VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÔNG THUẦN NHẤT CHỨA TÍCH CHẬP

Lê Nguyễn Kim Hằng*, Lê Thị Phương Ngọc†[2]

1. Mở đầu

Xét bài toán giá trị biên ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến sau đây:

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_x\right) + f(u,u_t) = F(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\mu(0,t)u_x(0,t) = g_0(t) + \int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds, \tag{2}$$

$$-\mu(1,t)u_x(1,t) = g_1(t) + \int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{4}$$

trong đó $f(u,u_t) = K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t$ và p, q ≥ 2, K ≥ 0, $\lambda > 0$ là các hằng số cho trước; F, μ, g_0, g_1, k_0, k_1, u_0, u_1 là các hàm cho trước thỏa mãn một số điều kiện sẽ được chỉ rõ ở mục sau.

Trước đây, An và Triều trong [1] đã nghiên cứu một trường hợp đặc biệt của bài toán (1), (4), với $\mu \equiv 1$; $u_0 = u_1 \equiv 0$ và $f(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, liên kết với điều kiện biên dưới đây:

$$u_x(0,t) = g_0(t) + h_0u(0,t) - \int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds, \tag{5}$$

$$u(1,t) = 0, \tag{6}$$

trong đó các hằng số K ≥ 0, $\lambda \geq 0$ và các hàm số g, k được cho trước. Bài toán (1), (4) – (6) là một mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và thanh đàn hồi nhớt tuyến tính tựa trên một nền cứng [1].

---

* ThS. – Trường ĐH Nông lâm Tp. HCM.
† TS. – Trường CĐSP Nha Trang, Khánh Hoà

Trong [2], các tác giả Bergounioux, Long và Dinh đã xét bài toán (1), (4) với $f(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$ và điều kiện biên:

$$u_x(0,t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)\,ds, \tag{7}$$

$$u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \tag{8}$$

ở đây $K \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $h \geq 0$, $K_1 \geq 0$, $\lambda_1 > 0$ là các hằng số cho trước và g, k là các hàm cho trước.

Trường hợp $f(u,u_t) = K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t$, với K, $\lambda \geq 0$; p, $q \geq 2$ và các hàm cho trước trong điều kiện đầu là $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$, bài toán (1), (4), (7) và (8) cũng đã được các tác giả Long, Dinh và Diễm nghiên cứu, xem [9].

Đặc biệt, trong [9], Ngọc, Hằng, Long đã thu được sự tồn tại duy nhất nghiệm, tính ổn định và khai triển tiệm cận nghiệm của bài toán (1) – (4) cho trường hợp $f(u,u_t) = F(u) + \lambda u_t$, trong đó λ là hằng số và $F \in C^1(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện sau: $\int_0^z F(s)\,ds \geq -C_1 z^2 - C_1', \forall z \in \mathbb{R}$, $C_1, C_1' > 0$ cho trước.

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1) – (4) cho trường hợp $f(u,u_t) = K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t$, với $K \geq 0$, $\lambda > 0$ và p, $q \geq 2$. Kết quả thu được ở đây có thể xem như là sự tổng quát của các kết quả trong [1], [2], [5] – [9].

2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Trong mục này, các không gian hàm thông dụng sau đây sẽ được đề cập: $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ với $\Omega = (0,1)$. Để tiện cho việc sử dụng, ta ký hiệu $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, m = 0,1,...(xem [3])

Ký hiệu chuẩn trong L^2 sinh bởi tích vô hướng $\langle \cdot,\cdot \rangle$ bởi $\|\cdot\|$ và chuẩn trong L^∞ bởi $\|\cdot\|_\infty$.

Với $(X, \|\cdot\|_X)$ là một không gian Banach thực, T > 0, ta ký hiệu $L^p(0,T;X)$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm đo được u: (0,T)→ X sao cho:

$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} < \infty$, với $1 \le p < \infty$,

$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \text{ess sup} \|u(t)\|_X < \infty$, với $p=\infty$.

Các ký hiệu $u(t)$, $u^{//}(t) = u_{tt}(t)$, $u_x(t)$ và $u_{xx}(t)$ cũng được sử dụng để lần lượt chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ và $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Trong H^1, xét chuẩn được định nghĩa như sau:

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|v_x\|^2\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Trước tiên ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng* $H^1 \angle C^0([0,1])$ *là compact và*

$$\|v\|_{C^0([0,1])} = \sqrt{2}\|v\|_{H^1} \tag{10}$$

Chứng minh bổ đề này là không khó khăn, nên được bỏ qua.

Ta thiết lập các giả thiết:

(H_1) $u_0 \in H^2$, $u_1 \in H^1$,

(H_2) $g_0, g_1 \in H^2$,

(H_3) $k_0, k_1 \in W^{2,1}$,

(H_4) $\mu \in C^1(\overline{Q_T})$, $\mu_{tt} \in L^1(0,T;L^\infty)$, $\mu(x,t) \ge \mu_0 > 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$,

(H_5) $K \ge 0$, $\lambda > 0$, $p \ge 2$, $q \ge 2$,

(H_6) F, $F_t \in L^2(Q_T)$.

Khi đó ta thu được định lý sau đây về sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

Định lý 2.2. *Giả sử các giả thiết* $(H_1)-(H_6)$ *được thỏa mãn. Khi đó, với mọi* $T > 0$, *bài toán* (1) – (4) *có duy nhất một nghiệm yếu u sao cho:*

$$u \in L^\infty(0,T;H^2),\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1), u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2). \tag{11}$$

Chứng minh. Chứng minh của định lý 2.2 gồm 5 bước:

Bước 1. *Thực hiện phương pháp xấp xỉ Faedo -- Galerkin.* Gọi $\left\{\mathrm{w}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ là một cơ sở đếm được của H². Ta tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (1) – (4) dưới dạng:

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^{m}c_{mj}(t)\mathrm{w}_j, \tag{12}$$

ở đây $u_m(t)$ thoả mãn là hệ phương trình vi tích phân sau:

$$\begin{aligned}&\left\langle u_m''(t),\mathrm{w}_j\right\rangle+\left\langle \mu(t)u_{mx}(t),\mathrm{w}_{jx}\right\rangle+P_m(t)\mathrm{w}_j(0)+Q_m(t)\mathrm{w}_j(1)\\&\qquad+K\left\langle\left|u_m\right|^{p-2}u_m,\mathrm{w}_j\right\rangle+\lambda\left\langle\left|u_m'\right|^{p-2}u_m',\mathrm{w}_j\right\rangle=\left\langle F(t),\mathrm{w}_j\right\rangle, 1\le j\le m,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{cases}P_m(t)=g_0(t)+\int_0^t k_0(t-s)u_m(0,s)ds,\\ Q_m(t)=g_1(t)+\int_0^t k_1(t-s)u_m(1,s)ds,\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}u_m(0)=u_{0m}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{mj}\mathrm{w}_j\to u_0 \quad \text{trong } H^2,\\ u_m'(0)=u_{1m}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{mj}\mathrm{w}_j\to u_1 \quad \text{trong } H^1.\end{cases} \tag{15}$$

Bằng cách biến đổi hệ (13) – (15) thành hệ phương trình tương đương có các ẩn hàm là các $c_{mj}(t)$ và áp dụng phương pháp điểm bất động, ta sẽ chứng minh được hệ (13) – (15) có duy nhất nghiệm (u_m,P_m,Q_m) hầu khắp nơi trên $[0,T_m]\subset[0,T]$. Các đánh giá tiên nghiệm dưới đây cho phép ta lấy $T_m = T$ với mọi m.

Bước 2. *Thực hiện đánh giá tiên nghiệm I.*

Thay (14) vào (13), và nhân phương trình thứ *j* của (13) với $c_{mj}'(t)$, sau đó lấy tổng theo *j* và tích phân theo biến thời gian từ 0 đến *t*, ta thu được

$$\begin{aligned}S_m(t)&=S_m(0)+\int_0^t ds\int_0^1\mu'(x,s)u_{mx}^2(x,s)dx-2\int_0^t P_m(s)u_m'(0,s)ds\\&\quad-2\int_0^t Q_m(s)u_m'(1,s)ds+2\int_0^t\left\langle F(s),u_m'(s)\right\rangle ds\\&=S_m(0)+\sum_{j=1}^{4}I_j,\end{aligned} \tag{16}$$

trong đó

$$S_m(t) = \|u_m'(t)\|^2 + \left\|\sqrt{\mu(t)}u_{mx}(t)\right\|^2 + \frac{2K}{p}\|u_m(t)\|_{L^p}^p + 2\lambda\int_0^t \|u_m'(s)\|_{L^q}^q\, ds. \tag{17}$$

Các số hạng I_j, j = 1, 2, 3, 4 ở vế phải của (16) sẽ được đánh giá lần lượt như sau.

Từ (17), ta thu được bất đẳng thức

$$\|u_{mx}(t)\|^2 \le \frac{1}{\mu_0} S_m(t), \tag{18}$$

dẫn đến

$$I_1 \le \frac{1}{\mu_0}\|\mu'\|_{L^\infty(Q_T)}\int_0^t S_m(s)\, ds. \tag{19}$$

Dùng tích phân từng phần đối với I_2, áp dụng bổ đề 2.1 và bất đẳng thức

$$2ab \le \beta a^2 + (1/\beta)b^2,\ \forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0, \tag{20}$$

ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &\le 2|g_0(0)u_{0m}(0)| + \frac{2}{\beta}g_0^2(t) + 2\|g_0'\|_{L^2(0,T)}^2 + 2\beta\|u_m(t)\|_{H^1}^2 \\ &\quad + \left(1 + 4|k_0(0)| + \frac{4}{\beta}\|k_0\|_{L^2(0,T)}^2 + \|k_0'\|_{L^1(0,T)}\right)\int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2\, ds \\ &\le C_T + 2\beta\|u_m(t)\|_{H^1}^2 + C_T\int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2\, ds, \end{aligned} \tag{21}$$

với $\beta > 0$ và C_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T. Chú ý rằng, ký hiệu C_T sẽ luôn được sử dụng trong mục này với ý nghĩa đó và luôn chọn được C_T đủ lớn để các trường hợp được xét đến tương tự như bất đẳng thức sau cùng ở (21) thoả mãn.

Ta cũng chứng minh được

$$I_3 \le C_T + 2\beta\|u_m(t)\|_{H^1}^2 + C_T\int_0^t \|u_m(s)\|_{H^1}^2\, ds. \tag{22}$$

$$I_4 \le \frac{1}{\beta}\int_0^t \|F(s)\|^2\, ds + \beta\int_0^t S_m(s)\, ds. \tag{23}$$

Kết hợp (16), (19), (21) – (23) và chọn $\beta = \frac{1}{8}\mu_0$, đồng thời áp dụng các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &\left\| u_m(t) \right\|^2 \le C_0 + 2t\int_0^t S_m(s)\,ds, \\ &\left\| u_m(t) \right\|_{H^1}^2 \le \left\| u_m(t) \right\|^2 + \left\| u_{mx}(t) \right\|^2 \le C_0 + 2t\int_0^t S_m(s)\,ds + \frac{1}{\mu_0} S_m(t), \end{aligned} \tag{24}$$

trong đó C_0 là một hằng số phụ thuộc vào u_0 và, ta thu được

$$S_m(t) \le M_T + 2S_m(0) + N_T\int_0^t S_m(s)\,ds, \tag{25}$$

trong đó

$$\begin{cases} M_T = 2\left(2C_T + 4\beta C_0 + 2TC_0C_T + \frac{1}{\beta}\int_0^T \left\| F(s) \right\|^2 ds \right), \\ N_T = 2\left(\beta + 8\beta T + 4T^2C_T + \frac{2C_T}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0}\left\| \mu' \right\|_{L^\infty(Q_T)} \right). \end{cases} \tag{26}$$

Từ các giả thiết (H_1) – (H_4), (H_6) và bổ đề 2.1, tồn tại hằng số dương $\tilde{M}_T$ phụ thuộc vào u_0, u_1, k_0, k_1, g_0, g_1, F, μ, sao cho

$$S_m(t) \le \tilde{M}_T + N_T\int_0^t S_m(s)\,ds, \ \forall m, \ \forall t \in [0,T]. \tag{27}$$

Sử dụng bổ đề Gronwall, từ (27) ta suy ra:

$$S_m(t) \le \tilde{M}_T \exp(tN_T) \le C_T, \ \forall t \in [0,T]. \tag{28}$$

Bước 3. *Thực hiện đánh giá tiên nghiệm II.*

Lấy đạo hàm hai vế của (13) theo biến thời gian *t*, ta có:

$$\begin{aligned} &\left\langle u_m'''(t), w_j \right\rangle + \left\langle \mu(t)u_{mx}'(t), w_{jx} \right\rangle + \left\langle \mu'(t)u_{mx}(t), w_{jx} \right\rangle + P_m'(t)w_j(0) \\ &+ Q_m'(t)w_j(1) + K(p-1)\left\langle |u_m|^{p-2}u_m', w_j \right\rangle + \lambda(q-1)\left\langle |u_m'|^{p-2}u_m'', w_j \right\rangle \\ &\qquad = \left\langle F'(t), w_j \right\rangle, \ 1 \le j \le m. \end{aligned} \tag{29}$$

Nhân phương trình thứ *j* của (29) với $c_{mj}''(t)$ và lấy tổng theo *j*, sau đó tích phân theo biến thời gian từ 0 đến *t*, ta thu được

$$\begin{aligned} X_m(t) &= X_m(0) + 2\left\langle \mu'(0) u_{0mx}, u_{1mx} \right\rangle + 3\int_0^t ds \int_0^1 \mu'(x,s)\left|u'_{mx}(x,s)\right|^2 dx \\ &\quad - 2\left\langle \mu'(t) u_{mx}(t), u'_{mx}(t) \right\rangle + 2\int_0^t \left\langle \mu''(s) u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \right\rangle ds \\ &\quad + 2\int_0^t \left\langle F'(s), u''_m(s) \right\rangle ds - 2K(p-1)\int_0^t \left\langle \left|u_m\right|^{p-2} u'_m, u''_m \right\rangle ds \\ &\quad - 2\int_0^t P'_m(s) u''_m(0,s)\, ds - 2\int_0^t Q'_m(s) u''_m(1,s)\, ds \\ &= X_m(0) + 2\left\langle \mu'(0) u_{0mx}, u_{1mx} \right\rangle + \sum_{i=1}^{7} J_i, \end{aligned} \tag{30}$$

trong đó

$$X_m(t) = \left\|u''_m(t)\right\|^2 + \left\|\sqrt{\mu(t)}\, u'_{mx}(t)\right\|^2 + 2\lambda(q-1)\int_0^t ds \int_0^1 \left|u'_m(x,s)\right|^{q-2}\left|u''_m(x,s)\right|^2 dx. \tag{31}$$

Từ các giả thiết (H_1), (H_4), (H_6), (31) và phép nhúng $H^1(0,1) \angle C^0([0,1])$, tồn tại hằng số dương D_0 phụ thuộc vào u_0, u_1, μ, F, sao cho:

$$X_m(0) + 2\left\langle \mu'(0) u_{0mx}, u_{1mx} \right\rangle \le D_0. \tag{32}$$

Dùng bổ đề 2.1, (28) và (31), ta thu được các bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} &\left\|u'_{mx}(t)\right\|^2 \le \frac{1}{\mu_0} X_m(t), \\ &\left|u_m(x,t)\right| \le C_T, \\ &\left|u'_m(x,t)\right| \le \sqrt{\frac{2}{\mu_0}}\sqrt{X_m(t)} + C_T. \end{aligned} \tag{33}$$

Từ đó, các tích phân ở vế phải của (30) được đánh giá lần lượt như sau:

$$J_1 \le \frac{3}{\mu_0}\left\|\mu'\right\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t X_m(s)\, ds \le C_T \int_0^t X_m(s)\, ds. \tag{34}$$

$$J_2 \le \frac{C_T}{\beta \mu_0^2}\left\|\mu'\right\|^2_{L^\infty(Q_T)} + \beta X_m(t) \le C_T + \beta X_m(t). \tag{35}$$

$$J_3 \le C_T + C_T \int_0^t \left\|\mu''(s)\right\|_\infty X_m(s)\, ds. \tag{36}$$

$$J_4 \le \int_0^t \left\|F'(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \left\|u''_m(s)\right\|^2 ds \le C_T + \int_0^t X_m(s)\, ds. \tag{37}$$

$$J_5 \le 2K(P-1)C_T^{p-2}\int_0^t \sqrt{S_m(s)}\sqrt{X_m(s)}ds \le C_T + C_T\int_0^t X_m(s)\,ds. \tag{38}$$

Dùng tích phân từng phần đối với J_6, và sử dụng (15), (33), ta thu được

$$\begin{aligned} J_6 &= 2P_m^/(0)u_{1m}(0) - 2P_m^/(0)u_m^/(0,t) - 2u_m^/(0,t)\int_0^t P_m^{//}(s)\,ds \\ &+ 2\int_0^t P_m^{//}(s)u_m^/(0,s)\,ds \le C_T + 2\beta X_m(t) + 2C_T\int_0^t X_m(s)\,ds. \end{aligned} \tag{39}$$

Một cách tương tự, ta có:

$$J_7 \le C_T + 2\beta X_m(t) + 2C_T\int_0^t X_m(s)\,ds. \tag{40}$$

Kết hợp (30), (32), (34) – (40), ta thu được

$$\begin{aligned} X_m(t) &\le D_0 + 6C_T + 5\beta X_m(t) + (6C_T+1)\int_0^t X_m(s)\,ds + C_T\int_0^t \left\|\mu^{//}(s)\right\|_\infty X_m(s)\,ds. \\ &\le C_T + 5\beta X_m(t) + C_T\int_0^t \left(1+\left\|\mu^{//}(s)\right\|_\infty\right) X_m(s)\,ds. \end{aligned} \tag{41}$$

Chọn β=1/10, từ (41) ta thu được

$$X_m(t) \le 2C_T + 2C_T\int_0^t \left(1+\left\|\mu^{//}(s)\right\|_\infty\right) X_m(s)\,ds. \tag{42}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$X_m(t) \le 2C_T \exp\left(2C_T\int_0^t \left(1+\left\|\mu^{//}(s)\right\|_\infty\right)ds\right) \le C_T,\ \forall t\in[0,T]. \tag{43}$$

Mặt khác, từ các giả thiết (H_2), (H_3) và (14), (28), (43), ta thu được

$$\|P_m\|_{W^{2,\infty}(0,T)} \le C_T, \tag{44}$$

$$\|Q_m\|_{W^{2,\infty}(0,T)} \le C_T. \tag{45}$$

Bước 4. *Qua giới hạn.* Từ (28) và (43) – (45), tồn tại của một dãy con của dãy $\{(u_m, P_m, Q_m)\}$, vẫn ký hiệu là $\{(u_m, P_m, Q_m)\}$, sao cho:

$u_m \to u$ trong $L^\infty(0,T;H^1)$ yếu*,

$u_m^/ \to u^/$ trong $L^\infty(0,T;H^1)$ yếu*,

$u_m^/ \to u^/$ trong $L^q(Q_T)$ yếu,

$$
\begin{aligned}
&u_m'' \to u'' \quad \text{trong} \quad L^\infty\left(0,T;L^2\right) \text{ yếu*},\\
&u_m(0,\cdot) \to u(0,\cdot) \text{ trong } W^{1,\infty}(0,T) \text{ yếu*},\\
&u_m(1,\cdot) \to u(1,\cdot) \text{ trong } W^{1,\infty}(0,T) \text{ yếu*},\\
&P_m \to P \quad \text{trong} \quad W^{1,\infty}(0,T) \text{ yếu*},\\
&Q_m \to Q \quad \text{trong} \quad W^{1,\infty}(0,T) \text{ yếu*}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Theo bổ đề compact của Lions [4, p.57], từ (46) ta suy ra tồn tại một dãy con vẫn ký hiệu $\{(u_m, P_m, Q_m)\}$, sao cho:

$$
\begin{aligned}
&u_m \to u \text{ mạnh trong } L^2(Q_T), \text{ và a.e. trong } Q_T,\\
&u_m' \to u' \text{ mạnh trong } L^2(Q_T), \text{ và a.e. trong } Q_T,\\
&u_m(0,\cdot) \to u(0,\cdot) \text{ mạnh trong } C^0([0,T]),\\
&u_m(1,\cdot) \to u(1,\cdot) \text{ mạnh trong } C^0([0,T]),\\
&P_m \to P \text{ mạnh trong } C^1([0,T]),\\
&Q_m \to Q \text{ mạnh trong } C^1([0,T]).
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Từ (14) và $(47)_{3,4}$ ta có

$$P_m(t) \to g_0(t) + \int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds \equiv P(t), \text{ mạnh trong } C^0([0,T]), \tag{48}$$

$$Q_m(t) \to g_1(t) + \int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds \equiv Q(t), \text{ mạnh trong } C^0([0,T]). \tag{49}$$

Dùng bất đẳng thức

$$\left||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right| \le (p-1)R^{p-2}|x-y| \quad \forall x,y \in [-R,R], \tag{50}$$

với mọi R > 0 và p ≥ 2, từ $(33)_2$ và $(47)_1$ dẫn đến

$$|u_m|^{p-2}u_m \to |u|^{p-2}u \text{ mạnh trong } L^2(Q_T). \tag{51}$$

Tương tự, từ $(33)_3$, (43), $(47)_2$, ta có

$$\left|u_m'\right|^{q-2} u_m' \to \left|u'\right|^{q-2} u' \text{ mạnh trong } L^2\left(Q_T\right). \tag{52}$$

Qua giới hạn (13), (15) nhờ vào $(46)_{1,2,4}$, (48), (49) và (51), (52), ta có u thỏa bài toán biến phân sau đây:

$$\begin{aligned}\left\langle u''(t),v\right\rangle+\left\langle \mu(t)u_x(t),v_x\right\rangle+P(t)v(0)+Q(t)v(1)+K\left\langle |u|^{p-2}u,v\right\rangle \\ +\lambda\left\langle \left|u'\right|^{q-2}u',v\right\rangle=\left\langle F(t),v\right\rangle \quad \forall v\in H^1,\end{aligned} \tag{53}$$

với điều kiện đầu

$$u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1, \tag{54}$$

trong đó

$$P(t)=\int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds,\ \ Q(t)=\int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds. \tag{55}$$

Mặt khác, từ $(46)_{1,2,4}$, (53) và các giả thiết (H_4), (H_6), ta thu được

$$u_{xx}=\frac{1}{\mu(x,t)}\left(u''+K|u|^{p-2}u+\lambda\left|u'\right|^{q-2}u'-\mu_x u_x-F\right)\in L^\infty\left(0,T;L^2\right). \tag{56}$$

Do đó $u\in L^\infty\left(0,T;H^2\right)$ và sự tồn tại nghiệm u của bài toán (1) – (4) đã được chứng minh.

Bước 5. *Tính duy nhất nghiệm.* Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (1) – (4) thỏa

$$u_j\in L^\infty\left(0,T;H^2\right),\ u_j'\in L^\infty\left(0,T;H^1\right),\ u_j''\in L^\infty\left(0,T;L^2\right),\ \ j=1,2. \tag{57}$$

Khi đó, (u, P, Q) với $u = u_1 - u_2$ và $P = P_1 - P_2$, $Q = Q_1 - Q_2$ thỏa mãn bài toán biến phân:

$$\begin{cases}\left\langle u''(t),v\right\rangle+\left\langle \mu(t)u_x(t),v_x\right\rangle+P(t)v(0)+Q(t)v(1)+K\left\langle |u_1|^{p-2}u_1-|u_1|^{p-2}u_1,v\right\rangle \\ \qquad +\lambda\left\langle \left|u_1'\right|^{q-2}u_1'-\left|u_2'\right|^{q-2}u_2',v\right\rangle=0 \quad \forall v\in H^1, \\ u(0)=u'(0)=0,\end{cases} \tag{58}$$

trong đó

$$P(t)=\int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds,\ \ Q(t)=\int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds. \tag{59}$$

Lấy v = u′ trong (58) và tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t, ta được

$$\begin{aligned}Z(t)&=\int_0^t\langle\mu'(s)u_x^2(s)\rangle ds-2\int_0^t u'(0,s)\,ds\int_0^s k_0(s-r)u(0,r)dr\\&\quad-2\int_0^t u'(1,s)\,ds\int_0^s k_1(s-r)u(1,r)dr-2K\int_0^t\left\langle|u_1|^{p-2}u_1-|u_1|^{p-2}u_1,u'\right\rangle ds\\&=\sum_{j=1}^4 L_j,\end{aligned} \tag{60}$$

trong đó

$$Z(t)=\|u'(t)\|^2+\left\|\sqrt{\mu(t)}u_x(t)\right\|^2+2\lambda\int_0^t\left\langle|u_1'|^{q-2}u_1'-|u_2'|^{q-2}u_2',u'\right\rangle ds. \tag{61}$$

Ta đánh giá các tích phân $L_1,\ L_2,\ L_3$ tương tự ở bước 2. Trước hết, ta có:

$$L_1\le\frac{1}{\mu_0}\|\mu'\|_{L^\infty(Q_T)}\int_0^t Z(s)ds. \tag{62}$$

Sử dụng các bất đẳng thức sau

$$\|u(t)\|^2\le t\int_0^t Z(s)ds,\ \ \|u(t)\|_{H^1}^2\le t\int_0^t Z(s)ds+\frac{1}{\mu_0}Z(t), \tag{63}$$

ta có

$$L_2\le\frac{\beta}{\mu_0}Z(t)+C_T(\beta,k_0)\int_0^t Z(s)ds, \tag{64}$$

với

$$C_T(\beta,k_0)=\beta T+\left(4|k_0(0)|+\frac{4}{\beta}\|k_0\|_{L^2(0,T)}^2+\|k_0'\|_{L^1(0,T)}\right)\left(T^2+\frac{1}{\mu_0}\right).$$

Một cách tương tự

$$L_3\le\frac{\beta}{\mu_0}Z(t)+C_T(\beta,k_1)\int_0^t Z(s)ds. \tag{65}$$

Từ bất đẳng thức (50), ta cũng có

$$L_4 \le 2K\left(p-1\right)C_1^{p-2}\int_0^t Z\left(s\right)ds, \tag{66}$$

với $C_1 = \max\limits_{j=1,2}\left\|u_j\right\|_{L^\infty\left(0,T;H^2\right)}$.

Kết hợp (60), (62), (64) – (66), đồng thời chọn $\beta = \frac{\mu_0}{4}$, ta suy ra được:

$$Z(t) \le \tilde{N}_T \int_0^t Z(s)ds,\ \ \forall t \in [0,T], \quad (67)$$

với $\tilde{N}_T = \frac{2}{\mu_0}\left\|\mu'\right\|_{L^\infty(Q_T)} + 2C_T\left(\beta, k_0\right) + 2C_T\left(\beta, k_1\right) + 4K\left(p-1\right)C_1^{p-2}$.

Sử dụng bổ đề Gronwall, ta thu được Z ≡ 0 và định lý 2.2 được chứng minh xong.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. H. Brézis, *Analyse functionnelle*. Théorie et Applications, Masson Paris, 1983.

[2]. J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution dé problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod; Gauthier – Villars, Paris, 1969.

[3]. Lê Thị Phương Ngọc, Lê Nguyễn Kim Hằng, Nguyễn Thành Long, *On a nonlinear wave equation associated with the boundary conditions involving convolution*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. Ser. A. (to appear) [http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.08.004].

[4]. M. Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. 43 (2001) 547 – 561.

[5]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, *On the quasilinear wave equation: $u_{tt} - \Delta u + f\left(u, u_t\right) = 0$ associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. 19 (1992) 613 – 623.

[6]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm, *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems, Hindawi Publishing Corporation 2005 (3) (2005) 337 – 358.

[7]. Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. 29 (1997) 1217 – 1230.

[8]. Nguyễn Thành Long, Võ Giang Giai, *A nonlinear wave equation associated with nonlinear boundary conditions: Existence and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. Ser. A. 66 (12) (2007), 2852 – 2880.

[9]. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều, *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J.Mech.NCSR. Vietnam, 13 (2) (1991) 1 – 7.

Tóm tắt.

Về một phương trình sóng phi tuyến liên kết với điều kiện biên không thuần nhất chứa tích chập

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán giá trị biên ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến:

$$(*)\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_x\right) + K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t = F(x,t), \quad 0<x<1,\ 0<t<T, \\ \mu(0,t)u_x(0,t) = g_0(t) + \int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds, \\ -\mu(1,t)u_x(1,t) = g_1(t) + \int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases}$$

ở đây $p, q \geq 2$, $K \geq 0$, $\lambda > 0$ là các hằng số cho trước và $F, \mu, g_0, g_1, k_0, k_1, u_0, u_1$ là các hàm cho trước thoả các điều kiện sau: $F, F_t \in L^2(Q_T)$; $\mu \in C^1\left(\overline{Q_T}\right)$, $\mu_{tt} \in L^1\left(0,T;L^\infty\right)$, $\mu(x,t) \geq \mu_0 > 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$ *và* $(u_0,u_1,g_0,g_1,k_0,k_1)$ *thuộc* $H^2\times H^1\times(H^2(0,T))^2\times\left(W^{2,1}(0,T)\right)^2$. *Trong chứng minh, phương pháp Faedo-Galerkin, phương pháp compact yếu và các kỹ thuật của giải tích hàm phi tuyến được áp dụng. Kết quả thu được đã cải tiến kết quả về tính giải được và giải được duy nhất trong bài báo mới đây* [9].

Abstract

On a nonlinear wave equation associated with the nonhomogeneous boundary conditions involving convolution.

In this paper, we show that there exists a unique solution of the following initial-boundary value problem for the wave equation:

$$(*)\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_x\right) + K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t = F(x,t), \quad 0<x<1,\ 0<t<T, \\ \mu(0,t)u_x(0,t) = g_0(t) + \int_0^t k_0(t-s)u(0,s)\,ds, \\ -\mu(1,t)u_x(1,t) = g_1(t) + \int_0^t k_1(t-s)u(1,s)\,ds, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases}$$

where p, q ≥ 2, K ≥ 0, $\lambda > 0$ are given constants and F, μ, g_0, g_1, k_0, k_1, u_0, u_1 are given functions such that $(u_0, u_1, g_0, g_1, k_0, k_1) \in H^2 \times H^1 \times (H^2(0,T))^2 \times \left(W^{2,1}(0,T)\right)^2$; $F, F_t \in L^2(Q_T)$; $\mu \in C^1\left(\overline{Q_T}\right)$, $\mu_{tt} \in L^1\left(0,T;L^\infty\right)$, $\mu(x,t) \geq \mu_0 > 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$. *The proof is based on the Faedo – Galerkin method associated with the weak compact method. The result obtained here improves the one in recent paper, see* [9].