VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DIRICHLET: SỰ TỒN TẠI VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CỦA NGHIỆM

Lê Khánh Luận*, Trần Minh Thuyết†,
Võ Giang Giai‡, Lê Thị Phương Ngọc§

1. Mở đầu

Trong bài viết này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên - ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(u)u_x) = f(x,t,u,u_x,u_t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \tag{3}$$

trong đó $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, μ và f là các hàm số cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ rõ phần sau.

Trong trường hợp hàm $\mu(u)$ thay bởi hàm hằng hay một trong các hàm có dạng $\alpha(t)$, $\beta(x,t)$, toán tử Kirchhoff - Carrier $\gamma(t,\|u\|^2,\|u_x\|^2,\|u_t\|^2),...$ và hàm f ở vế phải có dạng đơn giản, bài toán (1) với các điều kiện biên và đầu khác nhau, đã có nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu ở nhiều chủ đề khác nhau như sự tồn tại, tính trơn, các tính chất định tính, xấp tuyến tính, khai triển tiệm, decay của nghiệm,…, chẳng hạn như, M. Bergounioux, N.T. Long, Alain P.N. Định [1], C.V. Easwaran [6], N.T. Long, Alain P.N. Định [4, 5, 9], N.T. Long, Alain P.N. Định, L.X. Trường [14], L.X. Trường, L.T.P. Ngọc, N.T. Long [15], N.T. Long, T.N. Diễm [11], L.T.P. Ngọc, L.N.K. Hằng, N.T. Long [18], M.L. Santos [21],…

Ficken và Fleishman [7] đã thiết lập sự tồn tại, duy nhất nghiệm toàn cục và tính ổn định nghiệm này cho phương trình:

---

* ThS. – Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM
† TS. – Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM
‡ ThS. – Trường ĐH Bán công Hoa Sen Tp. HCM
§ TS. – Trường CĐSP Nha Trang

$$u_{xx} - u_{tt} - 2\alpha u_t - \beta u = \varepsilon u^3 + \gamma, \ \ \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Rabinowitz [19] đã chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$u_{xx} - u_{tt} + 2\alpha u_t = \varepsilon f(x,t,u,u_x,u_t), \tag{5}$$

ở đây ε là một tham số bé và f là hàm tuần hoàn thời gian.

Trong [3], Caughey và Ellison đã hợp nhất các trường hợp trước đó để bàn về sự tồn tại, duy nhất và ổn định tiệm cận của các nghiệm cổ điển cho các hệ động lực phi tuyến liên tục.

Gần đây, N.T. Long, N.C. Tâm, N.T.T. Trúc [13] đã nghiên cứu bài toán (1), (3) với $\mu(u) \equiv 1$ và điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t), \ u(1,t) = g_1(t), \tag{6}$$

trong đó h_0 là hằng số không âm cho trước, các hàm $g_0, g_1 \in C^3(\mathbb{R}_+)$ cho trước và số hạng phi tuyến vế phải (1) có dạng

$$\tilde{f}(x,t,u,u_x,u_t) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t). \tag{7}$$

Với $f \in C^{N+1}([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$, $f_1 \in C^N([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ và thêm một số điều kiện phụ khác, các tác giả đã thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu u_ε đến cấp $N+1$ theo tham số bé ε.

Bài báo này bao gồm hai phần chính. Trong phần 1, chúng tôi liên kết bài toán (1) - (3) với dãy quy nạp tuyến tính bị chặn trong các không gian hàm thích hợp. Sự tồn tại nghiệm địa phương cũng như tính duy nhất nghiệm thiết lập được nhờ vào phương pháp Faedo - Galerkin, phương pháp compact [8] và bổ đề Gronwall. Chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong bài báo này và trong các bài báo [5, 11-13, 16, 17, 19, 22] không sử dụng được trong các bài báo [4, 9, 10, 14, 15, 18]. Trong phần 2, với $\mu \in C^{N+2}(\mathbb{R}_+)$, $\mu_1 \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+)$, $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$, $\forall t \geq 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ và $f_1 \in C^N([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$, khi đó ta thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu $u_\varepsilon(x,t)$ đến cấp $N+1$ theo tham số bé ε cho phương trình

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left([\mu(u) + \varepsilon\mu_1(u)]u_x\right) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t), \tag{8}$$

liên kết với (2) và (3). Kết quả này tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [2, 4, 5, 11, 13, 19] và sẽ được công bố chi tiết trong [16].

2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Đặt $\Omega = (0,1)$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông dụng như $C^m(\Omega), L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$. Ta ký hiệu $L^p = L^p(\Omega),\ H^m = H^m(\Omega),\ H_0^m = H_0^m(\Omega)$.

Chuẩn trong L^2 được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ để chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta ký hiệu $\|\cdot\|_X$ để chỉ chuẩn trong một không gian Banach X và X' là không gian đối ngẫu của X.

Ta ký hiệu $L^p(0,T;X), 1 \le p \le +\infty$, là không gian Banach của các hàm đo được $u:(0,T) \to X$ sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty$, với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p}, \text{ nếu } 1 \le p < +\infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, \text{ nếu } p = +\infty.$$

Ký hiệu $u(t),\ u_t(t) = \dot{u}(t),\ u_{tt}(t) = \ddot{u}(t),\ u_x(t) = \nabla u(t),\ u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ để chỉ $u(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial t^2}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, tương ứng. Với $f = f(x,t,u,v,w)$, ta đặt $D_0 f = f$, $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial t}$, $D_3 f = \frac{\partial f}{\partial u}$, $D_4 f = \frac{\partial f}{\partial v}$, $D_5 f = \frac{\partial f}{\partial w}$.

Trên H^1, ta sẽ dùng các chuẩn tương đương

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)^{1/2},\ \|v\|_1 = \left(v^2(1) + \|\nabla v\|^2\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. *Phép nhúng $H^1\ C^0(\overline{\Omega})$ là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \sqrt{2}\,\|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1, \tag{10}$$

$$\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \sqrt{2}\,\|v\|_1, \quad \forall v \in H^1. \tag{11}$$

Việc chứng minh bổ đề 1 là đơn giản, vì vậy chúng tôi bỏ qua.

Ta thành lập các giả thiết sau đây

(H_1) $\tilde{u}_0 \in H_0^1 \cap H^2,\ \tilde{u}_1 \in H_0^1,$

(H_2) $\mu \in C^2(\mathbb{R}_+),\ \mu(z) \ge \mu_0 > 0,\ \forall z \in \mathbb{R}_+,$

(H_3) $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3).$

Với mỗi $M > 0$ và $T > 0,$ ta đặt

$$K = K(M,\mu) = \sup_{|\eta| \le M}\left(|\mu| + |\mu'| + |\mu''|\right)(\eta), \tag{12}$$

$$K_0 = K_0(M,T,f) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{5}|D_i f|(x,t,u,v,w) : (x,t,u,v,w) \in D\right\}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} W(M,T) = \{ & v \in L^\infty(0,T;H_0^1 \cap H^2) : v_t \in L^\infty(0,T;H_0^1), v_{tt} \in L^2(Q_T), \\ & \|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1 \cap H^2)}, \|v_t\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}, \|v_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \le M\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$W_1(M,T) = \left\{v \in W(M,T) : v_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)\right\}, \tag{15}$$

ở đây $Q_T = \Omega \times (0,T)$ và $D = \left\{(x,t,u,v,w) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T,\ |u|,|v|,|w| \le M\right\}.$

Ta xét thuật giải xấp xỉ tuyến tính sau

(i) Ta sẽ chọn số hạng đầu tiên $u_0 = \tilde{u}_0 \in W_1(M,T).$ (16)

(ii) Giả sử rằng $u_{m-1} \in W_1(M,T),\ m \ge 1.$ (17)

(iii) Ta tìm $u_m \in W_1(M,T)$ thỏa bài toán biến phân sau

$$\langle \ddot{u}_m(t), v\rangle + \langle \mu(u_{m-1}(t))\nabla u_m(t), \nabla v\rangle = \langle F_m(t), v\rangle, \forall v \in H_0^1, \tag{18}$$

$$u_m(0) = \tilde{u}_0,\ \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \tag{19}$$

trong đó

$$F_m(t) = f(x,t,u_{m-1}(t),\nabla u_{m-1}(t),\dot{u}_{m-1}(t)). \tag{20}$$

Khi đó, ta có kết quả sau

Định lý 1. *Giả sử* (H_1) - (H_3) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số dương* M,T *sao cho*

(i) *Tồn tại dãy quy nạp* $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ *xác định bởi* (18) - (20).

(ii) *Bài toán* (1) - (3) *có một nghiệm yếu duy nhất* $u \in W_1(M,T)$.

(iii) *Tồn hằng số dương* C *chỉ phụ thuộc vào* T, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ *và* k_T *thỏa*

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} + \|\dot{u}_m - \dot{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le Ck_T^m,\ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

trong đó $k_T \in (0,1)$ *là hằng số dương độc lập với* m.

Chứng minh chi tiết của định lý có thể tìm thấy trong [16].

Chú thích 1

● Trong trường hợp $\mu \equiv 1$, $f = f(t,u,u_t)$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, $f(t,0,0) = 0$, $\forall t \ge 0$, chúng tôi thu được kết quả tồn tại và duy nhất nghiệm tổng quát hơn trong [5].

● Trong trường hợp $\mu \equiv 1$, $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, $f(1,|t|,u,v,w) = 0, \forall t,u,v,w \in \mathbb{R}$,

và điều kiện biên trong [11] thay cho (2), chúng tôi cũng thu được một số kết quả tương tự trong [11, 13].

3. Khai triển tiệm cận của nghiệm theo tham số bé

Giả sử rằng $(H_1) - (H_3)$ đúng. Ta thành lập thêm các giả thiết sau

(H_4) $\mu_1 \in C^2(\mathbb{R}_+)$,

(H_5) $f_1 \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$.

Ta xét bài toán nhiễu sau đây, trong đó $\varepsilon \in (-1,1)$ là tham số bé:

$$
(P_\varepsilon)\quad \begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu_\varepsilon(u)u_x) = F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ \mu_\varepsilon(u) = \mu(u) + \varepsilon\mu_1(u), \\ F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t), \end{cases}
$$

Gọi $u_0 \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu của bài toán (P_0) tương ứng với $\varepsilon = 0$ (như trong định lý 1).

Khi đó, ta định lý sau

Định lý 2. *Giả sử* (H_1) - (H_5) *đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương* M,T *sao cho với mỗi* $\varepsilon \in (-1,1)$, *bài toán* (P_ε) *có một nghiệm yếu duy nhất* $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ *thỏa đánh giá tiệm cận sau*

$$
\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} + \|\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_0\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C_T|\varepsilon|, \tag{22}
$$

trong C_T *là số dương chỉ phụ thuộc vào* $T,\ M,\ K(M,\mu),\ K(M,\mu_1),\ K_0(M,T,f)$ *và* $K_0(M,T,f_1)$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu u_ε đến cấp $N+1$ theo tham số bé ε. Để cho gọn, ta dùng ký hiệu

$f[u] = f(x,t,u,\nabla u,\dot{u})$.

Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ và $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$, ta đặt

$$
\begin{cases} |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N,\ \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_N!,\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_N^{\alpha_N}, \\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^N,\ \alpha \le \beta \iff \alpha_i \le \beta_i,\ \forall i = 1,\ldots,N. \end{cases}
$$

Bây giờ, chúng ta thành lập bổ sung thêm các giả thiết sau

(H_6) $\mu \in C^{N+2}(\mathbb{R}_+),\ \mu_1 \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+),\ \mu(z) \ge \mu_0 = 1,\ \forall z \in \mathbb{R}_+$,

(H_7) $f \in C^{N+1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3),\ f_1 \in C^N(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$.

Trước hết, ta cần sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 2. *Cho* $m,\ N \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ *và* $\varepsilon \in \mathbb{R}$. *Khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon^i\right)^m = \sum_{k=m}^{mN} P_k^{[m]}(x)\varepsilon^k, \tag{23}$$

trong đó hệ số $P_k^{[m]}(x),\ m \le k \le mN$ *phụ thuộc vào* $x = (x_1, ..., x_N)$ *được xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} P_k^{[m]}(x) = P_k^{[m]}(x_1, ..., x_N) = \displaystyle\sum_{\alpha \in I_k^{(m)}} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,\ m \le k \le mN, \\ I_k^{(m)} = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = m,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} i\alpha_i = k\right\}. \end{cases} \tag{24}$$

Việc chứng minh bổ đề 2 được nghiệm lại từ các phép tính toán đại số thông thường nên chúng tôi bỏ qua chi tiết.

Gọi $u_0 \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu của bài toán (P_0) và $u_l \in W_1(M,T),\ l = 1, ..., N$

(với $M > 0$ và $T > 0$ là các hằng số thích hợp) lần lượt là nghiệm yếu của các bài toán sau

$$(Q_l)\quad \begin{cases} \ddot{u}_l - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(u_0)\nabla u_l) = F_l[u_l],\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_l(0,t) = u_l(1,t) = 0, \\ u_l(x,0) = \dot{u}_l(x,0) = 0,\ l = 1, ..., N, \end{cases} \tag{25}$$

ở đây

$$F_l[u_l] = \begin{cases} c_0[f], & \text{if } l = 0, \\ c_l[f] + c_{l-1}[f_1] + \displaystyle\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(d_k[\mu] + d_{k-1}[\mu_1]\right)\nabla u_{l-k}\right], & \text{if } l = 1, ..., N, \end{cases} \tag{26}$$

với

$$c_l[f] = \begin{cases} f[u_0] = f(x,t,u_0,\nabla u_0,\dot{u}_0), & \text{if } l=0, \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{l} \sum_{p+q+r=s} \frac{1}{p!q!r!} D_3^p D_4^q D_5^r f[u_0] \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{\substack{i\geq p,\, j\geq q,\, k\geq r,\\ i+j+k=l}} P_i^{[p]}(u) P_j^{[q]}(\nabla u) P_k^{[r]}(\dot{u}), & \text{if } l=1,\dots,N, \end{cases} \tag{27}$$

$$d_l[\mu] = \begin{cases} \mu(u_0), & \text{if } l=0, \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{l} \frac{1}{p!} \mu^{(p)}(u_0) P_l^{[p]}(u), & \text{if } l=1,\dots,N, \end{cases} \tag{28}$$

và $P_i^{(p)}(u) = P_i^{(p)}(u_1,\dots,u_N)$, $P_i^{(p)}(\nabla u) = P_i^{(p)}(\nabla u_1,\dots,\nabla u_N)$, $P_i^{(p)}(\dot{u}) = P_i^{(p)}(\dot{u}_1,\dots,\dot{u}_N)$.

Let $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu của bài toán (P_ε). Khi đó $v = u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i \equiv u_\varepsilon - h \equiv u_\varepsilon - u_0 - h_1$ là nghiệm yếu của bài toán biên sau

$$\begin{cases} \ddot{v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_\varepsilon(v+h)\nabla v\right) = F_\varepsilon[v+h] - F_\varepsilon[h] + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu_\varepsilon(v+h) - \mu_\varepsilon(h)\right)\nabla h\right] \\ \qquad\qquad + E_\varepsilon(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

trong đó

$$E_\varepsilon(x,t) = F_\varepsilon[h] - f[u_0] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu_\varepsilon(h) - \mu(u_0)\right)\nabla h\right] - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i F_i[u_i]. \tag{30}$$

Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. Giả sử (H_1), (H_6) *và* (H_7) *đúng, ta có*

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C(M,T,N,K,K_0)|\varepsilon|^{N+1}, \tag{31}$$

trong đó $C(M,T,N,K,K_0)$ *là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* M,T,N *và* *các hằng số sau*

$$\tilde{K} = \tilde{K}(M, N, \mu, \mu_1) = \sup\left\{\left(\left|\mu^{(i)}\right| + \left|\mu_1^{(j)}\right|\right)(\eta) : |\eta| \le M,\ 0 \le i \le N+1,\ 0 \le j \le N\right\},$$

$$\tilde{K}_0 = \tilde{K}_0(M, T, N, f, f_1) = \sup\{ \sum_{|\alpha| \le N+1, |\beta| \le N} (\left|D_1^{\alpha_1} D_3^{\alpha_3} D_4^{\alpha_4} D_5^{\alpha_5} f\right|$$

$$+ \left|D_1^{\beta_1} D_3^{\beta_3} D_4^{\beta_4} D_5^{\beta_5} f_1\right|)(x, t, u, v, w) : (x, t, u, v, w) \in D\},$$

với

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{Z}_+^4,\ \beta = (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5) \in \mathbb{Z}_+^4,$$

$$D = \left\{(x, t, u, v, w) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T,\ |u|, |v|, |w| \le M\right\}.$$

Chứng minh chi tiết bổ đề 3 có thể xem trong [15].

Sử dụng bổ đề 3, ta xây dựng được định lý sau (chứng minh chi tiết có thể tìm thấy trong [16])

Định lý 3. Giả sử (H_1), (H_6) và (H_7) đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với mỗi $\varepsilon \in (-1, 1)$, bài toán (P_ε) có nghiệm yếu duy nhất $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau

$$\left\|u - \sum_{i=0}^{N} u_i \varepsilon^i\right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} + \left\|\dot{u} - \sum_{i=0}^{N} \dot{u}_i \varepsilon^i\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \tilde{C}_T \left|\varepsilon\right|^{N+1}, \tag{32}$$

trong đó $\tilde{C}_T$ là hằng số dương độc lập với ε và các hàm $u_0, u_1, ..., u_N$ là nghiệm yếu của các bài toán (P_0), (Q_1), ..., (Q_N) tương ứng.

Chú ý 2

- Với $\mu \equiv 1$, $\mu_1 \equiv 0$, $f_1 \equiv 0$, $f = f(t, u, u_t)$ và $f \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, chúng tôi thu được một số kết quả trong [5].

- Với $\mu \equiv 1$, $\mu_1 \equiv 0$, $f \in C^{N+1}([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ và $f_1 \in C^N([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, chúng tôi cũng thu được các kết quả tương tự trong [11, 13].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Alain Phạm Ngọc Định (1983), *Sur un problème hyperbolique faiblement non-linéaire à une dimension*, Demonstratio Math. 16 (1983) 269 – 289.

[2]. Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one demension*, Demonstratio Math. 19 (1986) 45 – 63.

[3]. C.V. Easwaran (2004), *Asymptotic theory for weakly non-linear wave equations in semi-infinite domains*, Electronic J. Diff. Equations, Vol. 2004 (2004) 1 – 8.

[4]. E.L. Ortiz, Alain Phạm Ngọc Định (1987), *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987) 452 – 464.

[5]. F. Ficken, B. Fleishman (1957), *Initial value problems and time periodic solutions for a nonlinear wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 331 – 356.

[6]. J. Boujot, Alain Phạm Ngọc Định, J.P. Veyrier (1980), *Oscillateurs harmoniques faiblement perturbés: L'algorithme numérique des "par de géants"*, RAIRO, Analyse numérique 14 (1980) 3 –23.

[7]. J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problems aux limites non-linéares*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8]. Lê Khánh Luận, Võ Giang Giai, Trần Minh Thuyết, Lê Thị Phương Ngọc (2008), *Existence and asymptotic expansion for a nonlinear wave equation associated with the Dirichlet boundary condition* (Sumitted to Electronic J. Diff. Equations).

[9]. Lê Khánh Luận, Võ Giang Giai, Trần Minh Thuyết, Lê Thị Phương Ngọc (2008), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, (Submitted).

[10]. Lê Thị Phương Ngọc, Lê Nguyễn Kim Hằng, Nguyễn Thành Long (2008), *On a nonlinear wave equation associated with the boundary conditions involving convolution*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. Ser. A (accepted for publication) [http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.08.004].

[11]. Lê Xuân Trường, Lê Thị Phương Ngọc, Nguyễn Thành Long (2008), *High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. Theory

Methods Appl. Ser. A (accepted for publication) [http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.10.086]

[12]. M. Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. 43 (2001) 547 – 561.

[13]. M.L. Santos (2001), *Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary*, Electronic J. Diff. Equations, Vol. 2001(2001) 1 – 11.

[14]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. 24 (1995) 1261 – 1279.

[15]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Lê Xuân Trường (2008), *Existence and decay of solutions of a nonlinear viscoelastic problem with a mixed nonhomogeneous condition*, Numerical Functional Analysis and Optimization (to appear).

[16]. Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng (2004), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - B(t, \|u_x\|^2) u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, \|u_x\|^2)$ *associated with the mixed nonhomogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. 292 (2004) 433 – 458.

[17]. Nguyễn Thành Long, Lê Thị Phương Ngọc, Võ Giang Giai (2008), *A linear wave equation associated with a nonlinear integral equation at the boundary: Existence and asymptotic expansion of solutions*, (Submitted to Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. Ser. A).

[18]. Nguyễn Thành Long, Lê Xuân Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion of solutions to a nonlinear wave equation with a memory condition at the boundary*, Electronic J. Diff. Equations, Vol. 2007 (2007), 1 – 19.

[19]. Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogenous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math. 38 (2005) 365 – 386.

[20]. Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm (1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with a mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. 29 (1997) 1217 – 1230.

[21]. P.H. Rabinowitz (1967), *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math. 20 (1967) 145 – 205.

[22]. T. Caughey, J. Ellison (1975), *Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 51 (1975) 1 – 32.

Tóm tắt

Về một phương trình sóng phi tuyến liên kết với điều kiện biên Dirichlet: Sự tồn tại và khai triển tiệm của nghiệm

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên - ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(u)u_x) = f(x,t,u,u_x,u_t), \; 0<x<1, \; 0<t<T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, μ *và* f *là các hàm số cho trước. Trong bài báo này, chúng tôi liên kết bài toán* (*) *với một sơ đồ xấp xỉ tuyến tính, kết hợp với phương pháp Faedo – Galerkin và compact yếu để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương của bài toán* (*). *Trong trường hợp các hàm* $\mu \in C^{N+2}(\mathbb{R}_+)$, $\mu_1 \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+)$, $\mu(t) \geq 1 \;\; \forall t \geq 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ *và* $f_1 \in C^{N}([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$, *khi đó ta thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu* $u_\varepsilon(x,t)$ *đến cấp* $N+1$ *theo tham số bé* ε *cho phương trình sau liên kết với* $(*)_{2,3}$:

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left([\mu(u)+\varepsilon\mu_1(u)]u_x\right) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t). \blacksquare$$

Abstract

On the nonlinear wave equation associated with the Dirichlet boundary condition: Existence and asymptotic expansion of solutions.

The paper deals with the initial - boundary value problem for the nonlinear wave equation

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(u)u_x) = f(x,t,u,u_x,u_t), \; 0<x<1, \; 0<t<T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \qquad (*)$$

where $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu$ *and* f *are given functions.*

In this paper, we associate with problem (*) *a linear recursive scheme for which the existence of a local and unique weak solution is proved by applying the Faedo – Galerkin method and the weak compact method. In case of* $\mu \in C^{N+2}(\mathbb{R}_+)$, $\mu_1 \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+)$, $\mu(t) \geq 1 \quad \forall t \geq 0$, $f \in C^{N+1}([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ *and* $f_1 \in C^N([0,1]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$, *a weak solution* $u_\varepsilon(x,t)$ *having an asymptotic expansion of order* $N+1$ *in a small parameter* ε *is established for the following equation associated to* $(*)_{2,3}$:

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left([\mu(u) + \varepsilon\mu_1(u)]u_x\right) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t).$$