PHÂN LOẠI CÁC SIÊU ĐẠI SỐ LIE TOÀN PHƯƠNG GIẢI ĐƯỢC 8 CHIỀU VỚI PHẦN CHẴN BẤT KHẢ PHÂN 6 CHIỀU

CAO TRẦN TỨ HẢI*, DƯƠNG MINH THÀNH**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một phân loại các siêu đại số Lie toàn phương giải được 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều. Phương pháp phân loại dựa trên công cụ mở rộng kép và kết quả phân loại quỹ đạo phụ hợp của đại số Lie $\mathfrak{sp}(2)$.

Từ khóa: siêu đại số Lie, siêu đại số Lie toàn phương, mở rộng kép.

ABSTRACT

A classification of solvable eight-dimensional quadratic lie superalgebras and the six-dimensional indecomposable even part

In this paper, we give a classification of solvable eight-dimensional quadratic lie superalgebras and the six-dimensional indecomposable even part. The method is based on the double extension and classification results of adjoin orbits of the Lie algebra $\mathfrak{sp}(2)$.

Keywords: Lie superalgebras. Quadratic Lie superalgebras. Double extension.

Mở đầu

Một siêu đại số Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ được gọi là toàn phương nếu trên $\mathfrak{g}$ có một dạng song tuyến tính B siêu đối xứng chẵn, bất biến và không suy biến. Trong trường hợp này, B được gọi là một tích vô hướng bất biến trên $\mathfrak{g}$. Chẳng hạn, ta biết rằng dạng Killing của một siêu đại số Lie thỏa mãn các tính chất siêu đối xứng chẵn và bất biến, nếu $\mathfrak{g}$ là siêu đại số Lie cổ điển hoặc siêu đại số Lie nửa đơn thì nó là siêu đại số Lie toàn phương do dạng Killing còn thỏa mãn tính chất không suy biến (tiêu chuẩn Cartan). Trong trường hợp $\mathfrak{g}$ giải được, dạng Killing sẽ bị suy biến. Tuy nhiên, vẫn tồn tại những siêu đại số Lie giải được mà trên đó xuất hiện một dạng song tuyến tính khác sao cho bảo đảm được tính chất siêu đối xứng chẵn, bất biến và không suy biến. Đây chính là đối tượng nghiên cứu chính trong bài báo này.

Siêu đại số Lie toàn phương được xem như là một tổng quát hóa của đại số Lie toàn phương. Đối với các đại số Lie toàn phương hữu hạn chiều trên một trường đóng đại số đặc trưng 0, trong bài báo [10], A. Medina và P. Revoy đưa ra khái niệm mở rộng kép với mục đích cung cấp một mô tả quy nạp của đại số Lie toàn phương. Ở dạng mô tả này, một đại số Lie toàn phương được xem như là mở rộng kép của một đại số Lie toàn phương có số chiều thấp hơn. Sau đó, H. Benamor và S. Benayadi trong [5] đã

* NCS, Chuyên ngành Hình học và Tôpô, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: thanhdmi@hcmup.edu.vn*

tổng quát hóa khái niệm mở rộng kép cho siêu đại số Lie toàn phương. Bên cạnh đó, các đại số Lie toàn phương còn được mô tả dưới một cấu trúc khác: mở rộng T* của một đại số Lie, là khái quát của tích nửa trực tiếp của một đại số Lie và không gian đối ngẫu của nó. Cách mô tả này do M.Bordemann [2] phát hiện ra, sau đó được tổng quát hóa lên siêu đại số Lie toàn phương trong bài báo [4] của S. Bajo, S. Benayadi và M. Bordemann. Từ các công trình này, đã hình thành một hướng nghiên cứu các siêu đại số Lie được trang bị một dạng song tuyến tính bất biến và không suy biến cũng như các ứng dụng của chúng.

Trong bài viết này, chúng tôi quan tâm đến việc phân loại siêu đại số Lie toàn phương có số chiều thấp, cụ thể là các siêu đại số Lie toàn phương giải được 8 chiều. Chúng tôi chỉ tập trung vào trường hợp các siêu đại số Lie này có phần chẵn bất khả phân 6 chiều với mục tiêu làm rõ công cụ phân loại để có thể áp dụng cho các trường hợp còn lại. Nội dung bài báo được chia làm 4 mục: Mục đầu tiên nhắc lại một số khái niệm cơ bản của siêu đại số Lie toàn phương; Mục 2 đề cập một số kết quả liên quan đến đại số Lie $\mathfrak{sp}(2)$ dùng cho việc phân loại các siêu đại số Lie toàn phương ở Mục 4; Mục 3 trình bày khái niệm mở rộng kép của một siêu đại số Lie toàn phương; Mục 4 nêu kết quả phân loại các siêu đại số Lie toàn phương giải được 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều.

Các không gian vectơ được xét trong bài báo này là hữu hạn chiều và trên trường số phức $\mathbb{C}$.

1. Siêu đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 1.1. Cho một siêu đại số Lie hữu hạn chiều $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Nếu $\mathfrak{g}$ được trang bị một dạng song tuyến tính $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn các tính chất

(i) *siêu đối xứng* nếu $B(X,Y) = (-1)^{xy} B(Y,X), \forall X \in \mathfrak{g}_x, Y \in \mathfrak{g}_y$,.

(ii) *không suy biến* nếu $B(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$ thì $X = 0$,

(iii) *bất biến* nếu $B\left([X,Y],Z\right) = B\left(X,[Y,Z]\right)$ đúng với mọi $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$,

(iv) *chẵn* nếu $B(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}) = 0$.

thì $\mathfrak{g}$ được gọi là một *siêu đại số Lie toàn phương*.

Trong trường hợp này dễ dàng thấy rằng $\left(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, B\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{0}} \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}}\right)$ là một đại số Lie toàn phương và $\left(\mathfrak{g}_{\bar{1}}, B\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right)$ là một $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$- module symplectic.

Cho hai siêu đại số Lie toàn phương $(\mathfrak{g}, B), (\mathfrak{g}', B')$. Ta nói rằng $(\mathfrak{g}, B)$ và $(\mathfrak{g}', B')$ *đẳng cấu đẳng cự* nếu có một đẳng cấu siêu đại số Lie $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ sao cho

$B'(A(X),A(Y)) = B(X,Y),\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}$. Khi đó A được gọi là *ánh xạ đẳng cấu đẳng cự* và ta kí hiệu $(\mathfrak{g},B) \overset{i}{\cong} (\mathfrak{g}',B')$.

Định nghĩa 1.2. Cho $(\mathfrak{g},B)$ là một đại số Lie toàn phương và $\mathfrak{I}$ là một ideal của $\mathfrak{g}$.

(i) $\mathfrak{I}$ được gọi là *không suy biến* nếu B hạn chế trên $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ không suy biến,

(ii) $(\mathfrak{g},B)$ được gọi là *bất khả quy* nếu $\mathfrak{g}$ không có ideal không suy biến khác $\{0\}$ và $\mathfrak{g}$,

(iii) Ideal không suy biến $\mathfrak{I}$ được gọi là *bất khả quy* nếu $\mathfrak{I}$ không chứa ideal không suy biến khác $\{0\}$ và $\mathfrak{I}$,

(iv) Ideal $\mathfrak{I}$ được gọi là *đẳng hướng hoàn toàn* nếu $B(\mathfrak{I},\mathfrak{I}) = 0$.

Mệnh đề sau đây quy việc nghiên cứu siêu đại số Lie toàn phương thành nghiên cứu các ideal không suy biến.

Mệnh đề 1.3. *[4]*

Cho $(\mathfrak{g},B)$ là một siêu đại số Lie toàn phương, $\mathfrak{I}$ là một ideal của $\mathfrak{g}$. Khi đó $\mathfrak{I}^\perp$ cũng là một ideal của $\mathfrak{g}$. Ngoài ra, nếu $\mathfrak{I}$ không suy biến thì $\mathfrak{I}^\perp$ cũng không suy biến, $[\mathfrak{I},\mathfrak{I}^\perp] = \{0\}$ và $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^\perp = \{0\}$. Trong trường hợp này, ta kí hiệu $\mathfrak{g} = \mathfrak{I} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{I}^\perp$.

2. Quỹ đạo phụ hợp của đại số Lie symplectic $\mathfrak{sp}(2)$

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số kết quả phân loại quỹ đạo phụ hợp của đại số Lie $\mathfrak{sp}(2)$ với mục đích sử dụng nó cho bài toán phân loại các siêu đại số Lie toàn phương. Đối với đại số Lie $\mathfrak{sp}(2)$, mỗi phần tử khác không $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ hoặc là lũy linh hoặc là nửa đơn. Điều này nghĩa là đối với mỗi phần tử trong $\mathfrak{sp}(2)$, ta có thể chọn cơ sở chính tắc phù hợp trong $\mathbb{C}^2$ để nó có ma trận biểu diễn là $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$.

Bổ đề 2.1. *Cho $A,B \in \mathfrak{sp}(2)$ sao cho $[A,B] = 0$. Khi đó A,B phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh.

Đại số Lie $\mathfrak{sp}(2)$ có cơ sở $\{H,X,Y\}$ với $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$, $[X,Y] = H$. Gọi $A = aH + bX + cY, B = a'H + b'X + c'Y$. Từ giả thiết $[A,B] = 0$

kéo theo $(bc'-b'c)H+2(ab'-a'b)X-2(ac'-a'c)Y=0$. Điều này tương đương với hai bộ ba (a,b,c) và (a',b',c') tỉ lệ hay A,B phụ thuộc tuyến tính. □

Bổ đề 2.2. *Cho* $A,B,C\in\mathrm{sp}(2)$, *nếu* $[A,B]=C$, $[A,C]=[B,C]=0$ *thì* $C=0$.

Chứng minh.

Do $[A,C]=[B,C]=0$ nên theo Bổ đề 2.1, ta có A và C phụ thuộc tuyến tính ; B và C phụ thuộc tuyến tính. Nếu $C\neq 0$ thì A,B phụ thuộc tuyến tính. Dẫn đến $C=[A,B]=0$ (mâu thuẫn). □

Bổ đề 2.3. *Cho* $A,B\in\mathrm{sp}(2)$, $B\neq 0$ *sao cho* $[A,B]=B$. *Khi đó* A *nửa đơn có các giá trị riêng là* $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ *và* B *lũy linh.*

Chứng minh.

Ta có thể chọn cơ sở chính tắc phù hợp để A có dạng $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}$.

Nếu $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=X$, gọi $B=aH+bX+cY$. Khi đó $[A,B]=B$ tương đương với $-2aX+cH=aH+bX+cY$ dẫn đến $B=0$ (vô lí). Do đó $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}=\lambda H$, gọi $B=aH+bX+cY$. Từ giả thiết $[A,B]=B$ ta được $2\lambda bX-2c\lambda Y=aH+bX+cY$, dẫn đến $a=0,\ 2\lambda b=b,\ -2c\lambda=c$, kéo theo $a=0,\lambda=\frac{1}{2},c=0$ hoặc $a=0,\lambda=-\frac{1}{2},b=0$. □

3. Mở rộng kép của siêu đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 3.1. Cho $(\mathfrak{g},B)$ là một siêu đại số Lie toàn phương và $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ là một siêu đạo hàm của $\mathfrak{g}$. Ta nói D là một siêu đạo hàm *phản xứng* của $\mathfrak{g}$ nếu nó thỏa mãn tính chất: $B(D(X),Y)=-B(X,D(Y)),\ \forall X,Y\in\mathfrak{g}$.

Kí hiệu $\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g},B)$ là không gian các siêu đạo hàm phản xứng của $(\mathfrak{g},B)$. Khi đó $\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g},B)$ cùng với phép toán siêu hoán tử lập thành một siêu đại số Lie.

Mệnh đề 3.2. ([4, Theorem 2.4]) *Cho* $(\mathfrak{g},B)$ *là một siêu đại số Lie toàn phương,* $\mathfrak{h}$ *là một siêu đại số Lie và* $\phi:\mathfrak{h}\to\mathrm{Der}_a(\mathfrak{g})$ *là một đồng cấu siêu đại số Lie. Gọi* ψ *là ánh xạ đi từ* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ *vào* $\mathfrak{h}^*$ *được xác định bởi:*

$$\psi(X,Y)(Z) = (-1)^{(x+y)z} B(\varphi(Z)(X),Y),\ \forall X \in \mathfrak{g}_x,\ \forall Y \in \mathfrak{g}_y,\ \forall Z \in \mathfrak{h}_z.$$

Khi đó không gian vectơ $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}^*$ *cùng với phép nhân*

$$\begin{aligned}[H + X + f, K + Y + g] = {} & [H,K]_{\mathfrak{h}} + [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \varphi(H)(Y) - (-1)^{xy}\varphi(K)(X) + ad^*(H)(g) \\ & - (-1)^{xy} ad^*(K)(f) + \psi(X,Y),\end{aligned}$$

$$\forall H \in \mathfrak{h}_x,\ \forall X \in \mathfrak{g}_x,\ \forall f \in \mathfrak{h}_x^*,\ \forall K \in \mathfrak{h}_y,\ \forall Y \in \mathfrak{g}_y,\ \forall g \in \mathfrak{h}_y^*$$

là một siêu đại số Lie. Hơn nữa, nếu γ là một dạng song tuyến tính siêu đối xứng bất biến trên $\mathfrak{h}$ thì $\overline{\mathfrak{g}}$ cùng với dạng song tuyến tính xác định bởi:

$$\overline{B}(H + X + f, K + Y + g) = \gamma(H,K) + B(X,Y) + f(K) + (-1)^{xy} g(H)$$

là một siêu đại số Lie toàn phương và được gọi là mở rộng kép của $(\mathfrak{g},B)$ bởi $\mathfrak{h}$ theo nghĩa φ.

Trường hợp $\mathfrak{h}$ là đại số Lie một chiều, $\overline{\mathfrak{g}}$ được gọi là mở rộng kép một chiều của $(\mathfrak{g},B)$. Mệnh đề sau đây thể hiện tầm quan trọng của mở rộng kép một chiều trong nghiên cứu cấu trúc của các siêu đại số Lie toàn phương.

Mệnh đề 3.3. [3] *Cho $(\mathfrak{g},B)$ là một siêu đại số Lie toàn phương bất khả phân có số chiều $n > 1$ sao cho tồn tại ít nhất một phần tử thuần nhất chẵn thuộc tâm. Khi đó $(\mathfrak{g},B)$ là mở rộng kép một chiều của một siêu đại số Lie toàn phương $n-2$ chiều.*

4. Phân loại siêu đại số Lie toàn phương giải được 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều

Mục tiêu chính trong bài báo này là phân loại các siêu đại số Lie toàn phương giải được 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều. Do $\mathfrak{g}$ giải được nên $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ cũng giải được. Do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ bất khả phân nên $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ đẳng cấu đẳng cự với những đại số Lie $\mathfrak{g}_{6,1}$, $\mathfrak{g}_{6,2}(\lambda)$, $\mathfrak{g}_{6,3}$ đã được phân loại trong [6].

Nếu $\mathfrak{g}$ khả phân, gọi $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{j}_{\bar{1}}$ là ideal không suy biến thực sự của $\mathfrak{g}$, khi đó $\mathfrak{j}^{\perp}$ cũng là một ideal không suy biến của $\mathfrak{g}$. Nên $\mathfrak{j}_{\bar{0}}$ là các ideal không suy biến khác $\{0\}$ của $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ hoặc $\left(\mathfrak{j}^{\perp}\right)_{\bar{0}}$ là ideal không suy biến khác $\{0\}$ của $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Nhưng vì $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ bất khả phân nên ta chỉ có $\mathfrak{j}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ hoặc $\left(\mathfrak{j}^{\perp}\right)_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\mathfrak{j} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{j}_{\bar{1}}$ là ideal không suy biến thực sự của $\mathfrak{g}$, suy ra $\mathfrak{j}_{\bar{1}} = \{0\}$, $\left(\mathfrak{j}^{\perp}\right)_{\bar{0}} = \{0\}$ và

$(\varphi^{\perp})_{\bar 1} = \mathfrak{g}_{\bar 1}$. Vì vậy $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{g}_{\bar 1}$ với $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ là đại số Lie toàn phương bất khả phân giải được 6 chiều, $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ là không gian vectơ symplectic 2 chiều và $[\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 1}] = \{0\}$.

Sau đây ta xét trường hợp $\mathfrak{g}$ là một siêu đại số Lie toàn phương bất khả phân, $\mathfrak{g}_{\bar 0} = span\{X_i, Z_i\}$, $1 \le i \le 3$, $B(X_i, X_j) = B(Z_i, Z_j) = 0$, $B(X_i, Z_j) = \delta_{ij}$, $\mathfrak{g}_{\bar 1} = span\{Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}\}$, $B(Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}) = 1$.

4.1. Với $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{g}_{6,1}$

Theo [6], các tích Lie khác không $[X_1, X_2] = Z_3$, $[X_2, X_3] = Z_1$, $[X_3, X_1] = Z_2$ và $Z(\mathfrak{g}_{\bar 0}) = span\{Z_1, Z_2, Z_3\}$. Chú ý rằng $ad(X)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} \in sp\left(\mathfrak{g}_{\bar 1}, B\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1} \times \mathfrak{g}_{\bar 1}}\right) = sp(2)$, $\forall X \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Ta có $\left[ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = ad(Z_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $\left[ad(X_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = 0$ nên theo Bổ đề 2.2, $ad(Z_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Tương tự $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Suy ra $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar 0} = Z(\mathfrak{g}_{\bar 0}) = span\{Z_1, Z_2, Z_3\}$. Theo Bổ đề 2.1, $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ đôi một phụ thuộc tuyến tính. Nếu cả ba cùng bằng 0 thì $\mathfrak{g}$ khả phân. Do đó $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ không đồng thời bằng 0. Hơn nữa, theo phân loại $Sp(\mathfrak{g}_{\bar 1})$- quỹ đạo của $sp(\mathfrak{g}_{\bar 1})$, ta có thể chọn cơ sở chính tắc $\{Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}\}$ để ma trận biểu diễn của $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ cùng là dạng chéo hoặc tam giác trên ngặt. Ta có 2 trường hợp sau:

- Với $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & -\nu \end{pmatrix}$, ta có:

$[X_1, Y_{\bar 1}] = \lambda Y_{\bar 1}$, $[X_1, T_{\bar 1}] = -\lambda T_{\bar 1}$, $[X_2, Y_{\bar 1}] = \mu Y_{\bar 1}$, $[X_2, T_{\bar 1}] = -\mu T_{\bar 1}$, $[X_3, Y_{\bar 1}] = \nu Y_{\bar 1}$, $[X_3, T_{\bar 1}] = -\nu T_{\bar 1}$ (dễ dàng kiểm tra tích Lie thỏa mãn Đồng nhất thức Jacobi).

Theo tính bất biến, không suy biến và chẵn của B, ta có

$B(\mathfrak{g}_{\bar 0}, [Y_{\bar 1}, Y_{\bar 1}]) = B([\mathfrak{g}_{\bar 0}, Y_{\bar 1}], Y_{\bar 1}) = 0$ nên $[Y_{\bar 1}, Y_{\bar 1}] = 0$,

$B(\mathfrak{g}_{\bar 0}, [T_{\bar 1}, T_{\bar 1}]) = B([\mathfrak{g}_{\bar 0}, T_{\bar 1}], T_{\bar 1}) = 0$ nên $[T_{\bar 1}, T_{\bar 1}] = 0$

và

$$B(span\{Z_1,Z_2,Z_3\},[Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}]) = B([span\{Z_1,Z_2,Z_3\},Y_{\bar{1}}],T_{\bar{1}}) = 0,$$
$$B(X_3,[Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}]) = B([X_3,Y_{\bar{1}}],T_{\bar{1}}) = n,\ B(X_1,[Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}]) = B([X_1,Y_{\bar{1}}],T_{\bar{1}}) = \lambda,$$
$$B(X_2,[Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}]) = B([X_2,Y_{\bar{1}}]T_{\bar{1}}) = m \text{ nên } [Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}] = \lambda Z_1 + mZ_2 + nZ_3.$$

Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là $\mathfrak{g}^s_{8,2,1}(\lambda,m,n)$ với các tích Lie khác 0: $[X_1,X_2] = Z_3$, $[X_2,X_3] = Z_1$, $[X_3,X_1] = Z_2$, $[X_1,Y_{\bar{1}}] = \lambda Y_{\bar{1}}$, $[X_1,T_{\bar{1}}] = -\lambda T_{\bar{1}}$, $[X_2,Y_{\bar{1}}] = mY_{\bar{1}}$, $[X_2,T_{\bar{1}}] = -mT_{\bar{1}}$, $[X_3,Y_{\bar{1}}] = nY_{\bar{1}}$, $[X_3,T_{\bar{1}}] = -nT_{\bar{1}}$, $[Y_{\bar{1}},T_{\bar{1}}] = \lambda Z_1 + mZ_2 + nZ_3$.

Ta dễ dàng chứng minh được rằng $\mathfrak{g}^s_{8,2,1}(\lambda,m,n)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,1}(\lambda',m',n')$ đẳng cấu đẳng cự với nhau khi và chỉ khi (λ',m',n') là hoán vị của (λ,m,n) hoặc $(-\lambda,-m,-n)$.

- Với $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (sau

một phép đổi cơ sở trên $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$), ta có $[X_3,T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[X_1,T_{\bar{1}}] = \lambda Y_{\bar{1}}$, $[X_2,T_{\bar{1}}] = mY_{\bar{1}}$. Lại theo tính bất biến của B, ta có $B(\mathfrak{g}_{\bar{0}},[Y_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}]) = B([\mathfrak{g}_{\bar{0}},Y_{\bar{1}}],\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = 0$ nên $[Y_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}] = 0$. Tương tự với cách làm trên ta có $[T_{\bar{1}},T_{\bar{1}}] = \lambda Z_1 + mZ_2 + Z_3$. Kí hiệu siêu đại số Lie này là $\mathfrak{g}^s_{8,2,2}(\lambda,m)$ với tích Lie khác không $[X_1,X_2] = Z_3$, $[X_2,X_3] = Z_1$, $[X_3,X_1] = Z_2$, $[X_3,T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[X_1,T_{\bar{1}}] = \lambda Y_{\bar{1}}$, $[X_2,T_{\bar{1}}] = mY_{\bar{1}}$, $[T_{\bar{1}},T_{\bar{1}}] = \lambda Z_1 + mZ_2 + Z_3$.

Ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng $\mathfrak{g}^s_{8,2,2}(\lambda,m)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,2}(\lambda',m')$ đẳng cấu đẳng cự với nhau khi và chỉ khi (λ',m') là hoán vị của (λ,m).

4.2. *Với* $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{6,2}(\lambda)$

Các tích Lie khác không $[X_3,Z_1] = Z_1$, $[X_3,Z_2] = \lambda Z_2$, $[X_3,X_1] = -X_1$, $[X_3,X_2] = -\lambda X_2$, $[Z_1,X_1] = Z_3$, $[Z_2,X_2] = \lambda Z_3$ với $\lambda \neq 0$, $\mathfrak{g}_{6,2}(\lambda_1)$ và $\mathfrak{g}_{6,2}(\lambda_2)$ đẳng cấu nếu và chỉ nếu $\lambda_1 = \pm\lambda_2$ hoặc $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$. Ta có $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ thỏa mãn Bổ đề 2.2 nên $ad(Z_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$. Do đó $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = span\{Z_3\}$.

Chú ý rằng

$$ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} \in sp\left(\mathfrak{g}_{\bar 1}, B\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}\times\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right) = sp(2).$$

Đặt $V = span\left\{ad(X_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_j)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right\}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$. Nếu $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$ suy ra $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = 0$. Tương tự ta cũng có $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$ nên $\mathfrak{g}$ khả phân. Vì vậy ta xét $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} \neq 0$.

Vì $ad(X_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$, $i = 1,2$, phụ thuộc tuyến tính (Bổ đề 2.1) nên $\dim V = 1, 2$.

4.2.1. Nếu $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V} = 1$

Đặt

$$ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = x_1 ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = x_2 ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = z_1 ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}},$$

$ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = z_2 ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$. Do $\left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = -ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ nên $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$.

Tương tự, ta cũng có $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Ta có

$B([\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}],[\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1}]) = B([[\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}], \mathfrak{g}_{\bar 1}], \mathfrak{g}_{\bar 1}) = 0$

suy ra $[\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}]^{\perp} = Z(\mathfrak{g}_{\bar 0}) = \mathbb{C}Z_3$.

Theo Mệnh đề 3.3, $\mathfrak{g}$ là mở rộng kép một chiều của $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}_{\bar 0}) \oplus sp(\mathfrak{g}_{\bar 1})$ (với $\mathfrak{q}_{\bar 0} = span\{Z_1, Z_2, X_1, X_2\}$) bởi $ad(X_3)$. Áp dụng phân loại $Sp(\mathfrak{g}_{\bar 1})$- quỹ đạo của $sp(\mathfrak{g}_{\bar 1})$, ta có các trường hợp sau của $ad(X_3)$.

- $ad(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là

$\mathfrak{g}^{s}_{8,2,3}(l)$ với các tích Lie khác không

$[X_3, Z_1] = Z_1, [X_3, Z_2] = \lambda Z_2, [X_3, X_1] = -X_1, [X_3, X_2] = -\lambda X_2,$

$[Z_1, X_1] = Z_3,\ [Z_2, X_2] = \lambda Z_3,\ [X_3, T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}, [T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = Z_3.$

- $ad(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$. Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là

$\mathfrak{g}^s_{8,2,4}(\lambda, \mu)$ với các tích Lie khác không

$[X_3, Z_1] = Z_1, [X_3, Z_2] = \lambda Z_2, [X_3, X_1] = -X_1, [X_3, X_2] = -\lambda X_2,$

$[Z_1, X_1] = Z_3, [Z_2, X_2] = \lambda Z_3,\ [X_3, Y_{\bar{1}}] = \mu Y_{\bar{1}}, [X_3, T_{\bar{1}}] = -\mu T_{\bar{1}}, [Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \mu Z_3.$

4.2.2. Nếu $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V} = 2$

Do $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\ ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} \neq 0$. Ta có $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ phụ thuộc tuyến tính nên $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = x ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$. Mà $-ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right] = x ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ vì vậy $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$. Do $\left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right] = ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ nên $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ nửa đơn có các giá trị riêng $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ và $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ lũy linh (xem Bổ đề 2.3). Ta có thể chọn cơ sở chính tắc $\{Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}\}$ của $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ để $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$.

Thay $Y_{\bar{1}} := \frac{1}{m} Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}} := m T_{\bar{1}}$, ta được $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giả sử $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = a ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = b ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$. Suy luận tương tự như trên, $\left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right] = \lambda ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ suy ra $\lambda = 1$ hoặc $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$.

Từ $\left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right] = \lambda ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ suy ra $\lambda = -1$ hoặc $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$.

Nếu $\lambda = -1$ ta có thể thay vai trò X_2, Z_2 cho nhau nên có thể xem $\lambda = 1$.

Do đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$, ta tính được $[Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Z_3, [T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = X_1$. Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là $\mathfrak{g}^s_{8,2,5}(\lambda)$ với các tích Lie khác không $[X_3, Z_1] = Z_1$,

$[X_3, Z_2] = \lambda Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1$, $[X_3, X_2] = -\lambda X_2$, $[Z_1, X_1] = Z_3$,

$[Z_2, X_2] = \lambda Z_3$, $[X_3, Y_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Y_{\bar{1}}$, $[X_3, T_{\bar{1}}] = -\frac{1}{2}T_{\bar{1}}$, $[Z_1, T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Z_3$,

$[T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = X_1$.

- Nếu $\lambda = 1$ thì $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$, theo tính chất bất biến của B, ta có $[Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Z_3, [T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = X_1 + mX_2$. Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là $\mathfrak{g}^s_{8,2,6}(m)$ với tích Lie khác không $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, Z_2] = Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1$,

$[X_3, X_2] = -X_2$, $[Z_1, X_1] = Z_3$, $[Z_2, X_2] = Z_3$, $[X_3, Y_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Y_{\bar{1}}$,

$[X_3, T_{\bar{1}}] = -\frac{1}{2}T_{\bar{1}}$, $[Z_1, T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[Z_2, T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \frac{1}{2}Z_3$, $[T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = X_1 + mX_2$.

4.3. *Với* $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{6,3}$

Khi đó, các tích Lie khác không $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, Z_2] = Z_1 + Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1 - X_2$, $[X_3, X_2] = -X_2$ và $[Z_1, X_1] = [Z_2, X_1] = [Z_2, X_2] = Z_3$. Đặt $V = span\left\{ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right\}$. Lập luận tương tự tiểu mục 4.2, ta có $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = span\{Z_3\}$, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} \neq 0$, $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$, $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$, $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ đôi một phụ thuộc tuyến tính nên $\dim V = 1, 2$.

4.3.1. *Nếu* $\dim V = 1$

Lập luận tương tự tiểu mục 4.2.1, ta có $ad(X_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = ad(Z_i)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$, $i = 1, 2$, $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]^{\perp} = Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \mathbb{C}Z_3$, $\mathfrak{g}$ là mở rộng kép một chiều của $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}_{\bar{0}}) \oplus \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$

(với $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = span\{Z_1, Z_2, X_1, X_2\}$) bởi $ad(X_3)$. Áp dụng phân loại $Sp(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$- quỹ đạo của $sp(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$, ta có các trường hợp sau của $ad(X_3)$.

- $ad(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ta kí hiệu siêu đại số này là Lie $\mathfrak{g}^s_{8,2,7}$ với

các tích Lie khác không $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, Z_2] = Z_1 + Z_2$, $[X_3, X_1] = -X_1 - X_2$, $[X_3, X_2] = -X_2$, $[Z_1, X_1] = [Z_2, X_1] = [Z_2, X_2] = Z_3$, $[X_3, T_{\bar{1}}] = Y_{\bar{1}}$, $[T_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = Z_3$.

- $ad(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. Ta kí hiệu siêu đại số này là Lie $\mathfrak{g}^s_{8,2,8}(\lambda)$

với các tích Lie khác không $[X_3, Z_1] = Z_1$, $[X_3, X_1] = -X_1 - X_2$, $[X_3, X_2] = -X_2$, $[X_3, Z_2] = Z_1 + Z_2$, $[Z_1, X_1] = [Z_2, X_1] = [Z_2, X_2] = Z_3$, $[X_3, Y_{\bar{1}}] = \lambda Y_{\bar{1}}$, $[X_3, T_{\bar{1}}] = -\lambda T_{\bar{1}}$, $[Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}] = \lambda Z_3$.

4.3.2. Nếu $\mathbf{dim}\,V = 2$

Đầu tiên ta chứng minh $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$. Thật vậy, giả sử $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} \neq 0$ và đặt $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \xi\, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$. Do $-ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}\right]$ nên $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = 0$. Đồng thời ta cũng có $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ nửa đơn và $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ lũy linh (xem Bổ đề 2.3). Do đó ta có thể chọn cơ sở chính tắc $\{Y_{\bar{1}}, T_{\bar{1}}\}$ của $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sao cho $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Đặt $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \alpha\, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$, $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} = \beta\, ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$.

Từ hệ thức $\beta ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} + ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ suy ra $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Điều này mâu thuẫn nên $ad(Z_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$.

Lập luận tương tự, ta được $ad(X_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Từ đây ta có $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ không thể đồng thời bằng không. Do vai trò của $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ bình đẳng nên ta giả sử $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} \neq 0$. Vì $\left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ nên theo Bổ đề 2.2, $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ nửa đơn, $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ lũy linh và ta có thể chọn cơ sở chính tắc $\{Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}\}$ của $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ sao cho $ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Đặt $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = a\,ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$.

Từ $-ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = \left[ad(X_3)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}, a\,ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}\right] = a\,ad(Z_2)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$ suy ra $ad(X_1)\big|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}} = 0$. Theo tính chất bất biến của B, ta có $[X_3, Y_{\bar 1}] = \frac{1}{2}Y_{\bar 1}, [X_3, T_{\bar 1}] = -\frac{1}{2}T_{\bar 1}$, $[Z_2, T_{\bar 1}] = Y_{\bar 1}$, $[Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}] = \frac{1}{2}Z_3, [T_{\bar 1}, T_{\bar 1}] = X_2$.

Ta kí hiệu siêu đại số Lie này là $\mathfrak{g}^s_{8,2,9}$ với các tích Lie khác không

$$[X_3, Z_1] = Z_1,\ [X_3, Z_2] = Z_1 + Z_2,\ [X_3, X_1] = -X_1 - X_2,\ [X_3, X_2] = -X_2,$$
$$[X_3, Y_{\bar 1}] = \tfrac{1}{2}Y_{\bar 1}, [X_3, T_{\bar 1}] = -\tfrac{1}{2}T_{\bar 1},\ [Z_2, T_{\bar 1}] = Y_{\bar 1},\ [Y_{\bar 1}, T_{\bar 1}] = \tfrac{1}{2}Z_3, [T_{\bar 1}, T_{\bar 1}] = X_2.$$

Từ các tính toán trên, ta nhận được phân loại các siêu đại số Lie toàn phương 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều như sau:

Định lí 4.1. *Cho $\mathfrak{g}$ là một siêu đại số Lie toàn phương 8 chiều với phần chẵn bất khả phân 6 chiều.*

(i) Nếu $\mathfrak{g}$ khả phân thì $\mathfrak{g}$ có thể viết dưới dạng $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{g}_{\bar 1}$ với $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ đẳng cấu đẳng cự với $\mathfrak{g}_{6,1}, \mathfrak{g}_{6,2}(\lambda), \mathfrak{g}_{6,3}$ (đã được phân loại trong [6]), $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ là không gian vectơ symplectic 2 chiều và $[\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 1}] = \{0\}$.

(ii) Nếu $\mathfrak{g}$ bất khả phân thì $\mathfrak{g}$ đẳng cấu đẳng cự với một trong các siêu đại số Lie toàn phương $\mathfrak{g}^s_{8,2,1}(\lambda,\mu,\nu)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,2}(\lambda,\mu)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,3}(\lambda)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,4}(\lambda,\mu)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,5}(\lambda)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,6}(\mu)$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,7}$, $\mathfrak{g}^s_{8,2,8}(\lambda)$ và $\mathfrak{g}^s_{8,2,9}$ được mô tả như trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bajo, I., Benayadi, S. & Medina, A. (2007), "Symplectic structures on quadratic Lie algebras", *Journal of Algebra, 316*(1), 174-188.
2. Bordemann, M. (1997), "Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras", *Acta. Math. Uni. Comenianac, LXVI*(2), 151-201.
3. Bajo, I. & Benayadi, S. (1997), "Lie algebras admitting a unique quadratic structure", *Communication in Algebra, 25*(9), 2795-2805.
4. Bajo, I., Benayadi, S., & Bordemann, M. (2007), "Generalized double extension and descriptions of quadratic Lie superalgebras", arXiv:0712.0228v1.
5. Benamor, H. & Benayadi S. (1999), "Double extension of quadratic Lie superalgebras", *Communication in Algebra, 27*(1), 67-88.
6. Phạm Tiến Đạt, Dương Minh Thành, Lê Anh Vũ (2012), "Solvable quadratic Lie algebras in low dimensions", *East-West Journal of Mathematics, 14*(2), 208-218.
7. Kac, V. (1985), *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, New York.
8. Pinczon, G. & Ushirobira, R. (2007), "New Applications of Graded Lie Algebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras, and Cohomology", *Journal of Lie Theory, 17*, 633-667.
9. Dương Minh Thành (2013), "Two-step nilpotent quadratic Lie algebras and 8-dimensional non-commutative symmetric Novikov algebras", *Vietnam Journal of Mathematics, 41*(2), 135-148.
10. Medina, A. & Revoy, P. (1985), "Algèbres de Lie et produit scalaire invariant'', *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup*., 4ème sér. t.18, 553-561.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 27-9-2016; ngày phản biện đánh giá: 28-11-2016; ngày chấp nhận đăng: 16-12-2016)