

TỔ CHỨC CHO HỌC SINH LỚP 12 TIẾP CẬN BÀI TOÁN PHỎNG THỰC TIỄN VỀ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH CÁC KHỐI TRÒN XOAY

DƯƠNG HỮU TÔNG*, TRẦN TRÍ TÂM**

TÓM TẮT

Trong chương trình toán 12, có hai cách tiếp cận bài toán tính thể tích V các khối tròn xoay: Dựa vào công thức trong hình học, dựa vào công thức trong giải tích. Sách giáo khoa Giải tích 12 hiện hành giới thiệu cho học sinh tiếp cận bài toán tính thể tích các khối tròn xoay dựa trên công cụ tích phân. Tuy nhiên, hoạt động giải toán chỉ gắn liền với tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường cong cho trước phương trình mà không thông qua giải một bài toán thực tiễn về ứng dụng tích phân để tính thể tích các khối tròn xoay. Để khắc phục được hạn chế này, bài báo tổ chức cho học sinh lớp 12 tiếp cận bài toán phỏng thực tiễn về ứng dụng tích phân để tính thể tích của thùng rượu và tính khối lượng quả dưa hấu.

Từ khóa: tính thể tích khối tròn xoay, ứng dụng của tích phân, bài toán phỏng thực tiễn.

ABSTRACT

Helping students in class 12 to approach imitatively real problems of applying integrals in calculating the volume of the block of revolution

In mathematical curriculum 12, there are two approaches to the volume V of the block of revolution: based on the formula V in geometry and based on the formula V in the calculus. The current calculus textbook 12 introduces students to the volume V of the block of revolution based on the integral tools. However, activities of solving problems are only associated with the volume V of the block of revolution when plane figures are turned and limited by curves with the given equations, so they are not related to real problems of applications of integrals to calculate the volume of the block of revolution. To overcome this limitation, the paper helps students in class 12 to approach imitatively real problems of applying integrals in calculating the volume of a barrel of wine and a watermelon.

Keywords: calculate the volume of the block of revolution, applications of integrals, imitatively real problems.

1. Đặt vấn đề

Trong toán học, một khái niệm hay một công thức thường xuất hiện gắn liền với hoạt động giải toán và ứng dụng của các hoạt động ấy. Thế nhưng, sách giáo khoa (SGK) Giải tích 12 không đề xuất các kiểu nhiệm vụ gắn liền với bài toán phỏng thực

* TS, Trường Đại học Cần Thơ; Email: dhtong@ctu.edu.vn

** HVCH, Trường Đại học Cần Thơ

tiền về ứng dụng tích phân để tính thể tích các khối tròn xoay, trong đó *bài toán phỏng thực tiễn là bài toán mà các dữ kiện, các biến, các yêu cầu, các câu hỏi, các mối quan hệ... không phải là các yếu tố của thực tiễn “thực” mà chỉ là sự mô phỏng của thực tiễn này*. Điều này làm cho học sinh (HS) chưa thấy đầy đủ được ứng dụng của tích phân để tính thể tích các khối tròn xoay có trong thực tiễn. Mục đích chính của bài báo là xây dựng tình huống đưa vào bài toán phỏng thực tiễn về ứng dụng của tích phân để tính thể tích các khối tròn xoay cho HS lớp 12 giải quyết.

2. Khung lí thuyết tham chiếu

Để xây dựng tình huống dạy học, chúng tôi sử dụng một số khái niệm quan trọng trong lí thuyết tình huống do G.Brousseau đặt nền móng.

2.1. *Biến didactic*

Một họ các bài toán có thể được sinh ra từ một tình huống bằng việc thay đổi những giá trị của một số biến. Các biến này, đến lượt nó, lại làm thay đổi những đặc trưng của các chiến lược giải (độ khó khăn, tính hợp thức, sự phức tạp...). Chúng sẽ là biến didactic nếu bằng cách tác động lên chúng, người ta có thể tạo nên những thích nghi và những điều tiết của việc học tập.

G.Brousseau gọi biến didactic là những biến có thể làm thay đổi đặc trưng của những chiến lược giải hay câu trả lời của HS và giáo viên (GV) có thể thực hiện việc lựa chọn các giá trị của biến (tham khảo Bessot A. và các tác giả, năm, tr. 145).

2.2. *Chiến lược cơ sở và chiến lược tối ưu*

Đứng trước một vấn đề được đặt ra trong tình huống dạy học, HS có thể có một chiến lược tìm câu trả lời. Nhưng câu trả lời ban đầu này có thể không phải là cái mà GV muốn giảng dạy. Khi đó, chiến lược tìm câu trả lời được gọi là “chiến lược cơ sở”. Hiển nhiên, chiến lược cơ sở liên quan đến những kiến thức cũ, cho phép HS có một hiểu biết ban đầu về bài toán đặt ra.

Chiến lược cơ sở phải nhanh chóng tỏ ra khiếm khuyết hoặc không hiệu quả. Điều này buộc HS phải tiến hành những điều tiết, những sửa đổi trong hệ thống kiến thức của mình. HS đều phải lưỡng lự khi chọn các quyết định. Mong muốn của GV là HS chuyển từ chiến lược cơ sở đến chiến lược tối ưu. Thông thường, chiến lược tối ưu này chứa đựng kiến thức mới mà GV muốn giới thiệu cho các em (tham khảo Bessot A. và các tác giả, năm 2009, tr. 197).

2.3. *Phân tích tiên nghiệm và phân tích hậu nghiệm*

Phân tích tiên nghiệm là thiết lập một mô hình dự kiến về thực tế (tình huống Sa gắn liền với đối tượng tri thức đang nghiên cứu). Khi phân tích tiên nghiệm, người ta thường tìm cách xác định các yếu tố:

- Các biến didactic có thể tác động trong Sa, những chiến lược hay câu trả lời có thể xuất hiện và ảnh hưởng của biến trên chiến lược.
- Những cái có thể quan sát được, minh chứng các chiến lược hay câu trả lời.

- Những kiến thức ẩn đằng sau những chiến lược đó, nghĩa là những kiến thức tiềm ẩn cho sự nảy sinh các chiến lược.

- Những kiến thức có thể nảy sinh và các lựa chọn giá trị của biến tạo ra điều kiện nảy sinh đó.

Phân tích hậu nghiệm là dựng lại tình huống thực tế Sp xảy ra thực sự khi triển khai thực nghiệm tình huống Sa. Trong đó, điểm mấu chốt là thực hiện sự phân tích đối chứng giữa những cái đã dự kiến trong phân tích tiên nghiệm với những dữ liệu và mối quan hệ giữa các dữ liệu thu thập được khi triển khai tình huống thực nghiệm, nghĩa là sự đối chứng giữa tình huống Sa và tình huống thực nghiệm Sp xảy ra trong thực tế thực nghiệm (tham khảo Bessot A. và các tác giả, năm 2009, tr. 207).

3. Thực nghiệm sư phạm

3.1. Đối tượng thực nghiệm

Đối tượng thực nghiệm là học sinh lớp 12TN Trường trung học phổ thông Tây Đô, huyện Long Mỹ, tỉnh Hậu Giang. Lớp có 35 HS tham gia khảo sát, lớp này có học lực trung bình - khá và các em đã được học xong công thức ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay.

3.2. Công cụ để tổ chức thực nghiệm và kịch bản

a. Công cụ để tổ chức thực nghiệm

HS được tổ chức tiếp cận những bài toán phỏng thực tiễn về tính thể tích khối tròn xoay như sau:

Bài toán 1. Tính thể tích thùng rượu

Cửa hàng rượu của anh Hưng có đặt mua từ cơ sở sản xuất 7 thùng rượu kích thước như nhau, thùng có hình dạng khối tròn xoay với đường sinh dạng parabol, mỗi thùng rượu có bán kính ở hai mặt là 30 cm và ở giữa là 40 cm, chiều dài thùng rượu là 100cm. Biết rằng: thùng chứa đầy rượu và giá mỗi lít rượu là hai mươi nghìn đồng. Hỏi số tiền rượu mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu là bao nhiêu?



Hình 1. Bảy thùng rượu

Bài toán 2. Tính khối lượng quả dưa hấu

Quả dưa hấu có hình dạng khối tròn xoay với đường sinh dạng elip với chiều dài là 28cm và chiều rộng 25cm . Hỏi quả dưa hấu nặng bao nhiêu kg, biết rằng $1\text{dm}^3 \approx 0,95\text{kg}$?



Hình 2. Quả dưa hấu

b. Kịch bản

Thời gian thực nghiệm là 90 phút, thực nghiệm được thiết kế theo 5 pha như sau:

Pha 1. (Làm việc cả lớp, 20 phút). GV ôn tập lại kiến thức về: Cách xác định phương trình parabol, elip, công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox , Oy .

Mục tiêu: Pha 1 giúp các em thuận lợi hơn trong việc lập phương trình parabol, elip, tính thể tích các khối tròn xoay.

Pha 2. (Làm việc theo nhóm, có sự can thiệp của GV, 15 phút).

Lớp học chia thành 5 nhóm. GV phát cho HS phiếu số 1 chứa nội dung bài toán 1 cho mỗi nhóm, nhiệm vụ của nhóm là chuyển đổi từ bài toán phỏng thực tiễn thành bài toán toán học, tức là nhóm xác định được phương trình các đường tạo ra hình phẳng.

Mục tiêu: Giải quyết bài toán phỏng thực tiễn là cách làm khá mới so với HS THPT, HS có thể gặp khó khăn khi chuyển bài toán phỏng thực tiễn thành bài toán toán học, do đó ở pha 2 này GV cho HS làm việc theo nhóm để các em cùng nhau giải quyết bài toán và có sự can thiệp của GV (nếu cần thiết).

Pha 3. (Làm việc theo nhóm, 15 phút).

Lớp học vẫn chia thành 5 nhóm. HS tiếp tục làm việc trên phiếu số 1, nhiệm vụ của nhóm là giải quyết bài toán toán học, trả về kết quả thực tiễn tức là nhóm tính được thể tích khối tròn xoay và kết luận theo yêu cầu.

Mục tiêu: Trong pha 3, các em giải quyết bài toán có sự cộng tác từ các bạn trong nhóm. Giai đoạn này tạo cơ hội cho các em bảo vệ chính kiến của mình. Tuy nhiên, các em cũng có thể thấy được nhận định của mình chưa chính xác nếu được bạn khác thuyết phục bằng những chứng cứ hợp lí. Ở pha 3 này GV hoàn toàn không can thiệp, chúng tôi muốn các nhóm tự giải quyết và thể hiện sự tiến bộ của các nhóm so với pha 2.

Pha 4. (Hợp thức hóa, tổng kết, 15 phút).

Lớp học vẫn được chia thành 5 nhóm. Các nhóm cùng sửa bài với GV. Mỗi nhóm đưa ra nhận xét, phát biểu. Các nhóm khác nhận xét. GV là người nhận xét, đánh giá sau cùng.

Mục tiêu: Pha 4 là sự nhận xét, đánh giá các kết quả có được từ pha 2, pha 3 nhưng có sự can thiệp từ GV (rất hạn chế). Nó cho phép ghi nhận lại những gì quan trọng, các yếu tố mà các em có thể học tập thông qua bài toán phỏng thực tiễn. HS được mong muốn để biết vận dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay có trong thực tế.

Pha 5. (HS làm bài cá nhân, 25 phút).

Tổ chức cho các em làm bài cá nhân với tình huống giải bài toán 2. HS làm bài trên giấy do giáo viên photo có in sẵn nội dung bài toán (phiếu số 2).

Mục tiêu: Chúng tôi muốn biết xem kết quả mà các em làm bài toán 2 như thế nào khi chúng tôi đã giới thiệu và giải quyết xong bài toán 1. Qua đó, chúng tôi đánh giá được khả năng của cá nhân HS trong tiếp cận và giải quyết bài toán phỏng thực tiễn.

3.3. Phân tích tiên nghiệm hai bài toán*a. Mục tiêu bài toán*

Hai bài toán được thiết kế với mong muốn cho HS tiếp cận bài toán phỏng thực tiễn về ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay. Ngoài ra, chúng tôi cũng tạo cơ hội cho HS ôn lại kiến thức về: phương trình parabol, elip, tính tích phân.

b. Các biến didactic

Biến V1: Tính đối xứng của vật thực tế: có tâm đối xứng hay không?

Biến V2: Tính đối xứng của đường sinh: đường sinh có trục đối xứng hay không?

c. Những chiến lược có thể

- **S1:** Quay hình phẳng xung quanh trục Ox. Trong đó:

+ **S11:** Đẻ thùng rượu nằm ngang, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm mặt đáy của thùng rượu, lập phương trình parabol, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox, suy ra kết quả.

+ **S12:** Đẻ thùng rượu ngang, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm đối xứng của thùng rượu, lập phương trình parabol, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox, suy ra kết quả.

+ **S13:** Đẻ quả dưa nằm ngang, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm của quả dưa (O nằm chính giữa quả dưa), lập phương trình elip có trục lớn $a = 14$, trục nhỏ $b = 12,5$, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi elip xung quanh trục Ox, suy ra kết quả.

- **S2:** Quay hình phẳng xung quanh trục Oy. Trong đó:

+ **S21**: Để thùng rượu đứng, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm mặt đáy của thùng rượu, lập phương trình parabol, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Oy, suy ra kết quả.

+ **S22**: Để thùng rượu đứng, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm của thùng rượu (O nằm chính giữa thùng rượu), lập phương trình parabol, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Oy, suy ra kết quả.

+ **S23**: Để quả dưa đứng, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm của quả dưa (O nằm chính giữa quả dưa), lập phương trình elip có trục lớn $a = 14$, trục nhỏ $b = 12,5$, áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi elip xung quanh trục Oy, suy ra kết quả.

d. Ảnh hưởng các giá trị của biến được chọn đến các chiến lược

Bảng 1. Giá trị của biến được lựa chọn trong bài toán 1 và bài toán 2

Bài toán	V1	V2
Bài toán 1 (Thùng rượu)	Có tâm đối xứng	Đường sinh có trục đối xứng
Bài toán 2 (Quả dưa hấu)	Có tâm đối xứng	Đường sinh có trục đối xứng

Giá trị “có tâm đối xứng” của biến **V1** trong cả 2 bài toán tạo điều kiện thuận lợi cho HS tiến hành chọn hệ trục tọa độ Oxy, lập phương trình và tính thể tích các khối tròn xoay vì chọn giá trị này bài toán sẽ rơi vào các trường hợp đặc biệt, người giải sẽ dễ dàng giải quyết bài toán. Do đó, giá trị này đem đến thuận lợi cho chiến lược **S12**, **S13**, **S22**, **S23**.

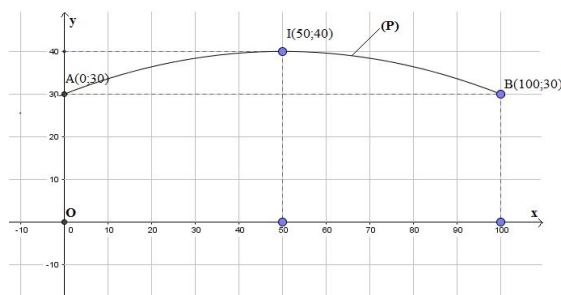
Biến **V2** nhận giá trị “đường sinh có trục đối xứng” đem đến thuận lợi cho các chiến lược **S12**, **S13**. Ngoài ra, nó còn gây rất nhiều khó khăn cho HS như: phải đổi biến từ x sang biến y, không quen quan sát hình ảnh cũng như làm việc với đối tượng là biến y. Do đó chiến lược **S2** bị hạn chế phần nào và góp phần tạo cơ hội cho nhóm chiến lược **S1** xuất hiện.

e. Những quan sát có thể

Những lời giải có thể đối với bài toán 1: (Tính thể tích thùng rượu)

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S11** và hướng giải bài toán 1 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để thùng rượu nằm ngang để thuận lợi trong việc tính toán. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm mặt đáy của thùng rượu, từ đề bài ta có hình vẽ sau.



Hình 3

+ Ta cần tìm phương trình parabol có đỉnh $I(50;40)$ và đi qua điểm $A(0;30)$.

+ Gọi parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$

+ Vì (P) có đỉnh là điểm $I(50;40)$ và đi qua điểm $A(0;30)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 50 \\ I(50;40) \in (P) \\ A(0;30) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ 40 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + c \\ c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{5} \\ c = 30 \\ a = \frac{-1}{250} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{250} + \frac{2}{5}x + 30 \text{ (P) (phương trình đường sinh).}$$

+ Ta cần tìm thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn

$$\text{bởi các đường: } \begin{cases} y = -\frac{x^2}{250} + \frac{2}{5}x + 30 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 100 \end{cases} \text{ quanh trục } Ox.$$

+ Bây giờ ta áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$+ \text{ Thể tích } V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{100} \left(-\frac{x^2}{250} + \frac{2}{5}x + 30\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{100} \left(\frac{x^4}{62500} - \frac{1}{3125}x^3 + \frac{17}{125}x^2 + 900\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{312500} - \frac{x^4}{12500} + \frac{17}{375}x^3 + 900x\right) \Big|_0^{100} = 425162(\text{cm}^3) = 425,162(l)$$

+ Suy ra, số tiền mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu là: $425,162 \cdot 20000 \cdot 7 = 59522680$ (đồng).

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S12** và hướng giải bài toán 1 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để thùng rượu nằm ngang để thuận lợi trong việc tính toán. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với tâm đối xứng của thùng rượu từ đề bài ta vẽ hình và chọn tọa độ đỉnh I, điểm B.

+ Ta cần tìm phương trình parabol có đỉnh I(0;40) và qua điểm B(50;30)

+ Gọi parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$

+ Vì (P) có đỉnh là điểm I(0;40) và đi qua điểm B(50;30) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 0 \\ I(0;40) \in (P) \\ B(50;30) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 0 \\ 40 = c \\ 30 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 40 \\ a = \frac{-1}{250} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{250} + 40 \text{ (P) (phương trình cạnh thùng rượu).}$$

+ Ta cần tìm thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn

$$\text{bởi các đường: } \begin{cases} y = -\frac{x^2}{250} + 40 \\ y = 0 \\ x = -50 \\ x = 50 \end{cases} \text{ quanh trục Ox.}$$

+ Bây giờ ta áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$+ \text{ Thể tích } V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{x^2}{250} + 40\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-50}^{50} \left(\frac{x^4}{62500} - \frac{80}{250}x^2 + 1600\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{312500} - \frac{80}{750}x^3 + 1600x\right) \Big|_{-50}^{50} = 425162(\text{cm}^3) = 425,162(\text{l})$$

+ Suy ra, số tiền mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu là: 425,162.20000.7=59522680 (đồng).

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S21** và hướng giải bài toán 1 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để thùng rượu đứng. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm mặt đáy của thùng rượu, từ đề bài ta vẽ hình và chọn tọa độ đỉnh I, điểm A.

+ Ta cần tìm phương trình parabol có đỉnh I(40;50) và đi qua điểm A(30;0).

+ Gọi parabol (P) có dạng $x = ay^2 + by + c$

+ Vì (P) có đỉnh là điểm I(40;50) và đi qua điểm A(30; 0) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 50 \\ I(40;50) \in (P) \\ A(30;0) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ 40 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + c \\ c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{5} \\ c = 30 \\ a = \frac{-1}{250} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{y^2}{250} + \frac{2}{5}y + 30 \text{ (P) (phương trình đường sinh).}$$

+ Ta cần tìm thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn

$$\text{bởi các đường: } \begin{cases} x = -\frac{y^2}{250} + \frac{2}{5}y + 30 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ y = 100 \end{cases} \text{ quanh trục Oy.}$$

+ Bây giờ ta áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$\begin{aligned} + \text{ Thể tích } V &= \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_0^{100} \left(-\frac{y^2}{250} + \frac{2}{5}y + 30\right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{100} \left(\frac{y^4}{62500} - \frac{1}{3125}y^3 + \frac{17}{125}y^2 + 900\right) dy \\ &= \pi \left(\frac{y^5}{312500} - \frac{y^4}{12500} + \frac{17}{375}y^3 + 900y\right) \Big|_0^{100} = 425162(\text{cm}^3) = 425,162(\text{l}) \end{aligned}$$

+ Suy ra, số tiền mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu là: 425,162.20000.7=59522680 (đồng).

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S22** và hướng giải bài toán 1 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để thùng rượu đứng. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với tâm đối xứng của thùng rượu từ đề bài, ta vẽ hình và chọn tọa độ đỉnh I, điểm A, B.

+ Ta cần tìm phương trình parabol có đỉnh I(0;40) và qua điểm A(30;50)

+ Gọi parabol (P) có dạng $x = ay^2 + by + c$

+ Vì (P) có đỉnh là điểm I(0;40) và đi qua điểm A(30;50) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 0 \\ I(40;0) \in (P) \\ A(30;50) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 0 \\ 40 = c \\ 30 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 40 \\ a = \frac{-1}{250} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{y^2}{250} + 40 \text{ (P) (phương trình đường sinh).}$$

+ Ta cần tìm thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn

$$\text{bởi các đường: } \begin{cases} x = -\frac{y^2}{250} + 40 \\ x = 0 \\ y = -50 \\ y = 50 \end{cases} \text{ quanh trục Oy.}$$

+ Bây giờ ta áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

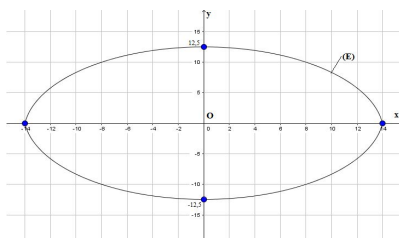
$$\begin{aligned} + \text{ Thể tích } V &= \pi \int_a^b x^2 dx = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{y^2}{250} + 40\right)^2 dy \\ &= \pi \int_{-50}^{50} \left(\frac{y^4}{62500} - \frac{80}{250}y^2 + 1600\right) dy \\ &= \pi \left(\frac{y^5}{312500} - \frac{80}{750}y^3 + 1600y\right) \Big|_{-50}^{50} = 425162(\text{cm}^3) = 425,162(\text{l}) \end{aligned}$$

+ Suy ra, số tiền mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu là: $425,162 \cdot 20000 \cdot 7 = 59522680$ (đồng).

Những lời giải có thể đối với bài toán 2: (Tính khối lượng quả dưa hấu)

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S13** và hướng giải bài toán 2 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để quả dưa nằm ngang để thuận lợi trong việc tính toán. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm quả dưa hấu và trục lớn của elip nằm trên trục Ox bằng 28, trục nhỏ nằm trên trục Oy bằng 25.



Hình 4.

+ Ta biết quả dưa hấu có dạng elip tròn xoay, ta cần tìm phương trình elip trong tọa độ 2 chiều có độ dài trục lớn là 28, độ dài trục nhỏ là 25.

+ Ta dùng công thức: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$

+ Với a là nửa trục lớn và b là nửa trục nhỏ.

+ Với công thức tính thể tích, ta cần biểu diễn công thức theo y^2 và điều này rất dễ để thực hiện: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

+ Vì $a = 14$ và $b = 12,5$ ta được:

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1,25^2}{14^2} (14^2 - x^2) = 0,797(196 - x^2)$$

+ Có phương trình elip, ta áp dụng tích phân để tính thể tích

$$V = 2\pi \int_0^{14} y^2 dx = 2\pi \int_0^{14} 0,797(196 - x^2) dx$$

$$= 2,0,797\pi \int_0^{14} (196 - x^2) dx$$

$$= 2,2,504 \left(196x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{14} = 9161cm^3 = 9,161dm^3$$

Vậy khối lượng quả dưa hấu là $9,161.0,95 \approx 8,7kg$

- Ứng với các biến đã chọn, ta có chiến lược **S23** và hướng giải bài toán 2 có thể quan sát được như sau:

+ Ta sẽ để quả dưa đứng. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng tâm quả dưa hấu và trục lớn của elip nằm trên trục Oy bằng 28, trục nhỏ nằm trên trục Ox bằng 25.

+ Ta biết quả dưa hấu có dạng elip tròn xoay, ta cần tìm phương trình elip trong tọa độ 2 chiều có độ dài trục lớn là 28, độ dài trục nhỏ là 25.

+ Ta dùng công thức: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a < b)$

+ Với b là nửa trục lớn và a là nửa trục nhỏ.

+ Với công thức tính thể tích, ta cần biểu diễn công thức theo x^2 và điều này rất dễ để thực hiện: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)$$

+ Vì $a = 12,5$ và $b = 14$, ta được:

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1,25^2}{14^2}(14^2 - y^2) = 0,797(196 - y^2)$$

+ Có phương trình elip, ta áp dụng tích phân để tính thể tích

$$V = 2\pi \int_0^{14} x^2 dy = 2\pi \int_0^{14} 0,797(196 - y^2) dy$$

$$= 2,0,797\pi \int_0^{14} (196 - y^2) dy$$

$$= 2,2,504(196y - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^{14} = 9161cm^3 = 9,161dm^3$$

Vậy khối lượng quả dưa hấu là $9,161.0,95 \approx 8,7kg$

4. Kết quả và thảo luận

Thực nghiệm được chúng tôi triển khai tại lớp 12TN (35 HS) Trường THPT Tây Đô, huyện Long Mỹ, tỉnh Hậu Giang, thời gian: vào tiết 3, tiết 4 buổi sáng thứ 5, ngày 17 tháng 3 năm 2016. Các số liệu được chúng tôi thu thập bao gồm kết quả thảo luận của 5 nhóm, kết quả phiếu làm bài cá nhân của 35 HS.

4.1. Pha 1. Ôn tập lại kiến thức cũ

a. Cách xác định phương trình parabol, elip

b. Công thức thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh

i). Trục Ox là: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ ii). Trục Oy là: $V = \pi \int_a^b x^2 dy$

4.2. Pha 2.

Bảng 2. Bảng thống kê chiến lược giải của các nhóm đối với bài toán 1

	Chiến lược S11	Chiến lược S12	Chiến lược S21	Chiến lược S22
Bài toán 1	0 (0%)	4 (80%)	0 (0%)	1 (20%)

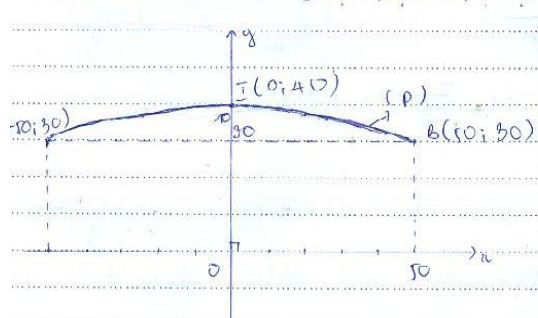
Đây là lần đầu tiên các nhóm tiếp cận việc giải bài toán phỏng thực tiễn, do đó các em có nhiều lúng túng trong việc xác định hướng giải. Họ được sự can thiệp của GV cộng với kiến thức lập phương trình đã được nhắc lại ở pha 1 nên các nhóm hầu hết sử dụng chiến lược **S12** để tìm lời giải cho bài toán. Ngoài ra, đa phần HS chọn chiến lược này cũng có thể do các em quen với cách lập phương trình parabol có trục đối xứng là trục Oy nên chiến lược **S12** dễ dàng xuất hiện. Sau đây là bài làm của một nhóm.

Câu hỏi gợi ý cho các nhóm:

a) Hãy lấy ra 1 thùng rượu, chọn hệ trục tọa độ (Oxy) thích hợp, lập phương trình parabol? Chỉ ra hình phẳng khi quay quanh trục Ox hoặc Oy tạo thành khối tròn xoay?

Giải

Từ hình vẽ ta chọn hệ trục tọa độ (Oxy)



* Tìm parabol (P):
 Từ hệ trục (Oxy) ta có hệ pt:

$$\begin{cases} 2500a + 50b + c = 30 \\ 2500a - 50b + c = 30 \\ c = 40 \end{cases}$$

(*) $\begin{cases} 2500a + 50b = -10 \\ 2500a - 50b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{250} \\ b = 0 \\ c = 40 \end{cases}$

→ parabol (P) có dạng:

$$y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$$

Thể tích một thùng rượu chính là thể tích khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{250}x^2 + 40 \\ y = 0 \\ x = 50 \\ x = -50 \end{cases}$$

Ngoài ra, nhóm 3 chọn chiến lược **S22**, chiến lược của nhóm này có phần khác với 4 nhóm trước đó là chọn cách lập parabol có trục đối xứng là trục Ox, với cách chọn này HS phải làm việc với đối tượng là biến y và phải quay hình phẳng quanh trục Oy.

Qua pha 2, chúng tôi nhận thấy các nhóm đã chuyển từ bài toán phỏng thực tiễn thành bài toán toán học rất dễ dàng. Trong đó, tất cả các nhóm đã lập được bài toán toán học mặc dù có 1 nhóm khác với 4 nhóm còn lại nhưng kết quả vẫn tốt và đúng như những gì mong đợi của chúng tôi. Tóm lại, tất cả các nhóm làm tốt pha 2 này.

4.3. Pha 3

Nhiệm vụ các nhóm là giải bài toán toán học và trả về kết quả thực tiễn, các chiến lược giải được tiếp nối từ pha 2. Ở đây, các nhóm phải giải tiếp những bài toán toán học mà các nhóm vừa lập, đặc biệt ở pha này các nhóm tự giải quyết bài toán không có sự can thiệp của GV. Kết quả cho thấy các nhóm làm rất tốt 4/5 nhóm tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox và trả về kết quả thực tiễn như mong đợi của chúng tôi. Kết quả tiêu biểu của một trong bốn nhóm như sau:

b) Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh các trục Ox hoặc trục Oy? Tính số tiền rượu mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất rượu?

Giải

* Giải thể tích:

Cơ V là thể tích cần tìm được giới hạn bởi:

$$y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$$

$$y = 0$$

$$x = 50$$

$$x = -50$$

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250}x^2 + 40\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-50}^{50} \left(\frac{1}{62500}x^4 - \frac{80}{250}x^2 + 1600\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{312500}x^5 - \frac{8}{75}x^3 + 1600x\right) \Big|_{-50}^{50} = \frac{406000}{3} \pi \text{ (đvt)}$$

$$\rightarrow V = \frac{406000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)} = \frac{406}{3} \pi \text{ (lít)}$$

Mã mỗi lít 20000 đ.

$$\rightarrow \text{Mỗi thùng rượu có giá: } \frac{406}{3} \pi \cdot 20000 = \frac{8120000}{3} \pi \text{ (đ)}$$

Số tiền rượu mà cửa hàng của anh Hưng phải trả cho cơ sở sản xuất là:

$$\frac{8120000}{3} \pi \cdot 7 \approx 59522708,81 \text{ (đồng)}$$

Bên cạnh đó, nhóm còn lại tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xung quanh trục Oy và trả về kết quả thực tiễn đúng đáp án bài toán 1.

4.4. Pha 4

Các nhóm cùng sửa bài toán 1 với GV, điều này cũng tương tự như pha hoạt động nhóm, hoạt động sửa bài tập diễn ra rất thuận lợi. Các nhóm lần lượt trình bày kết quả bài giải của nhóm mình, các nhóm khác nhận xét, góp ý; hầu như 100% các nhóm làm đúng bài tập 1, tiến trình thảo luận diễn ra rất nhanh đúng như thời gian dự kiến của chúng tôi. Qua pha 4, chúng tôi có thể khẳng định rằng đã đạt được mục tiêu đề ra là giới thiệu cho HS rằng có thể dùng tích phân để giải quyết bài toán phỏng thực tiễn.

4.5. Pha 5

Cuối tiết dạy, chúng tôi phát phiếu điều tra (chứa nội dung bài toán 2) cho HS nhằm kiểm tra sự hiểu biết của các em về việc ứng dụng tích phân để tính khối lượng của quả dưa hấu. Sau đây là kết quả thu được từ các phiếu làm bài của cá nhân HS.

Bảng 3. Bảng thống kê câu trả lời của HS đối với bài toán 2

Câu trả lời của HS	Giải được bài toán 2	Hiểu vấn đề nhưng giải chưa đến kết quả	Không giải được bài toán 2
Tỉ lệ	32/35 (91,4%)	3/35 (8,6%)	0/35 (0%)

Trong Bảng 3 trên, có 32 phiếu đã hoàn thành tốt và đúng đáp án, đa số các em sử dụng chiến lược **S13** để giải, chỉ một vài em sử dụng chiến lược **S23**. Bên cạnh đó, có 3/35 HS (chiếm 8,6%) chưa ra kết quả cuối cùng và kết quả của một HS như sau:

Giải

• Trục lớn: $2a$
 $\Rightarrow 2a = 28$
 $\Rightarrow a = 14$

• Trục nhỏ: $2b$
 $\Rightarrow 2b = 25$
 $\Rightarrow b = 12,5$

Từ hình vẽ đưa hẩu ta có:

* pt elip có dạng: $\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{12,5^2} = 1$ $\Rightarrow \frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{156,25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{196} + \frac{4y^2}{625} = 1$
 \Rightarrow thể tích hình tròn xoay được quả dưa hẩu \rightarrow trục Ox và trục hình vẽ thêm là:

$\frac{x^2}{196} + \frac{4y^2}{625} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{625}{4} - \frac{625}{196}x^2$

* tính tích phân:
 $V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{625}{4} - \frac{625}{196}x^2 \right) dx = \pi \left(\frac{625}{4}x - \frac{625}{588}x^3 \right) \Big|_{-14}^{14}$

Qua bài giải cho thấy HS đã biết chuyển từ việc tính khối lượng quả dưa hẩu đưa về việc tính thể tích khối tròn xoay (tức là HS đã chuyển được bài toán phỏng thực tiễn về bài toán toán học) nhưng tới khi HS giải bài toán toán học HS lại giải sai, trong đó nguyên nhân là em này đã rút y^2 theo biến x chưa đúng (tức lỗi kĩ thuật tính toán chứ không phải kĩ thuật quy trình), dẫn đến lấy nguyên hàm sai và HS này chưa ra kết quả của bài toán.

5. Kết luận

Qua thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy số đông các em thành công với việc ứng dụng tích phân để tính thể tích của thùng rượu và quả dưa hẩu. Hơn nữa, hầu hết HS của lớp thực nghiệm đều biết được cách giải quyết bài toán phỏng thực tiễn và đã vận dụng khá hiệu quả trong pha 5. Tuy vậy, có một HS chưa đưa ra kết quả chính xác do biến đổi phương trình sai, dẫn đến tìm nguyên hàm của hàm số không đúng. Nhưng em này cũng hiểu được sự cần thiết phải chuyển bài toán phỏng thực tiễn đã cho về bài toán ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2009), *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*, Nxb Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.
2. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) (2008), *Giải tích 12*, Nxb Giáo dục.
3. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) (2008), *Giải tích 12 – Sách Giáo viên*, Nxb Giáo dục.
4. Lê Văn Tiến (2005), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường phổ thông*, Nxb Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.
5. Vũ Tuấn (Chủ biên) (2008), *Bài tập Giải tích 12*, Nxb Giáo dục.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 02-6-2016; ngày phản biện đánh giá: 15-7-2016;
ngày chấp nhận đăng: 21-10-2016)