# PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VOLTERRA LOẠI HYPERBOLIC

**Lê Hoàn Hoá*, Trần Trí Dũng†, Lê Thị Kim Anh‡**

## 1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy dạng vi tích phân sau đây :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + \int_0^t K(t,\, s,\, u(s))ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \textbf{(P)}$$

trong đó $(A(t),\, D(A(t)))_{t\geq 0}$ sinh ra một họ tiến hoá liên tục mạnh $\left(U(t,s)\right)_{0\leq s\leq t}$ trên không gian Banach $(X, \|.\|)$ và họ tiến hoá này thỏa mãn $\|U(t,s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}, \forall (t,s): 0 \leq s \leq t$

($M, \omega$ là các hằng số xuất hiện trong định lí Hille - Yosida), $A(t): D \to X,\ D \subset X$ . Ta giả sử ánh xạ $u \mapsto K(t,\, s,\, u(s))$ xác định từ D vào X.

Bài toán (P) ở trên được rất nhiều các nhà Toán học quan tâm, nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau, chẳng hạn như các tác giả trong [1], [2], [3]. Những bài toán tích phân Volterra loại hyperbolic này xuất hiện tự nhiên khi chúng ta nghiên cứu sự đàn hồi của các chất rắn. Trong [1] các tác giả đã nghiên cứu bài toán (P) với *A* không phụ thuộc vào biến thời gian. Mục đích của chúng tôi là mở rộng một số kết quả của [1] khi xét *A* phụ thuộc vào biến thời gian.

## 2. Các kết quả chính

Để chỉ ra sự tồn tại nghiệm cho bài toán (P), trước hết ta xét bài toán ($P_1$) sau đây

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t),\ t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \textbf{(P}_1\textbf{)}$$

* PGS.TS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM
† ThS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM
‡ ThS, Đại học Tiền Giang.

Định lí sau đây là cơ sở cho chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất của nghiệm mạnh của bài toán (P).

**Định lí 2.1 :**

Giả sử đối với bài toán ($P_1$), ta có các giả thiết sau đây :

(i) $\left(U(t,s)\right)_{0\le s\le t}$ là họ nửa nhóm liên tục đều và ánh xạ $t\mapsto A(t)$ liên tục.

(ii) Đối với mỗi $x\in X$ ta có : $U_t(t,s)x = A(t)U(t,s)x$, $U_s(t,s)x = -U(t,s)A(s)x$ và các đạo hàm riêng này liên tục theo *X*- chuẩn.

(iii) $f\in W^{1,1}([0,\tau],\ X)$.

Khi đó tồn tại duy nhất $u\in C^1([0,\tau];\ X)\cap C([0,\tau];\ D)$ thỏa mãn bài toán ($P_1$) trên $[0,\tau]$.

Ngoài ra, với mỗi $t\in[0,\tau]$ ta có các đánh giá sau :

$$\|u(t)\|\le Me^{\omega t}\left(\|u_0\|+\int_0^t e^{-\omega s}\|f(s)\|ds\right) \tag{2.1}$$

$$\|A(t)u(t)\|\le\|f(t)\|+Me^{\omega t}\left(\|A(0)u_0+f(0)\|+\int_0^t e^{-\omega s}\|f'(s)\|ds\right) \tag{2.2}$$

$$\|u(t)-u_0\|\le M\left(\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f(s)+A(s)u_0\|ds\right) \tag{2.3}$$

$$\|A(t)u(t)-A(t)u_0\|\le\left\|A(t)\hat{u}(t)\right\|+\|f(t)-f(0)\|+M\left(\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f'(s)\|ds\right) \tag{2.4}$$

trong đó $\hat{u}(.)$ là nghiệm của bài toán :

$$\begin{cases}\hat{u}'(t)=A(t)\hat{u}(t)+A(t)u_0+f(0),\ t\ge 0\\ \hat{u}(0)=0\end{cases} \tag{2.5}$$

**Chứng minh.**

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán ($P_1$) trên $[0,\tau]$ với các giả thiết (i) và (iii) được chứng minh tương tự như trong [2]. Khi đó nghiệm *u* của ($P_1$) sẽ thỏa mãn $u\in C^1([0,\tau];\ X)\cap C([0,\tau];\ D)$ và công thức biến thiên hằng số sau :

$$u(t) = U(t,\, 0)u_0 + \int_0^t U(t,\, s)\, f(s)ds,\; 0 \le t \le \tau\,.$$

Từ đó ta có $\|u(t)\| \le \|U(t,\, 0)u_0\| + \left\| \int_0^t U(t,\, s)\, f(s)ds \right\|$.

Suy ra $\|u(t)\| \le Me^{\omega t} \left( \|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \| f(s)\| ds \right)$, hay (2.1) được chứng minh.

Tiếp theo ta có :

$$\int_0^t Me^{\omega(t-s)} \| f'(s)\| ds \ge \int_0^t \|U(t,\, s)\, f'(s)\| ds \ge \left\| \int_0^t U(t,\, s)\, f'(s)ds \right\|$$

$$\ge \left\| f(t) - U(t,\, 0)\, f(0) + \int_0^t A(t)U(t,\, s)\, f(s)ds \right\| (*)$$

$$Me^{\omega(t)} \|A(0)u_0 + f(0)\| \ge \|U(t,\, 0)A(0)u_0 + U(t,\, 0)\, f(0)\| \ge \|A(t)U(t,\, 0)u_0 + U(t,\, 0)\, f(0)\| \; \mathbf{(**)}$$

Kết hợp (*) và (**), ta suy ra vế phải của (2.2) lớn hơn hoặc bằng

$$\left\| f(t) - U(t,\, 0)\, f(0) + \int_0^t A(t)U(t,\, s)\, f(s)ds + A(t)U(t,\, 0)u_0 + U(t,\, 0)\, f(0) - f(t) \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t A(t)U(t,\, s)\, f(s)ds + A(t)U(t,\, 0)u_0 \right\| = \|A(t)u(t)\|.$$

Vậy (2.2) được chứng minh.

Để chứng minh (2.3) ta chú ý phương trình (2.6) sau đây :

$$\begin{cases} v'(t) = A(t)v(t) + f(t) + A(t)u_0,\; \tau \ge t \ge 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

có nghiệm duy nhất là $v(t) = u(t) - u_0$. Áp dụng (2.1), ta thu được :

$$\|u(t) - u_0\| \le M \left( \int_0^t e^{\omega(t-s)} \| f(s) + A(s)u_0\| ds \right),$$

hay (2.3) được chứng minh.

Cuối cùng, để chứng minh (2.4) là đúng, ta xét phương trình (2.7) sau đây :

$$\begin{cases} w'(t) = A(t)w(t) + f(t) - f(0), \ \tau \ge t \ge 0 \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Khi đó (2.7) cũng có nghiệm duy nhất là *w(t)* thỏa mãn :

$$w(t) + \hat{u}(t) = u(t) - u_0.$$

Áp dụng (2.2) cho *w(t)* ta thu được :

$$\|A(t)u(t) - A(t)u_0\| \le \|A(t)\hat{u}(t)\| + \|A(t)w(t)\|$$

$$\le \|A(t)\hat{u}(t)\| + \|f(t) - f(0)\| + M\left(\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f'(s)\|ds\right).$$

Vậy (2.4) là đúng.

Định lí hoàn toàn được chứng minh.

*Bước kế tiếp, chúng tôi cần các kết quả sau :*

**Bổ đề 2.2 : [1]**

Đặt $\Delta(0,t_1) = \{(t,s) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le s \le t \le t_1\}$. Giả sử :

i) $K : \Delta(0,t_1) \times D \to X$ liên tục,

ii) $K_t(t,s,x)$ tồn tại và liên tục từ $\Delta(0,t_1) \times D \to X$ .

Với $0 < \tau \le t_1$ và $u \in C([0,\tau];\, D)$, ta định nghĩa $Ju : [0,\tau] \to X$ bởi :

$$(Ju)(t) = \int_0^t K(t,s,u(s))ds. \tag{2.8}$$

Khi đó $Ju \in C^1([0,\tau];\, X)$ và

$$(Ju)'(t) = K(t,\, t,\, u(t)) + \int_0^t K_t(t,s,u(s))ds. \tag{2.9}$$

**Bổ đề 2.3.**

Giả sử các điều kiện (i) và (ii) của bổ đề (2.2) được thỏa mãn. Khi đó với mỗi $\tau \in [0,\, t_1]$ cố định và với $u \in C([0,\tau];\, D)$ cho trước, tồn tại duy nhất $z = Pu \in C^1([0,\tau];\, X) \bigcap C([0,\tau];\, D)$ là nghiệm của bài toán sau :

$$z'(t) = A(t)z(t) + (Ju)(t),\ t \in [0,\tau]$$
$$z(0) = 0.$$

Ngoài ra, nếu ta có thêm giả thiết (iii) sau đây :

(iii) Với $u_0 \in D$, tồn tại $b, c, r$ là các số dương sao cho :

$\|K(t,s,x_1) - K(t,s,x_2)\| \le b\|x_1 - x_2\|$ và $\|K_t(t,s,x_1) - K_t(t,s,x_2)\| \le c\|x_1 - x_2\|$, với mọi $(t,s) \in \Delta(0,\, t_1)$ và $x_1,\ x_2 \in B_D(u_0, r) := \left\{ x \in D \,\middle|\, \|x - u_0\| \le r \right\}$

thì khi đó với $u_1,\ u_2 \in C([0,\tau],\ B_D(u_0,r))$ ta có :

$$\|Pu_1(t) - Pu_2(t)\| \le (Mb\int_0^t e^{\omega(t-s)} s ds)\|u_1 - u_2\|_{C([0,\tau];\, D)}\ \forall t \in [0,\tau] \tag{2.10}$$

và

$$\|A(t)Pu_1(t) - A(t)Pu_2(t)\| \le (bt + M\int_0^t e^{\omega(t-s)}(b + cs)ds)\|u_1 - u_2\|_{C([0,\tau];\, D)}\ \forall t \in [0,\tau]\ . \tag{2.11}$$

**Chứng minh.**

Theo bổ đề (2.2) ta có $Ju \in C^1([0,\tau];\ X)$. Do đó, theo định lí (2.1) ta suy ra được phần đầu của bổ đề.

Với $u_1,\ u_2 \in C([0,\tau],\ B_D(u_0,r))$, ta có :

$$Ju_1 - Ju_2 \in C^1([0,\tau];\ X)$$

và

$$\frac{d}{dt}(Pu_1(t) - Pu_2(t)) = A(t)(Pu_1 - Pu_2)(t) + Ju_1(t) - Ju_2(t),\ t \in [0,\tau].$$

Áp dụng các kết quả (2.1) và (2.2), ta thu được :

$$\|Pu_1(t) - Pu_2(t)\| \le M\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|Ju_1(s) - Ju_2(s)\| ds \tag{2.12}$$

$$\|A(t)Pu_1(t) - A(t)Pu_2(t)\| \le \|Ju_1(t) - Ju_2(t)\| + M\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|(Ju_1)'(s) - (Ju_2)'(s)\| ds. \tag{2.13}$$

Sử dụng các giả thiết trong (iii), ta có với $0 \le s \le \tau$ thì :

$$\|Ju_1(s)-Ju_2(s)\| \le \int_0^s \|K(s,r,u_1(r))-K(s,r,u_2(r))\|dr \le bs\|u_1-u_2\|_{C([0,\tau];\,D)}. \quad (2.14)$$

Tương tự ta có :

$$\|(Ju_1)'(s)-(Ju_2)'(s)\| \le \|K(s,s,u_1(s))-K(s,s,u_2(s))\| + \int_0^s \|K_s(s,r,u_1(r))-K_s(s,r,u_2(r))\|dr$$

$$\le (b+cs)\|u_1-u_2\|_{C([0,\tau];\,D)}. \quad (2.15)$$

Cuối cùng, từ (2.12) đến (2.15), ta suy ra bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

**Hệ quả 2.4.**

Với $u_1, u_2 \in C([0,\tau], B_D(u_0,r))$, $0<\tau\le t_1$, ta có :

$$\|Pu_1-Pu_2\|_{C([0,\tau];\,D)} \le \varphi(\tau)\|u_1-u_2\|_{C([0,\tau];\,D)}, \quad (2.16)$$

trong đó $\lim_{p\to 0^+}\varphi(p)=0$ và $\varphi$ chỉ phụ thuộc vào $M, \omega, b, c$.

**Định lí 2.5.**

Giả sử các giả thiết (i), (ii), (iii) trong các bổ đề (2.2) và (2.3) được thỏa mãn và $f\in W^{1,1}([0,t_1],X)$. Khi đó tồn tại $\tau\in(0,t_1]$ sao cho bài toán (P)

$$\begin{aligned} &u'(t)=A(t)u(t)+f(t)+(Ju)(t),\ t\in[0,\tau] \\ &u(0)=u_0 \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất $u\in C^1([0,\tau];\,X)\cap C([0,\tau];\,D)$.

Ngoài ra, ta có một nghiệm duy nhất $u^*:[0,\tau^*)\to D$ của (P) theo nghĩa nếu $u\in C^1([0,\tau'];\,X)\cap C([0,\tau'];\,D)$ là một nghiệm của (P) thì $\tau'\le\tau^*$. Ta gọi $u^*$ là *nghiệm cực đại* của (P).

**Chứng minh.**

Với $\tau\in(0,t_1]$, ta đặt $Y:=\{u\in C([0,\tau];\,D):\|u(t)-u_0\|\le r\}$, với $r$ được chọn trong giả thiết (iii). Khi đó Y là tập đóng khác rỗng trong không gian Banach $C([0,\tau];\,D)$.

Gọi $v_0$ là nghiệm (duy nhất) của phương trình :

$$v_0'(t) = A(t)v_0(t) + f(t),\ t \in [0,\tau]$$
$$v_0(0) = u_0$$

Định nghĩa toán tử $S$ bởi $Su := v_0 + Pu$. Khi đó điểm bất động của $S$ là một nghiệm của (P).

Ta sẽ chỉ ra rằng có số dương $\delta$ sao cho nếu $\tau \le \delta$ thì $S$ thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\|Su_1 - Su_2\|_{C([0,\tau];\,D)} \le \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{C([0,\tau];\,D)}\ \forall u_1, u_2 \in Y, \tag{2.17}$$

$$\|Su_0 - u_0\|_{C([0,\tau];\,D)} \le \frac{r}{2}, \tag{2.18}$$

trong đó $u_0$ là hàm hằng trong Y, nhận giá trị hằng là $u_0$. Từ đó để chứng minh S có điểm bất động duy nhất trong Y, ta sẽ chứng minh $S : Y \to Y$.

Thật vậy, với $u_1, u_2 \in Y$, ta có $Su_1 - Su_2 = Pu_1 - Pu_2$, từ đó theo hệ quả (2.4) tồn tại số dương $\delta_1$ sao cho (2.17) xảy ra nếu $\tau < \delta_1$.

Để chứng minh (2.18), ta quan sát rằng $Su_0 - u_0 = v_1 + v_2$ với $v_1, v_2 \in C^1([0,\tau];\ X) \cap C([0,\tau];\ D)$ lần lượt là các nghiệm của

$$\begin{cases} v_1'(t) = A(t)v_1(t) + f(t) - f(0) + \int_0^t K(t,\ s,\ u_0)ds,\ t \in [0,\tau] \\ v_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} v_2'(t) = A(t)v_2(t) + A(t)u_0 + f(0),\ t \in [0,\tau] \\ v_2(0) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Do đó $\|Su_0 - u_0\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{\tau \to 0^+} \|v_i(s_i)\| = \|v_i(0)\| = 0,\ \|v_i(s_i)\| = \|v_i\|,\ 0 \le s_i \le \tau\ (i = 1,\ 2).$

Do đó tồn tại số dương $\delta_2$ sao cho $\tau < \delta_2$ thì $\|v_1\| \le \frac{r}{4},\ \|v_2\| \le \frac{r}{4}.$

Chọn $\delta = \min(\delta_1,\ \delta_2)$ thì (2.17) và (2.18) sẽ xảy ra nếu $\tau \le \delta$.

Để kết thúc phần đầu của định lí ta sẽ chỉ ra $S : Y \to Y$. Thật vậy, với $u \in Y$, ta có $Su \in C([0,\tau];\, D)$ và

$$\|Su(t) - u_0\| \le \|Su(t) - Su_0\| + \|Su_0 - u_0\| \le \frac{1}{2}\|u(t) - u_0\| + \frac{r}{2} \le r,\ \forall t \in [0,\ \tau].$$

Vậy $Su \in Y$.

Ta kết thúc phần đầu của định lí.

Ở phần tiếp theo, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của nghiệm cực đại. Trước hết ta sẽ chỉ ra tính duy nhất của nghiệm của bài toán (P) trên đoạn bất kỳ $[0,\ \tau]$ ($\tau$ là các số thực thỏa mãn phần đầu của định lí). Thật vậy, giả sử *u, v* là 2 nghiệm của (P) trên $[0,\ \tau]$, ta đặt $\hat{t} := \max\{t \in [0,\ \tau] : u(s) = v(s),\ \forall s \in [0,\ t]\}$. Giả sử $\hat{t} < \tau$, đặt $y_0 = u(\hat{t}) = v(\hat{t})$ và

$$h(t) := \int_0^{\hat{t}} K(t,\ s,\ u(s))ds + f(t) = \int_0^{\hat{t}} K(t,\ s,\ v(s))ds + f(t),\ t \in [\hat{t},\ \tau].$$

Bởi vì $h \in W^{1,1}([\hat{t},\ \tau],\ X)$ nên theo phần đầu của định lí, tồn tại $\varepsilon \in (0,\ \tau - \hat{t}]$ sao cho bài toán

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + \displaystyle\int_{\hat{t}}^{t} K(t,\ s,\ u(s))ds + h(t),\ t \in [\hat{t},\ \hat{t} + \varepsilon] \\ u(\hat{t}) = y_0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất. Do đó $u(t) = v(t)\ \forall t \in [\hat{t},\ \hat{t} + \varepsilon]$, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của $\hat{t}$. Vậy $\hat{t} = \tau$, tức là $u \equiv v$ trên $[0,\ \tau]$.

Cuối cùng nghiệm cực đại của (P) được xây dựng thông qua cách nối nghiệm thông thường.

Định lí được chứng minh.

*Trong phần tiếp theo ta sẽ nghiên cứu tính chất của nghiệm cực đại.*

**Định lí 2.6.**

Giả sử ngoài các giả thiết của định lí (2.5) được thỏa mãn, ta còn có thêm giả thiết sau :

(iv) $K$ và $K_t$ là bị chặn trên mỗi tập bị chặn của $\Delta(0,t_1)\times D$.

Khi đó nghiệm cực đại $u^*:[0,\tau^*)\to D$ của (P) thỏa mãn một trong hai kết quả sau :

a) $\tau^*=t_1$ và $u^*$ có thể được mở rộng thành nghiệm của (P) trên $[0,\ t_1]$.

b) $\limsup\limits_{t\to\tau^-}\|u^*(t)\|=\infty.$

**Chứng minh.**

Giả sử b) không xảy ra, ta chứng minh a) phải xảy ra. Thật vậy, khi đó ảnh của $u^*$ là một tập bị chặn trong *D*. Với $0\le t<t+h<\tau$, ta đặt

$$v(t):=u(t+h)-u(t)$$
$$g(t):=f(t+h)-f(t)+\int_0^{t+h}K(t+h,\ s,\ u(s))ds-\int_0^{t}K(t,\ s,\ u(s))ds.$$

Ta suy ra :

$$\begin{cases} v'(t)=A(t)v(t)+g(t),\ t\in[0,\ \tau-h) \\ v(0)=u^*(h)-u^*(0) \end{cases} \tag{2.21}$$

Áp dụng (2.1) và (2.2), ta suy ra tồn tại $\gamma$ không phụ thuộc t và h sao cho :

$$\|u^*(t+h)-u^*(t)\|\le\gamma\left(\|u^*(h)-u^*(0)\|+\|A(0)v(0)+g(0)\|+\|g(t)\|+\int_0^t\left(\|g(s)\|+\|g'(s)\|\right)ds\right) \tag{2.22}$$

Theo giả thiết (iv) ta có :

$$c_1=\sup\left\{\|K(t,\ s,\ u^*(s))\|:0\le s\le t<\tau\right\}<\infty$$
$$c_2=\sup\left\{\|K_t(t,\ s,\ u^*(s))\|:0\le s\le t<\tau\right\}<\infty.$$

Vì vậy ta suy ra :

$$\|g(t)\| \le \int_0^t \|K(t+h,\, s,\, u^*(s)) - K(t,\, s,\, u^*(s))\| ds + \int_t^{t+h} \|K(t+h,\, s,\, u^*(s))\| ds + \| f(t+h) - f(t)\|$$

$$\le \int_t^{t+h} \| f'(s)\| ds + c_2 \tau h + c_1 h. \tag{2.23}$$

Theo bổ đề (2.2) ta có :

$$g'(s) = f'(s+h) - f'(s) + K(s+h,\, s+h,\, u^*(s+h)) - K(s,\, s,\, u^*(s)) +$$

$$+ \int_0^{s+h} K_s(s+h,\, r,\, u^*(r))dr - \int_0^s K_s(s,\, r,\, u^*(r))dr \quad \text{hầu khắp nơi trên } [0,\, \tau - h).$$

Từ đây ta suy ra :

$$\int_0^t \|g'(s)\| ds \le \int_0^t \| f'(s+h) - f'(s)\| ds + \int_0^t \|K(s+h,\, s+h,\, u^*(s+h)) - K(s,\, s,\, u^*(s))\| ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{-h}^0 \|K_s(s+h,\, r+h,\, u^*(r+h))\| drds + \int_0^t \int_0^s \|K_s(s+h,\, r+h,\, u^*(r+h)) - K_s(s,\, r,\, u^*(r)\| drds \tag{2.24}$$

Từ (2.22) đến (2.24) và từ đẳng thức $u^*{}'(h) - u^*{}'(0) = A(0)v(0) + g(0)$, ta thu được kết quả sau : Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta_\varepsilon > 0$ sao cho :

$$0 < h < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|u^*(t+h) - u^*(t)\| < \varepsilon,\ 0 \le t < t+h < \tau.$$

Do đó tồn tại $\alpha \in D : \lim_{t \to \tau^-} \|u^*(t) - \alpha\| = 0.$

Đặt $u^*(\tau) = \alpha$ thì $u^*$ thỏa mãn (P) trên cả đoạn $[0,\, \tau]$. Do tính cực đại của $u^*$ ta phải có $\tau = t_1$.

Định lí được chứng minh.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Rainer Nagel and Eugenio Sinestrari, (1996), *Nonlinear hyperbolic Volterra integrodifferential equations*, Nonlinear Analysis, Vol. 27, 167 – 186.

[2] Rainer Nagel and Eugenio Sinestrari, (1994), *Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille – Yosida operators*, Functional Analysis, Vol. 150, 51 – 70.

[3] Melvin L. Heard, (1981), *An abstract semilinear hyperbolic Volterra integrodifferential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 80, 175 – 202.

[4] J. Wu, (1996), *Theory and applications of partial functional differential equations*, App. Math. Sc.199, Springer-Verlag.

[5] K. J. Engel and R. Nagel, (2000), *One – parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer – Verlag.

## Tóm tắt

**Phương trình vi tích phân Volterra loại hyperbolic**

Trong bài báo này chúng tôi sẽ chỉ ra sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy dạng vi tích phân sau đây :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + \int_0^t K(t,\, s,\, u(s))ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

## Abstract

**Hyperbolic Volterra integrodifferential equations**

In this article, we prove existence and uniqueness of solutions for the following Cauchy integro-differential equations :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + \int_0^t K(t,\, s,\, u(s))ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$