}, \mathcal{G}_{5,2,1}, \mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}\}$ $(\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0, 1\})$

và $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$. Xét F là phần tử tuỳ ý của $\mathcal{G}^*$ với toạ độ (α, β, γ, δ, σ) trong cơ sở $\left\{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\right\}$. Ký hiệu Ω_F là K–quỹ đạo của G trong $\mathcal{G}^*$ chứa F. Định lí sau đây cho ta bức tranh hình học các K–quỹ đạo của tất cả các nhóm $G_{5,1,1}$, $G_{5,1,2}$, $G_{5,1,3}$, $G_{5,2,1}$, $G_{5,2,2(\lambda)}$, ($\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$).

1.2.1. Định lí 1 *(về bức tranh hình học các K-quỹ đạo)*

Giữ nguyên các kí hiệu nêu trên. Khi đó Ω_F được mô tả trong từng trường hợp cụ thể như dưới đây.

1. $G=G_{5,1,1}$

(i) Nếu $\sigma= 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0)\}$: quỹ đạo 0–chiều.

(ii) Nếu $\sigma\neq 0$ thì $\Omega_F = \{(\alpha, \beta, \gamma, t, s)/ t,s \in \mathbf{R};\ \sigma s > 0\}$: quỹ đạo là một nửa mặt phẳng (2 – chiều).

2. $G=G_{5,1,2}$

(i) Nếu $\sigma= 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0)\}$: quỹ đạo 0–chiều.

(ii) Nếu $\sigma\neq 0$ thì $\Omega_F = \{(\alpha, \beta, z, t, \sigma)/ z, t \in \mathbf{R}\}$: quỹ đạo là một mặt phẳng (2–chiều).

3. $G=G_{5,1,3}$

(i) Nếu $\sigma= 0$ thì $\Omega_F = \{F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0)\}$: quỹ đạo 0–chiều.

(ii) Nếu $\sigma\neq 0$ thì $\Omega_F = \{(x, y, z, t,\sigma)/ x,y,z,t \in \mathbf{R}\}$: quỹ đạo là một siêu phẳng (4 –chiều).

4. $G=G_{5,2,1}$

(i) Nếu $\delta=\sigma= 0$ thì $\Omega_F=\{F(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)\}$ (quỹ đạo 0–chiều).

(ii) Nếu $\delta= 0$; $\sigma\neq 0$ thì $\Omega_F=\{(\alpha, \beta, z, 0, s)/ z, s \in\mathbf{R};\ \sigma s > 0\}$ (quỹ đạo là một nửa mặt phẳng 2–chiều).

(iii) Nếu $\delta\neq 0$; $\sigma= 0$ thì $\Omega_F= \{(\alpha, \beta, z, t, 0)/ z, t \in \mathbf{R};\ \delta t > 0\}$ (quỹ đạo là một nửa mặt phẳng 2– chiều).

(iv) Nếu $\delta\neq 0\neq \sigma$ thì quỹ đạo là một nửa mặt phẳng 2–chiều như sau:

$$\Omega_F= \{(\alpha, \beta, z, t, s)/ z, t, s \in\mathbf{R};\ \sigma -\delta s= 0,\ \delta t >0,\ \delta s> 0\}.$$

5. $G=G_{5,2,2(\lambda)}$

(i) Nếu $\delta=\sigma=0$ thì $\Omega_F =\{F(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)\}$ (quỹ đạo 0– chiều).

(ii) Nếu $\delta= 0$; $\sigma\neq 0$ thì $\Omega_F = \{(\alpha, \beta, z, 0, s)/ z, s \in \mathbf{R};\sigma s > 0\}$ (quỹ đạo là một nửa mặt phẳng 2–chiều).

(iii) Nếu $\delta \neq 0$; $\sigma= 0$ thì $\Omega_F = \{(\alpha, \beta, z, t, 0)/ z, t \in \mathbf{R};\ \delta t > 0\}$ (quỹ đạo là một nửa mặt phẳng 2–chiều).

(iv) Nếu $\delta \neq 0$ và $\sigma \neq 0$ thì quỹ đạo là một mặt trụ 2–chiều sau đây:
$\Omega_F = \{(\alpha, \beta, z, s, t) / \sigma t^{\lambda} - \delta s = 0; \delta t > 0; \sigma s > 0\}$.

1.2.2. Chứng minh định lí 1

Phương pháp mô tả các K-quỹ đạo ở đây hoàn toàn tương tự phương pháp đã được tác giả thứ nhất giới thiệu trước đây trong các tài liệu [7], [10]. Cụ thể ta cần thực hiện tuần tự các bước sau đây.

- Trước hết, cần tính $\exp(ad_X)$, chẳng hạn bằng cách sử dụng phần mềm Matlab (hoặc Mathematica). Từ đó xác định được tọa độ của F_X trong cơ sở $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của $\mathcal{G}^*$.
- Sau đó mô tả $\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_X \in \mathcal{G}^* / X \in \mathcal{G}\}$, ở đó F_X là dạng tuyến tính trên $\mathcal{G}$ xác định bởi hệ thức
$$\langle F_X, Y \rangle = \langle F, \exp(ad_X)(Y) \rangle; \; Y, X \in \mathcal{G}.$$
- Cuối cùng cần chứng minh đẳng thức $\Omega_F(\mathcal{G}) = \Omega_F$ đối với từng $\mathcal{G}$ thuộc $\{\mathcal{G}_{5,1,1}, \mathcal{G}_{5,1,2}, \mathcal{G}_{5,1,3}, \mathcal{G}_{5,2,1}, \mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}\}(\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0, 1\})$.

Dưới đây chúng ta sẽ liệt kê các tính toán cụ thể cho từng nhóm đã xét.

1. $G = G_{5,1,1}$

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f & d \end{pmatrix}$$ chỉ có giá trị riêng thực là 0 (bội 4) và d.

$$\exp(ad_X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{(-1+e^d)f}{d} & e^d \end{pmatrix}$$

Toạ độ $F_X \in \mathcal{G}^*$ như sau: $\begin{cases} x = \alpha; \\ y = \beta; \\ z = \gamma; \\ t = \delta - \sigma \dfrac{(-1+e^d)f}{d}; \\ s = \sigma e^d. \end{cases}$

Do đó

$$\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_X(x,y,z,t,s) / X(a,b,c,d,f) \in \mathcal{G}\} = \begin{cases} \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,0)\}; & khi\ \sigma = 0; \\ \{(\alpha,\beta,\gamma,t,s)/t,s \in \mathbb{R}, \sigma s > 0\}; & khi\ \sigma \neq 0. \end{cases}$$

2. $G = G_{5,1,2}$

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 \end{pmatrix}$$ chỉ có giá trị riêng thực là 0 (bội 5).

$$\exp(ad_X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 1 \end{pmatrix}$$

Toạ độ $F_X \in \mathcal{G}^*$ như sau: $\begin{cases} x = \alpha; \\ y = \beta; \\ z = \gamma - d\sigma; \\ t = \delta + c\sigma; \\ s = \sigma. \end{cases}$

Do đó

$$\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_X(x,y,z,t,s) / X(a,b,c,d,f) \in \mathcal{G}\} = \begin{cases} \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,0)\}; & khi\ \sigma = 0; \\ \{(\alpha,\beta,z,t,\sigma)/z,t \in \mathbb{R}\}; & khi\ \sigma \neq 0. \end{cases}$$

3. $G = G_{5,1,3}$

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & -d & c & 0 \end{pmatrix}$$ chỉ có giá trị riêng thực là 0 (bội 5).

$$\exp\left(ad_X\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & a & -d & c & 1 \end{pmatrix}$$

Toạ độ $F_X \in \mathcal{G}^*$ như sau: $\begin{cases} x = \alpha - b\sigma; \\ y = \beta + a\sigma; \\ z = \gamma - d\sigma; \\ t = \delta + c\sigma; \\ s = \sigma. \end{cases}$

Do đó

$$\Omega_F(\mathcal{G}) = \{F_X(x,y,z,t,s) / X(a,b,c,d,f) \in \mathcal{G}\} = \begin{bmatrix} \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,0)\}; & khi\ \sigma = 0; \\ \{(x,y,z,t,\sigma) / x,y,z,t \in \mathbb{R}\}; & khi\ \sigma \neq 0. \end{bmatrix}$$

4. $G = G_{5,2,1}$

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 & c \end{pmatrix}$$ chỉ có giá trị riêng thực là 0 (bội 3) và c (bội 2).

$$\exp\left(ad_X\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{d\left(-1+e^{b+c}\right)}{b+c} & e^c & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{f\left(-1+e^c\right)}{c} & 0 & e^c \end{pmatrix}$$

Toạ độ $F_X \in \mathcal{G}^*$ như sau:

$$\begin{cases} x=\alpha; \\ y=\beta; \\ z=\gamma-d\dfrac{-1+e^{b+c}}{b+c}\delta-f\dfrac{-1+e^c}{c}\sigma; \\ t=e^c\delta; \\ s=e^c\sigma. \end{cases}$$

$\Omega_F(\mathcal{G})=\{F_X(x,y,z,t,s)/\ X(a,b,c,d,f)\in\mathcal{G}\}$

$$=\begin{cases} \{(\alpha,\beta,\gamma,0,0)\}; \quad khi\ \delta=\sigma=0; \\ \{(\alpha,\beta,z,0,s)/\, z,s\in\mathbb{R};\ \sigma s>0\}; \quad khi\ \delta=0,\sigma\neq 0; \\ \{(\alpha,\beta,z,t,0)/\, z,t\in\mathbb{R};\ \delta t>0\}; \quad khi\ \delta\neq 0,\sigma=0; \\ \{(\alpha,\beta,z,t,s)/\, z,t,s\in\mathbb{R};\ \sigma t-\delta s=0,\ \};\sigma t>0,\delta s>0 \quad khi\ \delta\neq 0,\sigma\neq 0. \end{cases}$$

5. $G = G_{5,2,2(\lambda)}$

$$ad_X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda f & 0 & \lambda c \end{pmatrix}$$ chỉ có giá trị riêng thực là 0 (bội 3), c và cλ.

$$\exp\left(ad_X\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{d\left(-1+e^{c}\right)}{c} & e^{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{f\left(-1+e^{\lambda c}\right)}{c} & 0 & e^{\lambda c} \end{pmatrix}$$

Tọa độ $F_X \in \mathcal{G}^*$ như sau:

$$\begin{cases} x = \alpha; \\ y = \beta; \\ z = \gamma - d\dfrac{-1+e^{c}}{c}\delta - f\dfrac{-1+e^{\lambda c}}{c}\sigma; \\ t = e^{c}\delta; \\ s = e^{\lambda c}\sigma. \end{cases}$$

Do đó

$$\Omega_F(\mathcal{G})=\{F_X(x,y,z,t,s)/\ X(a,b,c,d,f)\in\mathcal{G}\}$$

$$=\begin{cases} \{(\alpha,\beta,\gamma,0,0)\}; & khi\ \delta=\sigma=0; \\ \{(\alpha,\beta,z,0,s)/\ z,s\in\mathbb{R};\ \sigma s>0\}; & khi\ \delta=0,\sigma\neq 0; \\ \{(\alpha,\beta,z,t,0)/\ z,t\in\mathbb{R};\ \delta t>0\}; & khi\ \delta\neq 0,\sigma=0; \\ \left\{(\alpha,\beta,z,t,s)/\ z,t,s\in\mathbb{R};\ \left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{\lambda}=\dfrac{s}{\delta},\right\};\sigma t>0,\delta s>0 & khi\ \delta\neq 0,\sigma\neq 0. \end{cases}$$

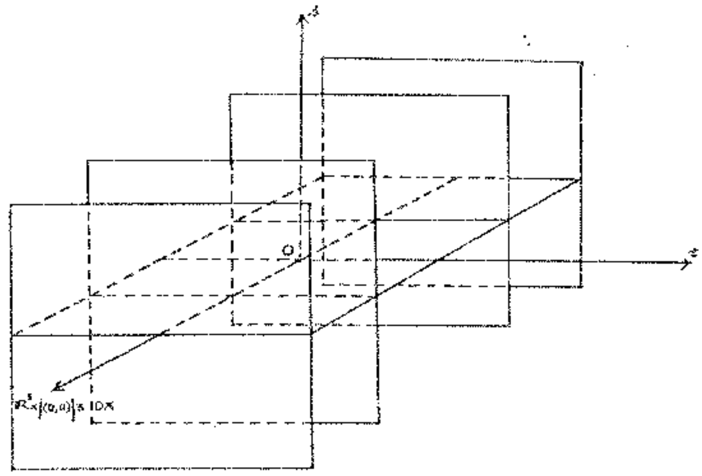
Phép chứng minh định lí 1 được hoàn thành. ■

1.2.3. Minh họa hình học

1. $G=G_{5,1,1}$
   - Tập các quỹ đạo 0–chiều là siêu phẳng tọa độ có phương trình s=0 trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$.
   - Mỗi quỹ đạo 2–chiều là một nửa mặt phẳng dạng

$$\{(\alpha,\beta,\gamma)\}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}_{\pm}\subset\mathbf{R}^5\cong\mathcal{G}^*.$$

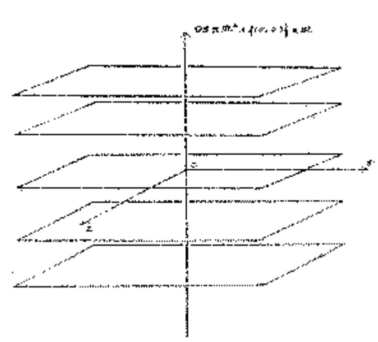
Ta hãy xem $\mathbf{R}^3\times\{(0,0)\}$ ($\subset \mathbf{R}^5 \equiv \mathcal{G}^*$) như trục OX để hình dung $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$ như $\mathbf{R}^3 \equiv$ OXts. Khi đó mặt phẳng OXt là tập các quỹ đạo 0–chiều, còn họ các quỹ đạo 2–chiều chính là họ các nửa mặt phẳng song song với nhau và vuông góc với OX ở phía trên hoặc phía dưới mặt OXt. Họ các K–quỹ đạo 2–chiều lập thành phân hoạch của đa tạp con mở $V_1 = \mathbf{R}^5 \setminus \mathbf{R}^4\times\{0\} = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_+$ trong $\mathbf{R}^5$ (xem hình 1)



Hình 1

2. $G=G_{5,1,2}$
   - Tập các quỹ đạo 0–chiều là siêu phẳng toạ độ có phương trình s=0 trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$.
   - Mỗi quỹ đạo 2–chiều là một mặt phẳng trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$ dạng
$$\{(\alpha, \beta)\}\times \mathbf{R}^2\times\{\sigma\}.$$

Ta hãy xem $\mathbf{R}^2 \times\{(0,0)\}\times \mathbf{R}$ ($\subset\mathbf{R}^5 \cong \mathcal{G}^*$) như trục OS để hình dung $\mathcal{G}^*\cong\mathbf{R}^5$ như $\mathbf{R}^3 \equiv$ OztS. Khi đó mặt phẳng Ozt là tập các quỹ đạo 0–chiều, còn họ các quỹ đạo 2–chiều chính là họ các mặt phẳng song song với nhau và vuông góc với OS. Họ các K–quỹ đạo 2–chiều lập thành phân hoạch của đa tạp con mở $V_1 = \mathbf{R}^5\setminus \mathbf{R}^4\times\{0\} = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_+$ trong $\mathbf{R}^5$ (xem hình 2).



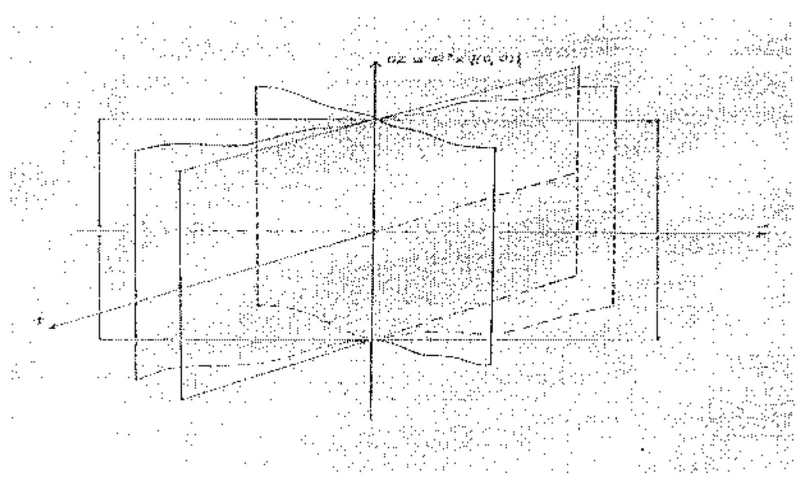
Hình 2

3. $G=G_{5,1,3}$
    - Tập các quỹ đạo 0–chiều là siêu phẳng tọa độ có phương trình s= 0 trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$.
    - Mỗi quỹ đạo 2–chiều là siêu phẳng song song với siêu phẳng tọa độ các quỹ đạo 0–chiều và có phương trình $s = \sigma \neq 0$. Ở đây họ các quỹ đạo 4–chiều cũng lập thành phân hoạch của

      $V_1 = \mathbf{R}^5 \setminus \mathbf{R}^4 \times \{0\} = \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^* = \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}_+$.

4. $G=G_{5,2,1}$
    - Tập các quỹ đạo 0–chiều là một 3–phẳng toạ độ trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$ có phương trình: $t = 0$, $s = 0$.
    - Mỗi quỹ đạo 2–chiều là một nửa mặt phẳng 2–chiều nằm trong 3–phẳng có phương trình: $x = \alpha$(const); $y= \beta$(const) của $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$. Họ các quỹ đạo 2–chiều lập thành phân hoạch của đa tạp con mở $V_2 = \mathbf{R}^5 \setminus \mathbf{R}^3 \times \{0,0\} \subset \mathbf{R}^5$.

5. $G=G_{5,2,2(\lambda)}$ $(\lambda \in \{\mathbf{R} \setminus \{0,1\})$.
    - Họ quỹ đạo 0–chiều là 3–phẳng tọa độ có phương trình: $t= 0$; $s=0$ trong $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$.
    - Mỗi quỹ đạo 2–chiều là một mặt trụ nằm trọn vẹn trong một 3–phẳng của $\mathcal{G}^* \cong \mathbf{R}^5$ có phương trình: $x = \alpha$ (const); $y = \beta$ (const). Họ các K–quỹ đạo 2–chiều cũng lập thành phân hoạch của đa tạp con mở $V_2 = \mathbf{R}^5 \setminus \mathbf{R}^3 \times \{(0,0)\}$ của $\mathbf{R}^5$ (xem hình 3).



Hình 3

Từ bức tranh hình học các K-quỹ đạo vừa mô tả ở trên ta có ngay hệ quả tức khắc dưới đây.

1.2.4. Hệ quả 1

Các đại số Lie $\mathcal{G}_{5,1,1}$, $\mathcal{G}_{5,1,2}$, $\mathcal{G}_{5,1,3}$, $\mathcal{G}_{5,2,1}$, $\mathcal{G}_{5,2,2(\lambda)}$ ($\lambda \in R \setminus \{0, 1\}$) đều là các MD5–đại số. Do đó các nhóm Lie $G_{5,1,1}$, $G_{5,1,2}$, $G_{5,1,3}$, $G_{5,2,1}$, $G_{5,2,2(\lambda)}$ ($\lambda \in R \setminus \{0, 1\}$) đều là MD5–nhóm liên thông đơn liên. ■

§2. Các MD5–phân lá liên kết với các MD5–nhóm đã xét

2.1. Sự tạo thành các MD5 – phân lá

2.1.1. Định lí 2

Giả sử G là một MD5–nhóm liên thông đơn liên bất kì từ $G_{5,1,1}$, $G_{5,1,2}$, $G_{5,1,3}$, $G_{5,2,1}$, $G_{5,2,2(\lambda)}$ ($\lambda \in R \setminus \{0, 1\}$), $\mathcal{F}_G$ là họ các K–quỹ đạo chiều cực đại của nó và $V_G = \cup \{\Omega / \Omega \in \mathcal{F}_G\}$. Khi đó $(V_G, \mathcal{F}_G)$ là một phân lá đo được. Chúng ta sẽ gọi phân lá này là MD5–phân lá liên kết với G. ■

2.1.2. Chứng minh định lí 2

Phép chứng minh cũng tương tự với trường hợp các MD4-nhóm trong [7], hoặc các trường hợp đầu tiên về MD5-nhóm đã xét trong [**10**]. Trước hết ta cần xác định một hệ vi phân trơn S_G trên đa tạp V_G sao cho mỗi K-quỹ đạo từ $\mathcal{F}_G$ đều là một đa tạp con tích phân liên thông tối đại của phân bố sinh bởi hệ vi phân đó. Để tiện, phân bố này cũng sẽ được kí hiệu là $\mathcal{F}_G$.

Dưới đây ta sẽ liệt kê hệ vi phân S_G gồm các trường vectơ trên V_G sinh ra phân bố $\mathcal{F}_G$ cho từng MD5–nhóm G đã xét. Tương tự như kí hiệu của $\mathcal{F}_G$, nếu $G = G_{5,n,...}$ (n=1,2) thì S_G cũng sẽ được kí hiệu là $S_{n,...}$ Chẳng hạn $S_{G_{5,2,2(\lambda)}}$ sẽ được kí hiệu là $S_{2,2(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$.

1. $S_{1,1}: \begin{cases} X_1(x,y,z,t,s) = (0,0,0,-s,0); \\ X_2(x,y,z,t,s) = (0,0,0,0,s); \end{cases}$

2. $S_{1,2}: \begin{cases} X_1(x,y,z,t,s) = (0,0,-s,0,0); \\ X_2(x,y,z,t,s) = (0,0,0,s,0); \end{cases}$

3.

$$S_{1,3}:\begin{cases}\mathcal{X}_1(x,y,z,t,s)=(-s,0,0,0,0);\\ \mathcal{X}_2(x,y,z,t,s)=(0,s,0,0,0);\\ \mathcal{X}_3(x,y,z,t,s)=(0,0,-s,0,0);\\ \mathcal{X}_4(x,y,z,t,s)=(0,0,0,s,0);\end{cases}$$

với mọi $(x, y, z, t, s) \in V_1 = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}^4\times\mathbf{R}_+$.

4. $$S_{2,1}:\begin{cases}\mathcal{X}_1(x,y,z,t,s)=(0,0,-t-s,t,0);\\ \mathcal{X}_2(x,y,z,t,s)=(0,0,-t-s,0,s);\end{cases}$$

5. $$S_{2,2(\lambda)}:\begin{cases}\mathcal{X}_1(x,y,z,t,s)=(0,0,-t-\lambda s,t,0);\\ \mathcal{X}_2(x,y,z,t,s)=(0,0,-t-\lambda s,0,\lambda s);\end{cases}$$

với mọi $(x, y, z, t, s) \in V_2 = \mathbf{R}^3\times(\mathbf{R}^2)^*$, $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

Dễ dàng kiểm chứng được rằng các hệ S_G vừa liệt kê ở trên đều có hạng 2, ngoại trừ hệ $S_{1,3}$ có hạng 4. Hơn nữa, mỗi K – quỹ đạo Ω từ họ $\mathcal{F}_G$ luôn là đa tạp con tích phân liên thông tối đại của phân bố sinh bởi hệ S_G tương ứng. Bởi vậy $(V_G,\mathcal{F}_G)$ là phân lá đối với mỗi MD5–nhóm liên thông, đơn liên G đã xét.

Tiếp theo, ta cần trang bị một độ đo hoành cho $(V_G, \mathcal{F}_G)$ bằng cách chỉ ra một đa trường vectơ $\mathcal{X}_G\in C^\infty\left(\wedge^{\dim\mathcal{F}_G}\mathcal{F}_G\right)$ không triệt tiêu khắp nơi đối với mỗi G và chứng tỏ rằng độ đo Lebegues μ trên V_G bất biến đối với $\mathcal{X}_G$. Lúc đó, lớp tương đương (theo quan hệ tỷ lệ nghịch hàm số) của cặp $(\mathcal{X}_G, \mu)$ cho ta một độ đo hoành đối với phân lá $(V_G,\mathcal{F}_G)$. Bởi vậy sẽ $(V_G,\mathcal{F}_G)$ là một phân lá đo được.

Đầu tiên, chúng ta đưa ra $\mathcal{X}_G$ cho mỗi G. Một lần nữa, để đơn giản, $\mathcal{X}_{G_{5,n,...}}$ cũng được kí hiệu bởi $\mathcal{X}_{n,...}$ $(n=1,2)$. Chẳng hạn, ta dùng kí hiệu $\mathcal{X}_{2,2(\lambda)}$ để chỉ $\mathcal{X}_{G_{5,2,2(\lambda)}}$, $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$. Cụ thể các $\mathcal{X}_G$ được cho trong từng trường hợp như sau:

$\mathcal{X}_{1,1}=\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2$; $\mathcal{X}_{1,2}=\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2$; $\mathcal{X}_{1,3}=\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2\wedge\mathcal{X}_3\wedge\mathcal{X}_4$;

$\mathcal{X}_{2,1}=\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2$; $\mathcal{X}_{2,2(\lambda)}=\mathcal{X}_1\wedge\mathcal{X}_2$; $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

Việc kiểm chứng $\mathfrak{X}_G \in C^{\infty}\left(\wedge^{\dim \mathcal{F}_G} \mathcal{F}_G\right)$ và khác không khắp nơi là hiển nhiên.

Tính bất biến đối với $\mathfrak{X}_G$ của độ đo Lebergues μ rõ ràng tương đương với tính bất biến của nó đối với K–biểu diễn của G trong $\mathcal{G}^*$. Phép tính toán đơn giản cho ta Jacobien J_X của phép biến đổi K (exp X) trong $\mathcal{G}^*$ luôn đồng nhất bằng 1 đối với mọi X ∈ $\mathcal{G}$. Bởi vậy μ là K–bất biến. Phép chứng minh định lí được hoàn thành. ■

2.1.3. Chú ý

Để cho tiện, chúng ta sẽ ký hiệu $\left(V_{G_{5,n,\dots}}, \mathcal{F}_{G_{5,n,\dots}}\right)$ bởi $\left(V_n, \mathcal{F}_{n,\dots}\right)$, n=1,2. Chẳng hạn $\left(V_{G_{5,2,2(\lambda)}}, \mathcal{F}_{G_{5,2,2(\lambda)}}\right)$ sẽ được kí hiệu là $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$, ($\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$).

2.2. Tôpô phân lá của các MD5 – phân lá đã xét

Dễ dàng thấy rằng các phân lá $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,1}\right)$, $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,2}\right)$, $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,3}\right)$ đều không cùng kiểu tôpô. Tuy nhiên ta có khẳng định sau đây.

2.2.1. Định lí 3

Các phân lá $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right)$, $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$, $\lambda \in R\setminus\{0,1\}$ cùng kiểu tôpô.

2.2.2. Chứng minh định lí 3

Xét ánh xạ

$$h : V_2 \cong \mathbb{R}^3 \times \left(\mathbb{R}^2\right)^* \to V_2$$

$$(x, y, z, t, s) \to h(x, y, z, t, s) = \left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{s}\right)$$

ở đó $\begin{cases} \tilde{x} = x; \\ \tilde{y} = y; \\ \tilde{z} = z; \\ \tilde{t} = sign(t).|t|^{1/\lambda}; \\ \tilde{s} = s; \end{cases}$

với mọi (x, y, z, t, s) ∈ V_2.

Kiểm tra trực tiếp ta được h là một đồng phôi chuyển lá của $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$ thành lá của $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$. Bởi vậy $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right)$ và $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ cùng kiểu tôpô. Định lí được chứng minh. ∎

2.2.3. Dễ kiểm tra được $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,2}\right)$, $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,3}\right)$, $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right)$, $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$, đều không có lá compact nào. Mỗi lá của chúng đều vi phôi với $\mathbf{R}^2$, ngoại trừ mỗi lá của $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,3}\right)$ vi phôi với $\mathbf{R}^4$.

2.2.4. Tất cả các MD5–phân lá đã xét đều là phân lá được cho bởi phân thớ với thớ liên thông.

2.2.5. Không gian lá của từng MD5–phân lá đã xét như sau:

1. $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,1}\right)$ có không gian lá là $V_1/\mathcal{F}_{1,1} \cong R^3 \times \{-1\} \cup R^3 \times \{1\}$.
2. $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,2}\right)$ có không gian lá là $V_1/\mathcal{F}_{1,2} \cong R^2 \times R^*$.
3. $\left(V_1, \mathcal{F}_{1,3}\right)$ có không gian lá là $V_1/\mathcal{F}_{1,3} \cong R^*$.
4. $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right)$ và $\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right)$ có không gian lá là:
$$V_2/\mathcal{F}_{2,1} \cong V_2/\mathcal{F}_{2,2(\lambda)} \cong R^2 \times S^1.$$

Nói riêng, các không gian lá đều là những không gian tôpô Hausdorff, compact địa phương.

Từ phép mô tả tôpô của các MD5–phân lá vừa nêu trên, áp dụng các kết quả trong tài liệu [**1, section** 5] của A. Connes ta có ngay hệ quả dưới đây.

2.2.6. Hệ quả 2 *(về C*-đại số của các MD5 – phân lá đã xét)*

1. $C^*\left(V_1, \mathcal{F}_{1,1}\right) \cong C_0(R^3 \times \{1\} \cup R^3 \times \{-1\}) \otimes K$;
2. $C^*\left(V_1, \mathcal{F}_{1,2}\right) \cong C_0(R^2 \times R^*) \otimes K$;
3. $C^*\left(V_1, \mathcal{F}_{1,3}\right) \cong C_0(R^*) \otimes K$;
4. $C^*\left(V_2, \mathcal{F}_{2,1}\right) \cong C^*\left(V_2, \mathcal{F}_{2,2(\lambda)}\right) \cong C_0(R^2 \times S^1) \otimes K$;

ở đó $K = K(L^2(thớ))$ là C^*–đại số các toán tử compact trên không gian Hilbert vô hạn chiều tách được $L^2(thớ)$. ■

Nhận xét

Trước hết, chúng ta khẳng định rằng tất cả các kết quả nêu trong các định lý 1,2,3 vẫn còn đúng đối với các MD5–nhóm liên thông (không nhất thiết đơn liên) tương ứng với các MD5–đại số $G_{5,1,1}$, $G_{5,1,2}$, $G_{5,1,3}$, $G_{5,2,1}$, $G_{5,2,2(\lambda)}$, $(\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\})$. Nói chi tiết hơn, nếu G là một MD5–nhóm liên thông (không nhất thiết đơn liên) tương ứng với một trong các MD5–đại số kể trên thì bức tranh các K–quỹ đạo của G hoàn toàn trùng với bức tranh các K–quỹ đạo của phủ đơn liên $\widetilde{G}$ của nó. Họ các K–quỹ đạo chiều cực đại của G cũng lập thành cùng một MD5–phân lá như phủ đơn liên $\widetilde{G}$ của nó. Hơn nữa, các MD5–nhóm và MD5–đại số đã xét trong bài này đều khác các MD5–nhóm và MD5–đại số đã được xét năm 2003 trong [**10**].

Những hướng mở cần tiếp tục nghiên cứu

1. Cần liệt kê đầy đủ và phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) toàn bộ lớp MD5– đại số. Sau đó tiếp tục xét các lớp MDn– đại số với $n \geq 6$.
2. Nghiên cứu kỹ hơn về các MD5–phân lá. Cụ thể cần mô tả các C^*–đại số liên kết với các MD5–phân lá. Đây là một vấn đề phức tạp và đòi hỏi công sức đầu tư nhiều hơn. Sau đó cũng tiếp tục mô tả các C^*– đại số của các MDn–phân lá với $n \geq 6$.
3. Xây dựng lượng tử hóa biến dạng trên các K–quỹ đạo của các MD5–nhóm đồng thời mở rộng bài toán cho các lớp MDn–nhóm với $n \geq 6$.

Mỗi hướng nêu trên đều là những vấn đề thời sự rất đáng quan tâm. Chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu và công bố trong những bài báo tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Connes (1982), *A Survey of Foliations and Operator Algebras*, Proc. Symp. Pure Math., 38, 512 – 628, Part I.

[2] Do Ngoc Diep (1999), *Method of Nocommutative Geometry for Group C^*-algeras*, Chapman and Hall/ CRC Press Research Notes in Mathematics Series, #416.

[3] A. A. Kirillov (1976), *Elements of the Theory of Prepresentations*, Springer – Verlag, Berlin – Heidenberg – New York.

[4] G. Reeb (1952), *Sur certains propriétés topologiques de variétés feuilletées*, Actualité Sci. Indust. 1183, Hermann, Paris.

[5] V. M. Son et H. H. Viet (1984), *Sur la Structure des C*-algebres d'une Classe de Groupes de Lie*, J. Operator Theory, 11, 77 – 90.

[6] Đào Văn Trà (1984), *Về một lớp các đại số Lie số chiều thấp*, Tuyển tập các báo cáo tại Hội Thảo Khoa Học Viện Toán Học Việt Nam lần thứ 12, Hà nội.

[7] Lê Anh Vũ (1990), *Không gian phân lá tạo bởi các K– quỹ đạo chiều cực đại lớp nhóm Lie MD4*, Luận án phó tiến sỹ khoa học Toán Lý, Viện toán học Việt nam, Hà nội.

[8] Lê Anh Vũ (12/2004), *Không gian phân lá tạo bởi các K– quỹ đạo chiều cực đại lớp một lớp nhóm Lie giải được 5 chiều*, Báo cáo tổng kết đề tài khoa học công nghệ cấp cơ sở mã số CS2004.23.54, Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh.

[9] Le Anh Vu (1993), *Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Co– adjoint Representation of a Class of Solvable Lie Groups*, Vest. Moscow Uni., Math. Bulletin, Vol. 48, N^{0}3, 24 - 27.

[10] Le Anh Vu (2003), *Foliations Formed by K – orbits of Maximal Dimension of Some MD5– Groups*, East – West Journal of Mathematics, Vol. 5, N^{0}3, pp. 159 – 168.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Connes (1982), *A Survey of Foliations and Operator Algebras*, Proc. Symp. Pure Math., 38, 512 – 628, Part I.

[2] Do Ngoc Diep (1999), *Method of Nocommutative Geometry for Group C^*-algeras*, Chapman and Hall/ CRC Press Research Notes in Mathematics Series, #416.

[3] A. A. Kirillov (1976), *Elements of the Theory of Prepresentations*, Springer – Verlag, Berlin – Heidenberg – New York.

[4] G. Reeb (1952), *Sur certains propriétés topologiques de variétés feuilletées*, Actualité Sci. Indust. 1183, Hermann, Paris.

[5] V. M. Son et H. H. Viet (1984), *Sur la Structure des C^*-algebres d'une Classe de Groupes de Lie*, J. Operator Theory, 11, 77 – 90.

[6] Đào Văn Trà (1984), *Về một lớp các đại số Lie số chiều thấp*, Tuyển tập các báo cáo tại Hội Thảo Khoa Học Viện Toán Học Việt Nam lần thứ 12, Hà nội.

[7] Lê Anh Vũ (1990), *Không gian phân lá tạo bởi các K– quỹ đạo chiều cực đại lớp nhóm Lie MD4*, Luận án phó tiến sỹ khoa học Toán Lý, Viện toán học Việt nam, Hà nội.

[8] Lê Anh Vũ (12/2004), *Không gian phân lá tạo bởi các K– quỹ đạo chiều cực đại lớp một lớp nhóm Lie giải được 5 chiều*, Báo cáo tổng kết đề tài khoa học công nghệ cấp cơ sở mã số CS2004.23.54, Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh.

[9] Le Anh Vu (1993), *Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Co– adjoint Representation of a Class of Solvable Lie Groups*, Vest. Moscow Uni., Math. Bulletin, Vol. 48, N^{0}3, 24 - 27.

[10] Le Anh Vu (2003), *Foliations Formed by K – orbits of Maximal Dimension of Some MD5– Groups*, East – West Journal of Mathematics, Vol. 5, N^{0}3, pp. 159 – 168.