PHƯƠNG TRÌNH SÓNG TUYẾN TÍNH LIÊN KẾT VỚI MỘT BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Phạm Thanh Sơn*, Lê Khánh Luận†, Trần Minh Thuyết‡

1. Giới thiệu.

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên ban đầu cho phương trình sóng tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(t)u_x(0,t) = Y(t), \ -\mu(t)u_x(1,t) = \lambda_1 \left|u_t(1,t)\right|^{\alpha-2} u_t(1,t), \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $K, \lambda, \lambda_1, \alpha$ là các hằng số cho trước; $\mu, f, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thoả các điều kiện sẽ đặt ra sau; ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Y(t)$ thoả mãn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường sau

$$\begin{cases} Y''(t) + pY'(t) + qY(t) = bu_{tt}(0,t), \quad 0 < t < T, \\ Y(0) = Y_0, \ Y'(0) = Y_1, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó p, q, b, Y_0, Y_1 là các hằng số cho trước, với $p^2 - 4q < 0$.

Bài toán (1.1), (1.2) và các dạng tương tự với các điều kiện biên khác nhau đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả (xem [1] – [8]) và các tài liệu tham khảo trong đó

Trong trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, các tác giả Nguyễn Thúc An và Nguyễn Đình Triều [1] đã xét bài toán $(1.1)_{1,3}$, (1.2), với

$$f(x,t) = 0, \ p = 0, q > 0, \ \tilde{u}_0 = \tilde{u}_1 = 0, Y_0 = 0, \tag{1.3}$$

trong đó điều kiện biên $(1.1)_2$ được thay thế bởi

$$u_x(0,t) = Y(t), \ u(1,t) = 0. \tag{1.4}$$

---

* Học viên Cao học Giải Tích K18, ĐHSP Tp. HCM,
† ThS, Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM,
‡‡ TS, Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM,

Trong trường hợp này, bài toán $(1.1)_{1,3}$, (1.2), (1.3), (1.4) mô tả dao động của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tựa trên nền cứng.

Trong [2], Bergounioux, Long, Dinh, đã nghiên cứu bài toán $(1.1)_{1,3}$, (1.2), với

$$\mu(t) \equiv 1, \ p = 0, q > 0, \tag{1.5}$$

trong đó điều kiện biên $(1.1)_2$ được thay thế bởi

$$u_x(0,t) = \Psi(t), \ - u_x(1,t) = \lambda_1 u_t(1,t) + K_1 u(1,t), \tag{1.6}$$

với các hằng số cho trước $\lambda_1 > 0, K_1 \geq 0$. Như vậy bài toán chúng tôi xét với điều kiện biên phi tuyến tổng quát hơn (1.6) tương ứng với $K_1 = 0$.

Từ (1.2), ta biểu diễn $\Psi(t)$ theo dạng

$$\Psi(t) = g(t) + \beta u(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{1.7}$$

trong đó

$$g(t) = e^{-\alpha t}\left[\left(\Psi_0 - u_0(0)\right)\cos\omega t + \omega^{-1}\left(\alpha\Psi_0 + \Psi_1 + \alpha u_0(0) - u_1(0)\right)\sin\omega t\right]$$

$$k(t) = \beta\omega^{-1}e^{-\alpha t}\left[2\alpha\omega\cos\omega t + (\omega^2 - \alpha^2)\sin\omega t\right]$$

với $\alpha = \dfrac{p}{2}, \ \ \omega = \sqrt{4q - p^2}$.

Do đó bài toán (1.1), (1.2) được đưa về (1.1), (1.7).

Bài báo gồm 4 phần chính. Ở phần 1, dựa vào phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm, chúng tôi chứng minh bài toán (1.1), (1.7) tồn tại và duy nhất nghiệm yếu toàn cục. Các phần sau được xét trong trường hợp $\alpha = 2$. Phần 2 khảo sát tính trơn và tính ổn định của nghiệm phụ thuộc vào dữ kiện bài toán. Phần 3 nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu khi $\lambda_1 \to 0_+$. Cuối cùng, phần 4 trình bày một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu của bài toán (1.1) – (1.3) đến cấp $N + \frac{1}{2}$ theo ba tham số bé $K, \ \lambda, \ \lambda_1$. Kết quả thu được ở đây là một sự tổng quát hóa một cách tương đối các kết quả trong [1 – 5].

2. Các kí hiệu

Đặt $\Omega = (0,1)$. Trong bài này, các kí hiệu $L^p = L^p(\Omega)$, $H^m = H^m(\Omega)$ được sử dụng và cho phép chúng tôi bỏ qua định nghĩa của các không gian hàm thông dụng đó. Tích vô hướng trong L^2 và chuẩn sinh bởi tích vô hướng này lần lượt được kí hiệu bởi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ và $\|\cdot\|$. Kí hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cũng được dùng để chỉ tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Kí hiệu $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của không gian Banach X. Kí hiệu $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$, để chỉ không gian Banach các hàm thực $u:(0,T) \to X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty$ với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{khi } 1 \le p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, & \text{khi } p = \infty. \end{cases}$$

Ta cũng kí hiệu $W(T) = \{v \in L^\infty(0,T;H^1) : v_t \in L^\infty(0,T;L^2)\}$ là không gian Banach thực với chuẩn định bởi

$$\|v\|_{W(T)} = \|v_t\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v\|_{L^\infty(0,T;H^1)}.$$

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le \sqrt{2}\|v\|_{H^1}, \ \forall v \in H^1.$$

3. Tồn tại và duy nhất nghiệm

Ta thành lập các giả thiết

(A$_1$) $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in H^1 \times L^2$,

(A$_2$) $f \in L^1(0,T;L^2)$,

(A$_3$) $\mu \in C^0([0,T])$, $\mu(t) \ge \mu_0 > 0$, $\mu' \in L^1(0,T)$, (A$_4$) $g, k \in W^{1,1}(0,T)$,

(A$_5$) $\alpha \geq 2,\ \beta > 0,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}_+,\ K,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Khi đó, ta có định lí sau

Định lí 3.1. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* (A$_1$) – (A$_5$) *đúng. Khi đó, bài toán* (1.1), (1.7) *tồn tại duy nhất nghiệm yếu* $(u,\Psi) \in W(T) \times L^\infty(0,T)$ *sao cho*

$$u(0,\cdot) \in L^\infty(0,T),\ u(1,\cdot) \in W^{1,\alpha}(0,T). \tag{3.1}$$

Chứng minh định lí 3.1. Chứng minh định lí gồm 4 bước.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin. Chọn cơ sở đặc biệt $\{w_j\}$ của H^1, nghiệm xấp xỉ của (1.1), (1.7) được tìm dưới dạng

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j, \tag{3.2}$$

trong đó, $c_{mj}(t)$ là nghiệm của hệ phương trình phi tuyến sau

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w_j \rangle + \mu(t)\langle u_{mx}(t), w_{jx} \rangle + \Psi_m(t) w_j(0) + H_\alpha(u_m'(1,t)) w_j(1) \\ \qquad + \langle K u_m(t) + \lambda u_m'(t), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle, \qquad j = \overline{1,m}, \\ u_m(0) = u_{0m},\ u_m'(0) = u_{1m}, \\ \Psi_m(t) = g(t) + \beta u_m(0,t) - \int_0^t k(t-s) u_m(0,s)\,ds, \\ H_\alpha(z) = |z|^{\alpha-2} z, \end{cases} \tag{3.3}$$

trong đó,

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} w_j \to \tilde{u}_0 \quad \text{mạnh trong } H^1, \tag{3.4}$$

$$u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{mj} w_j \to \tilde{u}_1 \quad \text{mạnh trong } L^2. \tag{3.5}$$

Với $T > 0$ cho trước, chúng tôi sử dụng định lí điểm bất động Schauder để chứng minh hệ (3.3) có nghiệm $c(t) = (c_1(t),...,c_m(t))$ trên khoảng $[0,T_m] \subset [0,T]$.

Bổ đề 3.2. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* (A_1) – (A_5) *đúng. Khi đó, tồn tại* $T_m > 0$ *sao cho hệ* (3.3) *có nghiệm* $c(t) = (c_1(t),...,c_m(t))$ *trên khoảng* $[0,T_m] \subset [0,T]$.

Đánh giá tiên nghiệm sau đây cho phép ta lấy $T_m = T$, $\forall m$.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm. Nhân $(3.3)_1$ với $c'_{mj}(t)$ và lấy tổng theo j, sau đó tích phân theo biến thời gian với cận từ 0 đến t, và cuối cùng áp dụng bổ đề Gronwall, chúng ta thu được kết quả như trong bổ đề sau:

Bổ đề 3.3. *Tồn tại một hằng số* $C_T^{(1)}$ *chỉ phụ thuộc vào T sao cho*

$$\| u'_m(t) \|^2 + \| u_{mx}(t) \|^2 + u_m^2(0,t) + \lambda_1 \int_0^t | u'_m(1,s) |^\alpha ds \leq C_T^{(1)}, \quad \forall t \in [0,T], \forall m.$$

Bước 3. Qua giới hạn. Từ kết quả của Bổ đề 3.3 và các định lí nhúng compact, ta thu được một dãy con của dãy nghiệm xấp xỉ hội tụ về nghiệm yếu của bài toán. Trong quá trình chuyển qua giới hạn của số hạng phi tuyến chúng tôi đã sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 3.4. *Giả sử u là nghiệm yếu của bài toán sau*

$$\begin{cases} u'' - \mu(t) u_{xx} = F_1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ \mu(t) u_x(0,t) = \beta u(0,t) + \bar{\Psi}(t), \; -\mu(t) u_x(1,t) = Z(t), \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u'(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ u \in W(T), \; u(0,\cdot) \in L^\infty(0,T), \; u(1,\cdot) \in H^1(0,T), \; \bar{\Psi} \in W^{1,1}(0,T). \end{cases} \tag{3.6}$$

Khi đó, ta có

$$\frac{1}{2} \| u'(t) \|^2 + \frac{1}{2} \mu(t) \| u_x(t) \|^2 \geq \frac{1}{2} \| u_1 \|^2 + \frac{1}{2} \mu(0) \| u_{0x} \|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \mu'(s) \| u_x(s) \|^2 ds$$

$$- \int_0^t Z(s) u'(1,s) ds - \frac{\beta}{2} u^2(0,t) + \frac{\beta}{2} u_0^2(0) - \bar{\Psi}(t) u(0,t) + \bar{\Psi}(0) u_0(0)$$

$$+\int_0^t \bar{\Psi}'(s)u(0,s)\,ds + \int_0^t \langle F_1(s), u'(s)\rangle\, ds, \text{ a.e. } t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

Hơn nữa, nếu $u_0 = u_1 = 0$ *thì* (3.7) *xảy ra đẳng thức.*

Bổ đề 3.4 được chứng minh bằng kĩ thuật tương tự như trong [8].

Bước 4. Sự duy nhất nghiệm. Để chứng minh sự duy nhất nghiệm yếu chúng tôi sử dụng bổ đề 3.4 một lần nữa và kết hợp với bất đẳng thức Gronwall.

Từ đó định lí 3.1 được chứng minh.

Chú thích 1. Kết quả thu được tổng quát hóa các kết quả trước đây xem [1-2].

4. Tính trơn của nghiệm

Trong phần này, chúng tôi tăng cường thêm các giả thiết sau:

(B_1) $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in H^2 \times H^1$,

(B_2) $f,\ f_t \in L^1(0,T;L^2)$,

(B_3) $\mu \in C^1([0,T]),\ \mu(t) \geq \mu_0 > 0,\ \mu' \in L^1(0,T)$,

(B_4) $g, k \in W^{2,1}(0,T)$,

(B_5) $\alpha = 2,\ \beta > 0,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}_+,\ K,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Khi đó, chúng tôi thu được nghiệm yếu (u,Ψ) có tính trơn tốt hơn như sau:

Định lí 4.1. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* (B_1) – (B_5) *đúng. Khi đó, bài toán* (1.1), (1.7) *tồn tại duy nhất nghiệm yếu* (u,Ψ) *sao cho*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H^2),\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,\cdot) \in W^{1,\infty}(0,T),\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T),\ \Psi \in W^{1,\infty}(0,T). \end{cases} \tag{4.1}$$

Chứng minh định lí 4.1. Trong $(3.3)_1$, thay $\alpha = 2$, và sau đó lấy đạo hàm theo biến thời gian t rồi nhân hai vế với $c'_{mj}(t)$ và lấy tổng theo j, sau đó tích phân với cận từ 0 đến t, và cuối cùng áp dụng bổ đề Gronwall, chúng tôi thu được kết quả như bổ đề sau.

Bổ đề 4.2. *Tồn tại một hằng số $C_T^{(2)}$ chỉ phụ thuộc vào T sao cho*

$$\| u''_m(t) \|^2 + \| u'_{mx}(t) \|^2 + | u'_m(0,t) |^2 + \lambda_1 \int_0^t | u''_m(1,s) |^2 \, ds \le C_T^{(2)}, \quad \forall t \in [0,T], \forall m.$$

Từ các bổ đề 3.3 và 4.2, định lí 4.1 được chứng minh.

Chú thích 2. Ta suy ra từ (4.1) rằng

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T];H^1) \cap C^1([0,T];L^2) \cap L^\infty(0,T;H^2), \\ u_t \in C^0([0,T];L^2) \cap L^\infty(0,T;H^1), \quad u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2). \end{cases} \tag{4.2}$$

Do đó, $u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2) \subset L^2(Q_T)$. Điều này dẫn đến

$$u \in H^2(Q_T) \cap L^\infty(0,T;H^2). \tag{4.3}$$

Từ (4.3) nếu $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in H^2 \times H^1$ thì thành phần u của nghiệm yếu (u,Ψ) sẽ thuộc vào không gian hàm $H^2(Q_T) \cap L^\infty(0,T;H^2)$. Nghiệm này khá giống với nghiệm cổ điển thuộc $C^2(\bar{Q}_T)$, mà $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ không nhất thiết thuộc về $C^2(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$.

5. Sự ổn định của nghiệm vào dữ kiện của bài toán

Trong phần này, chúng tôi khảo sát tính sự ổn nghiệm của bài toán (1.1), (1.7) tương ứng với $\alpha = 2$. Giả sử các hàm $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ thỏa giả thiết (B_1). Theo định lý 4.1, thì bài toán (1.1), (1.7) có duy nhất nghiệm yếu (u,Ψ) phụ thuộc vào $K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k$.

$$u = u(K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k), \quad \Psi = \Psi(K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k). \tag{5.1}$$

trong đó $(K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k)$ thỏa các giả thiết (B_2) – (B_5).

Đặt

$$\Im(\mu_0) = \{(K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k) : (K, \lambda, \beta, \lambda_1, \mu, f, g, k) \text{ thỏa } (B_2) - (B_5)\}$$

với $\mu_0 > 0$ là các hằng số cho trước.

Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 5.1. *Giả sử* $(B_1)-(B_5)$ *thỏa. Khi đó, với mỗi* $T>0$, *nghiệm của bài toán* (1.1), (1.7) *là ổn định với dữ kiện* $(K,\lambda,b,\lambda_1,\mu,f,g,k)$ *trong* $\mathfrak{F}(\mu_0)$, *nghĩa là:*

Nếu $(K,\lambda,b,\lambda_1,\mu,f,g,k)$, $(K^j,\lambda^j,b^j,\lambda_1^j,\mu^j,f^j,g^j,k^j)\in \mathfrak{F}(\mu_0)$ *sao cho*

$$\begin{cases} |K^j-K|+|\lambda^j-\lambda|+|\lambda_1^j-\lambda_1|\to 0, \\ \|\mu^j-\mu\|_{C^1([0,T])}\to 0,\ \|f^j-f\|_{L^2(Q_T)}+\|f_t^j-f_t\|_{L^2(Q_T)}\to 0, \ khi\ j\to+\infty, \\ \|g^j-g\|_{W^{2,1}(0,T)}\to 0,\ \ \|k^j-k\|_{W^{2,1}(0,T)}\to 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

thì

$$\left(u_j,u_j(1,\cdot),Y_j\right)\to\left(u,u(1,\cdot),Y\right),\ trong\ W(T)\times H^1(0,T)\times L^2(0,T)\ khi\ j\to+\infty, \tag{5.3}$$

trong đó $u_j=u(K^j,\lambda^j,b^j,\lambda_1^j,\mu^j,f^j,g^j,k^j)$, $Y_j=Y(K^j,\lambda^j,b^j,\lambda_1^j,\mu^j,f^j,g^j,k^j)$.

6. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi $\lambda_1\to 0_+$

Trong phần này, ta giả sử rằng $\alpha=2$ và $(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1,g,k,\mu,f,K,\lambda,b)$ thỏa các giả thiết $(A_1)-(A_5)$. Với mỗi $\lambda_1>0$, do định lí 3.1 bài toán (1.1), (1.7) có duy nhất nghiệm yếu (u,Y) phụ thuộc vào λ_1:

$$u=u_{\lambda_1},\quad Y=Y_{\lambda_1}. \tag{6.1}$$

Ta xét bài toán nhiễu sau, với $\lambda_1>0$ là tham số nhỏ

$$\begin{cases} u_{tt}-\mu(t)u_{xx}+Ku+\lambda u_t=f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ \mu(t)u_x(0,t)=Y(t),\ -\mu(t)u_x(1,t)=\lambda_1 u_t(1,t), \\ u(x,0)=\tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \\ Y(t)=g(t)+bu(0,t)-\int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \end{cases} \tag{P_{λ_1}}$$

Ta sẽ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu (u,Ψ) của bài toán (P_{λ_1}) phụ thuộc vào tham số λ_1.

Khi đó, ta có định lí sau

Định lí 6.1. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* (A_1) – (A_5) *đúng. Khi đó*

(i) *Bài toán* (P_0) *tương ứng với* $\lambda_1 = 0$ *có nghiệm duy nhất* $(u_0,\Psi_0) \in W(T) \times L^\infty(0,T)$ thỏa

$$u_0(0,\cdot) \in L^\infty(0,T),\ u_0(1,\cdot) \in H^1(0,T). \tag{6.2}$$

(ii) *Nghiệm* $(u_{\lambda_1},\Psi_{\lambda_1})$ *hội tụ mạnh trong* $W(T) \times L^\infty(0,T)$ *về* (u_0,Ψ_0) *khi* $\lambda_1 \to 0_+$.

Hơn nữa, chúng ta có đánh giá tiệm cận

$$\|u_{\lambda_1} - u_0\|_{W(T)} + \sqrt{\lambda_1}\,\|u'_{\lambda_1}(1,\cdot) - u'_0(1,\cdot)\|_{L^2(0,T)} + \|\Psi_{\lambda_1} - \Psi_0\|_{L^\infty(0,T)} \le C_T\sqrt{\lambda_1}, \tag{6.3}$$

trong đó, C_T *là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào* T.

Chứng minh định lí 6.1.

i) Tương tự như chứng minh Định lí 3.1.

ii) Xét dãy $\{\lambda_{1m}\}$ sao cho $\lambda_{1m} \to 0_+$, khi $m \to \infty$, ta chứng minh được rằng $\{(u_{\lambda_{1m}},\Psi_{\lambda_{1m}})\}$ là dãy Cauchy trong $W(T) \times L^\infty(0,T)$. Từ đó ta suy ra rằng nghiệm $(u_{\lambda_1},\Psi_{\lambda_1})$ hội tụ về (u_0,Ψ_0) mạnh trong $W(T) \times L^\infty(0,T)$ khi $\lambda_1 \to 0_+$.

7. Khai triển tiệm cận của nghiệm theo ba tham số bé K, λ, λ_1

Trong phần này, ta giả sử $\alpha = 2$, $\beta \ge 0$ và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k)$ thỏa các giả thiết (A_1) – (A_4). Với $(K,\lambda) \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ thì từ định lí 3.1, bài toán (1.1), (1.7) có duy nhất nghiệm yếu (u,Ψ) phụ thuộc vào (K,λ,λ_1): $u = u(K,\lambda,\lambda_1)$, $P = P(K,\lambda,\lambda_1)$.

Ta xét bài toán nhiễu dưới đây theo ba tham số bé K, λ, λ_1 thỏa $|K| \leq K_*$, $|\lambda| \leq \lambda_*$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_{1*}$ ($K_*, \lambda_*, \lambda_{1*}$ là các hằng số cố định).

$$\begin{cases} Au \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(t)u_x(0,t) = \Psi(t), \quad -\mu(t)u_x(1,t) = \lambda_1 u_t(1,t), \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ \Psi(t) = g(t) + bu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \end{cases} \qquad (P_{K,\lambda,\lambda_1})$$

Chúng tôi khai triển tiệm cận nghiệm yếu của bài toán $(P_{K,\lambda,\lambda_1}) \equiv (P_{\vec{\varepsilon}})$ theo ba tham số bé K, λ, λ_1 tức là ta có thể xấp xỉ nghiệm yếu u bởi một đa thức theo ba biến K, λ, λ_1 và đánh giá được sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ.

Ở đây, ta sẽ dùng các kí hiệu sau, với đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ và $\vec{\varepsilon} = (K, \lambda, \lambda_1) \in \mathbb{R}^3$, ta đặt

$$\begin{cases} |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad \gamma! = \gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!, \\ \vec{\varepsilon}^{\gamma} = K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2}\lambda_1^{\gamma_3}, \quad \|\vec{\varepsilon}\| = \sqrt{K^2 + \lambda^2 + \lambda_1^2}, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^3, \ \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, \ \forall i = 1,2,3. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Giả sử $u_{\vec{0}} \equiv u_{0,0,0}$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_{\vec{0}}) \equiv (\tilde{P}_{0,0,0})$ (như trong định lí 3.1) ứng với $(K, \lambda, \lambda_1) = (0,0,0)$, tức là

$$(\tilde{P}_{\vec{0}}) \begin{cases} Au_{\vec{0}} = F_{\vec{0}} \equiv f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(t)u_{\vec{0}x}(0,t) = \Psi_{\vec{0}}(t), \ -\mu(t)u_{\vec{0}x}(1,t) = 0, \\ u_{\vec{0}}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \ u'_{\vec{0}}(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ \Psi_{\vec{0}}(t) = g(t) + bu_{\vec{0}}(0,t) - \int_0^t k(t-s)u_{\vec{0}}(0,s)ds, \\ (u_{\vec{0}}, \Psi_{\vec{0}}) \in W(T) \times L^\infty(0,T), \ u_{\vec{0}}(0,\cdot) \in L^\infty(0,T), \ u_{\vec{0}}(1,\cdot) \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu (u_γ, Ψ_γ), $\gamma \in \mathbb{Z}_+^3$, $1 \le |\gamma| \le N$ được xác định bởi các bài toán sau

$$
(\tilde{P}_\gamma)\begin{cases}
Au_\gamma = F_\gamma, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\
\mu(t)u_{\gamma x}(0,t) = \Psi_\gamma(t), \ -\mu(t)u_{\gamma x}(1,t) = Z_\gamma, \\
u_\gamma(x,0) = 0, \ u_{\gamma t}(x,0) = 0, \\
\Psi_\gamma(t) = g(t) + \beta u_\gamma(0,t) - \int_0^t k(t-s)u_\gamma(0,s)ds, \\
(u_\gamma, \Psi_\gamma) \in W(T) \times L^\infty(0,T), \ u_\gamma(0,\cdot) \in L^\infty(0,T), \ u_\gamma(1,\cdot) \in H^1(0,T).
\end{cases}
$$

trong đó F_γ, $Z_\gamma(t)$, $|\gamma| \le N$, được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$
F_\gamma = \begin{cases}
f(x,t), & |\gamma| = 0, \\
0, & \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ 1 \le |\gamma| \le N \\
-u_{\gamma_1 - 1, \gamma_2, \gamma_3}, & \gamma_1 \ge 1, \ \gamma_2 = 0, \ 1 \le |\gamma| \le N, \\
-u'_{\gamma_1, \gamma_2 - 1, \gamma_3}, & \gamma_1 = 0, \ \gamma_2 \ge 1, \ 1 \le |\gamma| \le N, \\
-u_{\gamma_1 - 1, \gamma_2, \gamma_3} - u'_{\gamma_1, \gamma_2 - 1, \gamma_3}, & \gamma_1 \ge 1, \ \gamma_2 \ge 1, \ \ 2 \le |\gamma| \le N,
\end{cases} \tag{7.2}
$$

và

$$
Z_\gamma = \begin{cases}
g(t), & |\gamma| = 0, \\
0, & \gamma_3 = 0, \ 1 \le |\gamma| \le N \\
u'_0(1,t), & \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ 1 \le |\gamma| \le N, \\
u'_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - 1}(1,t), & 2 \le |\gamma| \le N.
\end{cases} \tag{7.3}
$$

Giả sử $(u, \Psi) = (u_{\vec{\varepsilon}}, \Psi_{\vec{\varepsilon}})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(P_{\vec{\varepsilon}})$. Khi đó

$$
v = u - \sum_{|\gamma| \le N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^{\,\gamma}, \qquad R = \Psi - \sum_{|\gamma| \le N} \Psi_\gamma \vec{\varepsilon}^{\,\gamma}, \tag{7.4}
$$

thỏa bài toán sau

$$\begin{cases} Av + Kv + \lambda v_t = E_N(x,t), \ \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(t) v_x(0,t) = R(t), \ \ -\mu(t) v_x(1,t) = \lambda_1 v_t(1,t) + \tilde{E}_N(t), \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \\ R(t) = bv(0,t) - \int_0^t k(t-s) v(0,s)\, ds, \end{cases} \tag{7.5}$$

trong đó

$$E_N(x,t) = -\sum_{|\gamma| = N} \left(K u_\gamma + \lambda u'_\gamma \right) \vec{\varepsilon}^{\,\gamma}, \quad \tilde{E}_N(t) = \lambda_1 \sum_{|\gamma| = N} u'_\gamma(1,t) \vec{\varepsilon}^{\,\gamma}. \tag{7.6}$$

Bổ đề 7.1. *Giả sử* $(A_1) - (A_4)$ *thỏa. Khi đó ta có*

i) $\| E_N \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \tilde{C}_{1N} \| \vec{\varepsilon} \|^{N+1},$ (7.7)

ii) $\| \tilde{E}_N \|_{L^2(0,T)} \le \tilde{C}_{2N} \| \vec{\varepsilon} \|^{N+1},$ (7.8)

trong đó $\tilde{C}_{1N}$ *và* $\tilde{C}_{2N}$ *là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hằng số* $\| \vec{\varepsilon}_* \|$, $\| u_\gamma \|_{L^\infty(0,T;H^1)}$, $\| u_{\gamma t} \|_{L^\infty(0,T;L^2)}$, $\| u_\gamma(0,\cdot) \|_{L^\infty(0,T)}$, $\| u_{\gamma t}(1,\cdot) \|_{L^2(0,T)}$, $|\gamma| = N$.

Kế tiếp, ta có định lí sau

Định lí 7.2. *Giả sử* $(A_1) - (A_4)$ *thỏa. Thì mọi* $(K,\lambda) \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ *thỏa* $|K| \le K_*$, $|\lambda| \le \lambda_*$, $0 \le \lambda_1 \le \lambda_{1*}$ *bài toán* $(P_{K,\lambda,\lambda_1})$ *có duy nhất nghiệm yếu* $(u,\Psi) = (u_{\vec{\varepsilon}}, \Psi_{\vec{\varepsilon}}) \in W(T) \times L^\infty(0,T)$ *thỏa đánh giá tiệm cận tới cấp* $N + \frac{1}{2}$ *như sau*

$$\begin{aligned} \| u - \sum_{|\gamma| \le N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^{\,\gamma} \|_{W(T)} &+ \sqrt{\lambda_1} \| u'(1,\cdot) - \sum_{|\gamma| \le N} u'_\gamma(1,\cdot) \vec{\varepsilon}^{\,\gamma} \|_{L^2(0,T)} \\ &+ \| \Psi - \sum_{|\gamma| \le N} \Psi_\gamma \vec{\varepsilon}^{\,\gamma} \|_{L^\infty(0,T)} \le \tilde{C}_N^* \| \vec{\varepsilon} \|^{N+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

với mọi $(K,\lambda) \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ *thỏa* $|K| \le K_*$, $|\lambda| \le \lambda_*$, $0 \le \lambda_1 \le \lambda_{1*}$, (u_γ, Ψ_γ) *là nghiệm yếu của bài toán* $(\tilde{P}_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^3$, $|\gamma| \le N$, *và* $\tilde{C}_N^*$ *là hằng số độc lập với* $\vec{\varepsilon} = (K, \lambda, \lambda_1)$.

Chú thích 3. Trong [4], với trường hợp đặc biệt của bài toán (1.1), (1.7), thì Long, Út, Trúc, đã đạt được khai triển tiệm cận của nghiệm tới cấp $N + 1$ theo hai tham số bé (K, l). Theo sự hiểu biết của chúng tôi, chưa có nhiều công trình nghiên cứu về khai triển tiệm cận nghiệm theo nhiều tham số bé, một số kết quả về vấn đề này có thể tìm thấy trong [6, 7] và các tài liệu tham khảo trong đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam, **13** (2), 1 – 7.

[2]. Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long (2001), Alain Phạm Ngọc Định, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43** (5), 547 – 561.

[3]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, Bound. Value Probl, (3) 337 – 358.

[4]. Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **63** (2), 198 – 224.

[5]. Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36** (4), 915 – 938.

[6]. Nguyễn Thành Long, Lê Xuân Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **67** (3), 842 – 864.

[7]. Lê Thị Phương Ngọc, Lê Khánh Luận, Trần Minh Thuyết, Nguyễn Thành Long (2009), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (11), 5799 – 5819.

[8]. Lê Thị Phương Ngọc, Lê Nguyễn Kim Hằng, Nguyễn Thành Long (2009), *On a nonlinear wave equation associated with the boundary conditions involving convolution*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **70** (11), 3943 – 3965.

Tóm tắt

Bài báo này nghiên cứu một bài toán biên cho phương trình sóng tuyến tính $u_{tt} - m(t)u_{xx} + Ku + l\,u_t = f(x,t),\ \ 0 < x < 1,\ 0 < t < T$, trong đó điều kiện biên tại $x = 0$ liên kết với một phương trình vi phân thường cấp hai có vế phải là $b\,u_{tt}(0,t)$ và điều kiện biên tại điểm $x = 1$ có dạng $-m(t)u_x(1,t) = l_1 \left|u_t(1,t)\right|^{a-2} u_t(1,t)$, với K_1, l_1, a, b là các hằng số dương cho trước. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu được chứng minh bằng phương pháp Faedo – Galerkin. Trong trường hợp $a = 2$, tính ổn định và tính trơn của nghiệm cũng được khảo sát. Cuối cùng, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận nghiệm của bài toán tới cấp $N + \frac{1}{2}$ theo ba tham số bé K, l, l_1.

Abstract.

A linear wave equation associated with

a cauchy problem for an ordinary differential equation

We consider the initial boundary value problem for the linear wave equation $u_{tt} - m(t)u_{xx} + Ku + l\,u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T$, where the boundary condition at $x = 0$ associated with a second order differential equation and the boundary condition at $x = 1$ in the form $-m(t)u_x(1,t) = l_1 \left|u_t(1,t)\right|^{a-2} u_t(1,t)$, where K_1, l_1 and a are given positive constants. Existence and uniqueness of a weak solution are proved by using the Faedo – Galerkin method. In the case of $a = 2$, the stability and regularity of solutions are also discussed. Finally, we obtain an asymptotic expansion of the solution of the problem up to order $N + \frac{1}{2}$ in accordance with three small parameters K, l, l_1.