TÍNH LIÊN TỤC CỦA TẬP NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOGISTIC CHỨA THAM SỐ

Nguyễn Bích Huy *, Nguyễn Duy Thanh †, Trần Đình Thanh ‡

1. Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi muốn nghiên cứu cấu trúc của tập nghiệm yếu dương của bài toán biên chứa tham số sau:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) u^{\alpha} - u^{\beta} & \text{trong } \Omega, \\ u = 0 & \text{trên } \delta\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là tập mở, bị chặn, có biên trơn ; $0 < \alpha < \beta \le 1$, λ là tham số dương và hàm $m(x)$ thuộc $L^q(\Omega)$ với q thỏa điều kiện

$$(2^*)' \le \frac{q.2^*}{q\alpha + 2^*} \text{ hay } q > \frac{2^*}{2^* - 1 - \alpha} \tag{2}$$

với $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Phương trình (1) gọi là phương trình logistic, nó mô tả một số hiện tượng trong y học và sinh học.

Thông thường, nghiệm của phương trình chứa tham số không tồn tại đơn lẻ, rời rạc và ta muốn biết, liệu tập nghiệm của nó có "liên tục" theo một nghĩa nào đó không ? Trong [4, 6] chúng tôi đã chứng minh (1) có nghiệm yếu dương khi λ đủ lớn nhưng chưa xem xét tính liên tục của tập nghiệm nhận được. Nếu $q > \dfrac{N}{2}$ thì nghiệm yếu dương của (1) nếu tồn tại, sẽ duy nhất và bị chặn ; khi đó cấu trúc tập nghiệm của (1) có thể nghiên cứu nhờ các kết quả về phân nhánh toàn cục dạng định lý Rabinowitz như đã làm trong [1]. Điều kiện (2) mà chúng tôi đặt ra không đòi hỏi $q > \dfrac{N}{2}$ nên nghiệm yếu dương (nếu tồn tại) có thể không bị chặn. Do vậy, phương pháp nghiên cứu ở [1] không áp dụng được và chúng tôi

* PGS.TS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM.
† ThS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM.
‡ TS, Trường Đại học Y dược Tp.HCM.

sẽ áp dụng phương pháp chặn dưới đơn điệu của Krasnoselskii ở dạng được phát triển trong [5].

2. Các khái niệm và kết quả được sử dụng

2.1 Nghiệm yếu của phương trình elliptic

Xét bài toán tìm hàm u thỏa mãn

$$-\Delta u = f(x,u) \text{ trong } \Omega \; ; \; u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \qquad (3)$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là tập mở, bị chặn, có biên trơn, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa điều kiện Caratheodory.

Ta sẽ sử dụng các kí hiệu thông thường cho các không gian Sobolev : $H_0 = W_0^{1,2}, H^{-1} = (H_0)^*$, chuẩn trong H_0 và Lp được kí hiệu tương ứng là $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_P$. Dưới đây nếu không được nói cụ thể hơn thì ta hiểu rằng các tích phân được lấy trên tập Ω.

Định nghĩa

Hàm $u \in H_0$ gọi là một nghiệm yếu của phương trình (3) nếu $f(x,u) \in L^1$, $uf(x.u) \in L^1$ và

$$\int \nabla u \nabla \varphi = \int f(x,u)\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0 \cap L^\infty .$$

Ta có định lí cơ bản sau về sự tồn tại nghiệm yếu.

Định lí [3]

Giả sử hàm Caratheodory $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

i) $g(x,0) = 0, g(x,u)$ tăng theo biến u,

ii) Với mỗi số t>0 tồn tại hàm $\varphi_t \in L^1$ sao cho $\sup_{|u| \le t} |g(x,u)| \le \varphi_t(x)$.

Khi đó với mọi $h \in H^{-1}$ thì bài toán

$$-\Delta u + g(x,u) = h \text{ trong } \Omega \; ; \; u = 0 \text{ trên } \partial\Omega$$

có duy nhất nghiệm yếu.

2.2 Phương trình chứa tham số trong không gian Banach có thứ tự

Giả sử $(X, \|.\|)$ là không gian Banach với thứ tự "$\leq$" được sinh bởi nón $K \subset X$. Cho ánh xạ $F : \mathbb{R}_+ \times K \to K$, ta xét bài toán tìm cặp $(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K$ sao cho

$$x = F(\lambda, x). \tag{4}$$

Ta kí hiệu $S = \{x \in K \setminus \{0\} : \exists \lambda \geq 0, x = F(\lambda, x)\}$.

Định nghĩa

Ta nói rằng tập S có tính chất liên tục, không bị chặn, xuất phát từ 0 nếu với mọi tập G là mở, bị chặn, chứa 0 thì ta luôn có $S \cap \partial G \neq \phi$.

Định lí 2 [5]

Giả sử ánh xạ $F : \mathbb{R}_+ \times K \to K$ là hoàn toàn liên tục và tồn tại ánh xạ tăng $G : K \to K$, hàm $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sao cho

$$F(\lambda, x) \geq G(\varphi(\lambda) x),\ \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K.$$

Hơn nữa, giả sử tồn tại phần tử $u_0 \in K \setminus \{0\}$ và các số dương a, b sao cho

i) $G(tu_0) \geq atu_0 \ \ \forall t \in [0, b]$;

ii) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \infty, \lim\limits_{t \to \infty} \|G(tu_0)\|_0 = \infty$, trong đó $\|.\|_0$ là một chuẩn trên X thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\|x\|_0 \leq \|x\| \ \forall x \in X ; 0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|_0 \leq \|y\|_0.$$

Khi đó tập nghiệm S của (3) có tính liên tục, không bị chặn, xuất phát từ 0.

3. Kết quả chính

Định lí

Giả sử các dữ kiện trong bài toán (1) thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $0 < \alpha < \beta \leq 1$,

ii) $m(x) \in L^q$ với q thỏa mãn điều kiện (2) và tồn tại số $m_0 > 0$, tập mở Ω_0 sao cho $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, $m(x) \geq m_0 \ \forall x \in \Omega_0$.

Khi đó tập nghiệm yếu dương của (1) là liên tục, không bị chặn, xuất phát từ 0.

Chứng minh.

Ta sẽ áp dụng định lí 1 để đưa bài toán tìm nghiệm yếu của (1) về bài toán tìm nghiệm của phương trình dạng (4) trong không gian H_0 với thứ tự sinh bởi nón K các hàm không âm rồi áp dụng định lí 2 để có kết quả phải chứng minh.

Bước 1. Đưa về phương trình dạng (4).

Chọn p là số thỏa mãn điều kiện

$$(2^*)' = \frac{qp}{q\alpha + p} \tag{5}$$

thì do (2) ta có $p < 2^*$. Do đó ánh xạ I nhúng H_0 vào Lp là compắc. Vì $H_0 \subset L^{2^*}$ nên $H^{-1} \supset L^{(2^*)'}$. Do vậy, với mỗi $h \in L^{(2^*)'}$ thì theo định lí 1, bài toán

$$-\Delta v + v^\beta = h \text{ trong } \Omega,\ v = 0 \text{ trên } \partial\Omega \tag{6}$$

có duy nhất nghiệm yếu, kí hiệu là Ph. Ta sẽ chứng minh rằng, ánh xạ P là liên tục từ $L^{(2^*)'}$ vào H_0. Thật vậy, với $h, h' \in L^{(2^*)'}$, theo định nghĩa nghiệm yếu của (6) ta có

$$\int \nabla(Ph - Ph')\nabla\varphi + \int [(Ph)^\beta - (Ph')^\beta]\varphi = \int (h - h')\varphi \ \forall \varphi \in H_0.$$

Cho $\varphi = Ph - Ph'$ ta có

$$\int |\nabla(Ph - Ph')|^2 + \int [(Ph)^\beta - (Ph')^\beta](Ph - Ph') = \int (h - h')(Ph - Ph').$$

Chú ý rằng số hạng thứ hai ở vế trái là không âm và áp dụng bất đẳng thức Holder ta được

$$\|Ph - Ph'\|_H^2 \le \|h - h'\|_{(2^*)'} . \|Ph - Ph'\|_{2^*}$$

Từ đây ta được $\|\mathrm{Ph} - \mathrm{Ph}'\|_{\mathrm{H}} \le \mathrm{C}.\|\mathrm{h} - \mathrm{h}'\|_{(2^*)'}$.

Với mỗi $(\lambda, \mathrm{u}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{H}_0, \mathrm{u} \ge 0$ ta có $u \in L^{2^*}$ và do đó $\lambda m(x) u^\alpha \in L^t$ với $t = \dfrac{q2^*}{q\alpha + 2^*} > (2^*)'$. Do đó bài toán

$$-\Delta v + v^\beta = \lambda m(x) u^\alpha \text{ trong } \Omega,\ v = 0 \text{ trên } \partial\Omega$$

có duy nhất nghiệm yếu, ta kí hiệu nó là $F(\lambda,u)$. Như vậy ta có ánh xạ $F:\mathbb{R}_+\times K\to K$, nghiệm của phương trình $u=F(\lambda,u)$ sẽ là nghiệm yếu của (1). Do đó, ta chỉ cần chứng minh tập nghiệm yếu của phương trình $u=F(\lambda,u)$ có tính chất nêu trong định lí.

Xét ánh xạ $N:(\lambda,u)\mapsto \lambda m(x)u^{\alpha}$. Do định nghĩa số p và lí luận tương tự trên ta thấy N tác động từ Lp vào $L^{(2^*)'}$, do đó theo định lí Krasnoselskii nó liên tục. Vì ta có $F=PoNoI$ nên F là ánh xạ hoàn toàn liên tục. Như đã chứng mính trong [4,6] F đơn điệu tăng theo biến u.

Bước 2. Xây dựng ánh xạ chặn dưới đơn điệu

Ta sẽ chứng minh $G(u):=F(1,u)$ thỏa mãn các điều kiện của định lí 2. Trước tiên ta có G đơn điệu tăng và

$$F(\lambda,u)=F(1,\lambda^{1/\alpha}u)=G(\lambda^{1/\alpha}u).$$

Gọi φ là véctơ riêng tương ứng với giá trị riêng chính của bài toán

$$-\Delta u=\lambda u \text{ trong } \Omega_0,\ u=0 \text{ trên } \partial\Omega_0$$

và xét hàm $u_0=\varepsilon\varphi$ trên Ω_0, $u_0=0$ trên $\Omega\setminus\Omega_0$. Như đã chứng minh trong [2], khi $\varepsilon>0$ đủ nhỏ ta có

$$\int\nabla u_0\nabla\varphi\le\int m(x)u_0^{\alpha}\varphi \qquad \forall\varphi\in H_0,\varphi\ge 0. \tag{7}$$

Xét $t\in(0,1)$, vì $G(tu_0)=F(1,tu_0)$ là nghiệm yếu của (6) với $h=m(x)(tu_0)^{\alpha}$ nên ta có

$$\int\nabla G(tu_0)\nabla\varphi+\int(G(tu_0))^{\beta}\varphi=m(x)(tu_0)^{\alpha}\varphi,\forall\varphi\in H_0. \tag{8}$$

Nhân (7) với t và trừ (8) rồi cho $\varphi=(tu_0-G(tu_0))^{+}$ ta được

$$\int\left|\nabla(tu_0-G(tu_0))^{+}\right|^2\le\int\{(G(tu_0))^{\beta}-m(x)u_0^{\alpha}(t^{\alpha}-t)\}(tu_0-G(tu_0)) \tag{9}$$

trong đó $A=\{tu_0\ge G(tu_0)\}$.

Gọi g là thừa số thứ nhất trong tích phân ở vế phải của (9). Ta có g = 0 trên $A\cap\Omega\setminus\Omega_0$, còn trên $A\cap\Omega_0$ ta có

$$g\le(tu_0)^{\beta}-m_0u_0^{\alpha}(t^{\alpha}-t)=(tu_0)^{\alpha}\{(tu_0)^{\beta-\alpha}-m_0+m_0t^{1-\alpha}\}.$$

Vì hàm u_0 bị chặn nên từ đây ta thấy $g \le 0$ trên A khi t >0 đủ nhỏ. Do đó từ (9) ta thấy khi t đủ nhỏ thì $(tu_0 - G(tu_0))^+ = 0$ hkn hay $G(tu_0) \ge tu_0$. Vậy G thỏa mãn các điều kiện i) của định lí 2.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng ánh xạ $t \mapsto t^{-\alpha} G(tu_0)$ là tăng. Thật vậy, với $0 < t < s$ ta đặt $u = G(tu_0), v = G(su_0)$. Từ (8) ta có

$$\int \nabla(t^{-\alpha}u - s^{-\alpha}v)\nabla\varphi + \int (t^{-\alpha}u^{\beta} - s^{-\alpha}v^{\beta})\varphi = 0 \ \ \forall \varphi \in H_0.$$

Cho $\varphi = (t^{-\alpha}u - s^{-\alpha}v)^+$ ta được

$$\int \left|\nabla(t^{-\alpha}u - s^{-\alpha}v)^+\right|^2 + \int_A (t^{-\alpha}u^{\beta} - s^{-\alpha}v^{\beta})(t^{-\alpha}u - s^{-\alpha}v) = 0, \tag{10}$$

trong đó $A = \{t^{-\alpha}u \ge s^{-\alpha}v\}$. Trên A ta có

$$t^{-\alpha}u^{\beta} - s^{-\alpha}v^{\beta} \ge s^{-\alpha}v^{\beta}\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha\beta-\alpha} - 1\right] \ge 0.$$

Ở đây ta đã sử dụng giả thiết $\beta \le 1$. Do đó từ (10) ta được

$((t^{-\alpha}u - s^{-\alpha}v)^+ = 0)$ hay $t^{-\alpha}u \le s^{-\alpha}v$ hkn.

từ điều đã chứng minh ta có với $t \ge 1$.

$$G(tu_0) \ge t^{\alpha}G(u_0).$$

Do đó điều kiện ii) của định lí 2 được thỏa mãn với chuẩn $\|.\|_0 = \|.\|_{2*}$.

Định lí được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Arcoya D., Carmona J., Pellacci B. (2001), *Bifurcations for some quasilinear operators,* Proc. Royal Soc. Edin., 131A, 733 – 765

[2]. Boccardo L., Orsina L. (1994), *Sublinear equations in Ls*, Houston J. Math., 20, 99 – 144

[3]. Brezis H., Browder F. (1982), *Some properties of higher order Sobolev spaces*, J. Math. Pures Appl. 61 (1982), 245 – 259

[4]. N. B. Huy (2002), *Positive weak solution for some semilinear elliptic equations,* Nonl. Analysis 48, 939 – 945

[5]. N. B. Huy (1999), *Global continua of positive solutions for equations with nondifferentiable operators*, J. Math. Anal. Appl. 239, 449 – 456.

[6]. Trần Đình Thanh (2002), *Nghiệm yếu dương của một lớp phương trình elliptic.*Tạp chí khoa học, Trường ĐHSP Tp HCM, 28, 39 – 42.

Tóm tắt

Tính liên tục của tập nghiệm yếu của phương trình logistic chứa tham số

Trong bài báo, chúng tôi sử dụng phương pháp chặn dưới đơn điệu để chứng minh rằng tập nghiệm yếu của phương trình logistic chưa tham số là một nhánh liên tục không bị chặn.

Abstract

Global continua of weak solutions of logistic equation depending on a parameter

In this paper we use the monotone minorant method to prove that weak solutions of logistic equation form an unbounded continuous branch.