VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP KHÔNG THUẦN NHẤT: KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM THEO NHIỀU THAM SỐ BÉ

Lê Khánh Luận[*], Trần Minh Thuyết[†]
Lê Thị Phương Ngọc[‡], Nguyễn Anh Triết[§]

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét phương trình sóng phi tuyến

$$u_{tt} - \left(m(u)u_x\right)_x = f(x,t,u,u_x,u_t),\ \ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \qquad (1.1)$$

$$u_x(0,t) = g(t),\ u(1,t) = 0, \qquad (1.2)$$

$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \qquad (1.3)$$

trong đó $\tilde{u}_0,\ \tilde{u}_1, m, f,\ g$ là các hàm số cho trước thỏa các điều kiện cụ thể sẽ đặt ra sau.

Phương trình (1.1) là trường hợp riêng của một phương trình có dạng tổng quát sau:

$$u_{tt} - \left(m(x,t,u)u_x\right)_x = f(x,t,u,u_x,u_t). \qquad (1.4)$$

Trong các trường hợp đặc biệt, khi hàm $m(x,t,u)$ độc lập với $u,$ chẳng hạn $m(x,t,u) = 1$ hoặc $m(x,t,u) = m(x,t),$ và hàm phi tuyến f có dạng đơn giản, bài toán (1.4) với các điều kiện biên và điều kiện đầu khác nhau đã được nghiên cứu trong [1 – 3, 5 – 19, 21, 22].

Trong [4], Ficken và Fleishman thiết lập sự tồn tại toàn cục duy nhất và sự ổn định nghiệm của phương trình

$$u_{xx} - u_{tt} - 2au_t - bu = eu^3 + g,\ \ e > 0. \qquad (1.5)$$

[*] ThS, Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM,
[†] TS, Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM,
[‡] TS, Trường CĐ Sư phạm Nha Trang,
[§] HV Cao học, Trường ĐH Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh.

Rabinowitz [20] đã chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$u_{xx} - u_{tt} - 2\alpha u_t = \varepsilon f(x,t,u,u_x,u_t), \tag{1.6}$$

với ε là một tham số bé và f là một hàm tuần hoàn theo thời gian.

Trên cơ sở các công trình trên, trong bài viết này, chúng tôi xét bài toán (1.1) – (1.3). Bằng cách liên kết bài toán này với một thuật giải qui nạp tuyến tính đồng thời sử dụng phương pháp Faedo – Galerkin và phương pháp compact, sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán được chứng minh. Hơn nữa, một khai triển tiệm cận cấp cao của nghiệm theo nhiều tham số bé cũng được thiết lập. Kết quả thu được là một sự tổng quát hóa một cách tương đối các kết quả trong [1 – 22].

2. Các kí hiệu

Đặt $\Omega = (0,1)$. Trong bài báo này, các kí hiệu $L^p = L^p(\Omega)$, $H^m = H^m(\Omega)$ được sử dụng và cho phép chúng tôi bỏ qua định nghĩa của các không gian hàm thông dụng đó. Tích vô hướng trong L^2 và chuẩn sinh bởi tích vô hướng này lần lượt được kí hiệu bởi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ và $\|\cdot\|$. Kí hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cũng được dùng để chỉ tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Kí hiệu $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của không gian Banach X. Kí hiệu $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$, để chỉ không gian Banach các hàm thực $u : (0,T) \to X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty$ với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{khi } 1 \le p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, & \text{khi } p = \infty. \end{cases}$$

Ta đặt

$$V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\}, \; a(u,v) = \int_0^1 u_x(x) v_x(x)\,dx, \; \forall u,v \in V.$$

Khi đó V là không gian con đóng của H^1 và trên V, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{a(v,v)} = \|v_x\|$ là các chuẩn tương đương.

3. Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm

Ta thành lập các giả thiết

(H$_1$) $\tilde{u}_0 \in V \cap H^2$, $\tilde{u}_1 \in V$,

(H$_2$) $g \in C^3(\mathbb{R}_+)$,

(H$_3$) $m \in C^2(\mathbb{R})$, $m(z) \geq m_0 > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$,

(H$_4$) $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$.

Đặt $\varphi(x,t) = (x-1)g(t)$. Bằng cách đổi biến $v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x,t)$, ta sẽ đưa bài toán (1.1) – (1.3) về bài toán điều kiện biên thuần nhất như sau

$$\begin{cases} v_{tt} - \big(m(v+\varphi)v_x\big)_x = \tilde{f}(x,t,v,v_x,v_t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_x(0,t) = u(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \tilde{v}_0(x),\ v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{f}(x,t,v,v_x,v_t) = f(x,t,v+\varphi,v_x+\varphi,v_t+\varphi) - (x-1)g''(t) \\ \qquad\qquad + m'(v+\varphi)(v_x+g)g, \\ \tilde{v}_0(x) = \tilde{u}_0(x) - \varphi(x,0) = \tilde{u}_0(x) - (x-1)g(0), \\ \tilde{v}_1(x) = \tilde{u}_1(x) - \varphi_t(x,0) = \tilde{u}_1(x) - (x-1)g'(0), \end{cases}$$

g và $\tilde{u}_0$ thỏa điều kiện tương thích $g(0) = u_x(0,0) = \tilde{u}_0'(0)$.

Cố định $T^* > 0$, với mỗi $T \in (0,T^*]$ và $M > 0$, ta đặt

$$W_1(M,T) = \{v \in W(M,T) : u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)\},$$

trong đó

$$W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;V \cap H^2) : v_t \in L^\infty(0,T;V),\ v_{tt} \in L^2(Q_T),$$
$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V\cap H^2)} \le M,\ \|v_t\|_{L^\infty(0,T;V)} \le M,\ \|v_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \le M\},$$

và $Q_T = (0,1) \times (0,T)$.

Thuật giải xấp xỉ tuyến tính

Chọn số hạng ban đầu $v_0 = \tilde{v}_0$.

Giả sử rằng $v_{m-1} \in W_1(M,T)$, ta liên kết bài toán (3.1) với bài toán sau:

Tìm $v_m \in W_1(M,T)$ thỏa bài toán biến phân tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \langle v_m'', w\rangle + \langle \mu_m(t) v_{mx}, w_x\rangle = \langle F_m(t), w\rangle, \quad \forall w \in V, \\ v_m(0) = \tilde{v}_0,\ v_m'(0) = \tilde{v}_1, \end{cases} \tag{3.9}$$

với

$$\begin{cases} \mu_m(t) = \mu(\eta_m(t)), \quad \eta_m(t) = v_{m-1}(t) + \varphi(t), \\ F_m(t) = \tilde{f}(x,t,v_{m-1},\nabla v_{m-1},v_{m-1}'). \end{cases} \tag{3.10}$$

Khi đó, ta có các định lí sau

Định lí 3.1. *Giả sử* (H_1) – (H_4) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M > 0$ *và* $T > 0$ *phụ thuộc vào* T^*, $\tilde{v}_0$, $\tilde{v}_1$, μ, γ, $\tilde{f}$ *sao cho, với* $v_0 = \tilde{v}_0$, *tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính* $\{v_m\} \subset W_1(M,T)$ *xác định bởi* (3.9) *và* (3.10).

Định lí 3.2. *Giả sử* (H_1) – (H_4) *đúng. Khi đó:*

(i) *Tồn tại các hằng số* $M > 0$ *và* $T > 0$ *được xác định như trong định lí* 3.1, *sao cho bài toán* (3.1) *có duy nhất nghiệm yếu* $v \in W_1(M,T)$.

(ii) *Dãy quy nạp tuyến tính* $\{v_m\}$ *được xác định bởi* (3.9), (3.10) *hội tụ mạnh về nghiệm* v *trong không gian*

$$W_1(T) = \{w \in L^\infty(0,T;V) : w' \in L^\infty(0,T;L^2)\}.$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\| v_m - v \|_{L^\infty(0,T;V)} + \| v_m' - v' \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C k_T^m, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

trong đó hằng số $k_T \in (0,1)$ *và* C *là hằng số chỉ phụ thuộc vào* $T, T^*, \tilde{f}, g, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ *và* k_T.

Chứng minh các định lí trên dựa vào phương pháp xấp xỉ Faedo – Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm. Sử dụng các định lí nhúng compact, ta thu được một dãy con của dãy nghiệm xấp xỉ hội tụ về nghiệm yếu của bài toán. Kết quả thu được tổng quát hóa các kết quả trước đây của chúng tôi [18, 19].

4. Khai triển tiệm cận của nghiệm theo nhiều tham số bé

Trong phần này, giả sử (H_1) – (H_4) đúng, ngoài ra ta còn bổ sung các giả thiết sau:

(H_5) $\mu_i \in C^2(\mathbb{R}),\ \mu_i \ge 0,\ i = 1,\dots,p.$

Ta xét bài toán nhiễu dưới đây, trong đó $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ là p tham số bé sao cho $0 \le \varepsilon_i \le \varepsilon_{i*},\ i = 1,\dots,p$:

$$(P_{\vec{\varepsilon}}) \begin{cases} u_{tt} - \left[\left(\mu(u) + \varepsilon_1 \mu_1(u) + \dots + \varepsilon_p \mu_p(u)\right) u_x\right]_x = f(x,t,u,u_x,u_t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_x(0,t) = g(t),\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases}$$

Theo định lí 3.1, bài toán $(P_{\vec{\varepsilon}})$ có duy nhất nghiệm yếu phụ thuộc vào các tham số $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$: $u_{\vec{\varepsilon}} = u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Khi $\vec{\varepsilon} = (0, \dots, 0)$, $(P_{\vec{\varepsilon}})$ được kí hiệu là (P_0). Ta sẽ nghiên cứu khai triển tiệm cận của $u_{\vec{\varepsilon}}$ theo p tham số bé $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$.

Trong phần này, ta sử dụng các kí hiệu sau: cho $\vec{e} = (e_1,\ldots,e_p) \in \mathbb{R}^p$, và một đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, ta đặt

$$\begin{cases} |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p, \quad \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_p!, \\ \vec{e}^{\,\alpha} = e_1^{\alpha_1}\ldots e_p^{\alpha_p}, \quad \|\vec{e}\| = \sqrt{e_1^2 + \ldots + e_p^2}, \\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^p, \ \alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha_i \le \beta_i, \ \forall i = \overline{1,p}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Bổ đề 4.1. *Cho $m, N \in \mathbb{N}$ và $u_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$, $1 \le |\alpha| \le N$. Khi đó*

$$\left(\sum_{1 \le |\alpha| \le N} u_\alpha \vec{e}^{\,\alpha} \right)^m = \sum_{m \le |\alpha| \le mN} T_\alpha^{(m)}[u] \vec{e}^{\,\alpha}, \tag{4.2}$$

trong đó các hệ số $T_\alpha^{(m)}[u]$, $m \le |\alpha| \le mN$ phụ thuộc $u = \{u_\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$, $1 \le |\alpha| \le N$ được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} T_\alpha^{(1)}[u] = u_\alpha, \ 1 \le |\alpha| \le N, \\ T_\alpha^{(m)}[u] = \sum_{\beta \in A_\alpha^{(m)}} u_{\alpha-\beta} T_\beta^{(m-1)}[u], \ m \le |\alpha| \le mN, \ m \ge 2, \\ A_\alpha^{(m)} = \left\{ \beta \in \mathbb{Z}_+^p : \beta \le \alpha, \ 1 \le |\alpha - \beta| \le N, m-1 \le |\beta| \le (m-1)N \right\}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Chứng minh của Bổ đề có thể tìm thấy trong [13].

Bây giờ, ta giả sử rằng:

(H$_6$) $\mu \in C^{N+2}(\mathbb{R})$, $\mu_i \in C^{N+1}(\mathbb{R})$, $\mu \ge \mu_0 > 0$, $\mu_i \ge 0$, $i = \overline{1,p}$,

(H$_7$) $f \in C^{N+1}([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$.

Để thuận tiện ta sử dụng kí hiệu $f[u] = f(x,t,u,u_x,u_t)$.

Giả sử u_0 là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_0)$ tương ứng với $\vec{\varepsilon} = (0,\ldots,0)$, tức là

$$
(\tilde{P}_0)\quad \begin{cases} u_0'' - \left(\mu(u_0)u_{0x}\right)_x = f(x,t,u_0,u_{0x},u_0'),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{0x}(0,t) = g(t),\ u_0(1,t) = 0, \\ u_0(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_0'(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ u_0 \in W_1(M,T). \end{cases}
$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu $u_\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^p,\ 1 \le |\gamma| \le N$ được xác định bởi các bài toán sau

$$
(\tilde{P}_\gamma)\quad \begin{cases} u_\gamma'' - \left(\mu(u_0)u_{\gamma x}\right)_x = F_\gamma,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{\gamma x}(0,t) = u_\gamma(1,t) = 0, \\ u_\gamma(x,0) = u_\gamma'(x,0) = 0, \\ u_\gamma \in W_1(M,T), \end{cases}
$$

trong đó $F_\gamma,\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^p,\ 1 \le |\gamma| \le N$, được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$
F_\gamma = \begin{cases} f[u_0] \equiv f(x,t,u_0,u_{0x},u_0'), & |\gamma| = 0, \\ \pi_\gamma[f] + \displaystyle\sum_{1 \le |\nu| \le |\gamma|,\ \nu \le \gamma} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\rho_\nu[\mu] + \sum_{i=1}^{p} \rho_\nu^{(i)}[\mu_i]\right)\nabla u_{\gamma-\nu}\right], & 1 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \tag{4.4}
$$

với $\rho_\delta[\mu] = \rho_\delta[\mu;\{u_\gamma\}_{\gamma \le \delta}]$, $\rho_\delta^{(i)}[\mu] = \rho_\delta^{(i)}[\mu;\{u_\gamma\}_{\gamma \le \delta}]$, $\pi_\delta[f] = \pi_\delta[f;\{u_\gamma\}_{\gamma \le \delta}]$, $|\delta| \le N$, được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$
\rho_\delta[\mu] = \begin{cases} \mu(u_0), & |\delta| = 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{|\delta|} \frac{1}{m!}\mu^{(m)}(u_0)T_\delta^{(m)}[u], & 1 \le |\delta| \le N, \end{cases} \tag{4.5}
$$

$$\rho_\delta^{(i)}[m] = \rho_{\delta^{(i-)}}[m] = \begin{cases} \rho_{\delta_1,\ldots,\delta_{i-1},\delta_i-1,\delta_{i+1},\ldots,\delta_p}[m], & \delta_i \ge 1, \\ \rho_{\delta_1,\ldots,\delta_{i-1},-1,\delta_{i+1},\ldots,\delta_p}[m] = 0, & \delta_i = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

với $\delta^{(i-)} = (\delta_1,\ldots,\delta_{i-1},\delta_i - 1,\delta_{i+1},\ldots,\delta_p)$, $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_p) \in \mathbb{Z}_+^p$,

$$\pi_\delta[f] = \begin{cases} f[u_0], & |\delta| = 0, \\ \displaystyle\sum_{1\le m \le |\delta|} \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma)\in A(m,N) \\ \alpha+\beta+\gamma=\delta}} \frac{1}{m!} D^m f[u_0]\,\rho_\alpha^{(m_1)}[u]\,\rho_\beta^{(m_2)}[\nabla u]\,\rho_\gamma^{(m_3)}[u'], & \\ & 1 \le |\delta| \le N, \end{cases} \tag{4.7}$$

với

$m = (m_1,m_2,m_3) \in \mathbb{Z}_+^3$, $|m| = m_1 + m_2 + m_3$, $m! = m_1!m_2!m_3!$, $D^m f = D_3^{m_1} D_4^{m_2} D_5^{m_3} f$,

$$A(m,N) = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{Z}_+^p)^3 : m_1 \le |\alpha| \le m_1 N,\ m_2 \le |\beta| \le m_2 N,\ m_3 \le |\gamma| \le m_3 N\}.$$

Khi đó, ta có định lí sau

Định lí 4.2. *Cho* (H_1), (H_2), (H_6) *và* (H_7) *thỏa. Khi đó, tồn tại hằng số* $M > 0$ *và* $T > 0$ *sao cho với mọi* $\vec{\varepsilon}$, *với* $\|\vec{\varepsilon}\| \le \varepsilon_* < 1$, *bài toán* $(P_{\vec{\varepsilon}})$ *có duy nhất nghiệm yếu* $u = u_{\vec{\varepsilon}}$ *sao cho* $u - g \in W_1(M,T)$ *và* u *thỏa một khai triển tiệm cận đến cấp* $N+1$ *như sau*

$$\|u' - \sum_{|\gamma|\le N} u'_\gamma \vec{\varepsilon}^{\gamma}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_x - \sum_{|\gamma|\le N} u_{\gamma x} \vec{\varepsilon}^{\gamma}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C_T \|\vec{\varepsilon}\|^{N+1},$$

trong đó các hàm u_γ, $|\gamma| \le N$ *là nghiệm yếu tương ứng của các bài toán* $(\tilde{P}_\gamma)$, $|\gamma| \le N$.

Kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trước đây của chúng tôi. Để chứng minh định lí 4.2, chúng tôi đã thiết lập hai bổ đề cần thiết như sau:

Bổ đề 4.3. *Cho* $p_\nu[f]$, $|\nu| \le N$, *là các hàm được xác định bởi công thức* (4.7). *Đặt* $h = \sum_{|\gamma| \le N} u_\gamma \vec{\varepsilon}^{\gamma}$, *khi đó ta có*

$$f[h] \equiv f(x,t,h,h_x,h_t) = \sum_{|\nu| \le N} p_\nu[f]\vec{\varepsilon}^{\nu} + \|\vec{\varepsilon}\|^{N+1} R_N^{(1)}[f,\vec{\varepsilon}],$$

ở đây $\left\| R_N^{(1)}[f,\vec{\varepsilon}] \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C$, *với* C *là hằng số chỉ phụ thuộc vào* N, T, f, m, u_γ, $|\gamma| \le N$.

Bổ đề 4.4. *Cho* (H_1), (H_2), (H_6) *và* (H_7) *thỏa. Đặt*

$$E_{\vec{\varepsilon}}(x,t) = f[h] - f[u_0] + \frac{\partial}{\partial x}\Big([m(h) - m(u_0) + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i m_i(h)] h_x \Big) - \sum_{1 \le |\gamma| \le N} F_\gamma \vec{\varepsilon}^{\gamma}.$$

Khi đó $E_{\vec{\varepsilon}}(x,t)$ *có một đánh giá như sau*

$$\| E_{\vec{\varepsilon}} \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \hat{K}_* \|\vec{\varepsilon}\|^{N+1},$$

với $\hat{K}_*$ *là hằng số chỉ phụ thuộc vào các hằng số* $N, T, f, m, m_i, u_\gamma$, $|\gamma| \le N$, $i = \overline{1,p}$.

Chú thích. Bài toán khai triển tiệm cận theo một tham số bé có thể tìm thấy trong [3, 6, 8, 9, 13, 14, 16] và các tài liệu tham khảo trong đó. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của chúng tôi, chưa có nhiều công trình nghiên cứu về bài toán khai triển tiệm cận theo nhiều tham số bé, một số ít kết quả về vấn đề này có thể tìm thấy trong [10 – 12, 17, 18].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. T. Caughey, J. Ellison (1975), *Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **51**, 1 – 32.

[2]. A.P.N. Định (1983), *Sur un problème hyperbolique faiblement non-linéaire à une dimension,* Demonstratio Math. **16**, 269 – 289.

[3]. A.P.N. Định, N.T. Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one demension*, Demonstratio Math. **19**, 45 – 63.

[4]. F. Ficken, B. Fleishman (1957), *Initial value problems and time periodic solutions for a nonlinear wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **10**, 331 – 356.

[5]. J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problems aux limites non-linéares*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris.

[6]. N.T. Long (2001), *Asymptotic expansion of the solution for nonlinear wave equation with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal., **45**, 261 – 272.].

[7]. N.T. Long, A.P.N. Định (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24,** 1261 – 1279.

[8]. N.T. Long, T.N. Diễm (1997), *On the nonlinear wave equation associated with a mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29**, 1217 – 1230.

[9]. N.T. Long, A.P.N. Định, T.N. Diễm (2002), *Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff – Carrier operator*, J. Math. Anal. Appl. **267** (1), 116 – 134.

[10]. N.T. Long, A.P.N. Định, T.N. Diễm (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, Bound. Value Probl. **2005** (3), 337 – 358.

[11]. N.T. Long, L.X. Trường(2007), *Existence and asymptotic expansion of solutions to a nonlinear wave equation with a memory condition at the boundary*, Electronic J. Differential Equations, No. 48, p. 1 – 19.

[12]. N.T. Long, L.X. Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed homogeneous condition*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **67** (3), 842 – 864.

[13]. N.T. Long, N.C. Tâm, N.T.T. Trúc (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogenous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math. **38** (2), 365 – 386.

[14]. N.T. Long, L.T.P. Ngọc (2007), *On a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation in the unit membrane: The quadratic convergence and asymptotic expansion of solutions*, Demonstratio Math. **40** (2), 365 – 392.

[15]. N.T. Long, L.T.P. Ngọc (2009), *On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations*, Vietnam J. Math. **37** (2 – 3), 141 – 178.

[16]. L.T.P. Ngọc, L.N.K. Hằng, N.T. Long (2009), *On a nonlinear wave equation associated with the boundary conditions involving convolution*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **70** (11), 3943 – 3965.

[17]. L.T.P. Ngọc, L.K. Luận, T.M. Thuyết, N.T. Long (2009), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (11), 5799 – 5819.

[18]. L.T.P. Ngọc, N.A. Triết, N.T. Long, *On a nonlinear wave equation involving the term* $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t,u,\| u_x \|^2)u_x\right)$: *Linear approximation and asymptotic expansion of solution in many small parameters*, Nonlinear Analysis, Series B: Real World Applications (to appear).

[19]. E.L. Ortiz, A.P.N. Định (1987), *Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and the Tau method*, SIAM J. Math. Anal. **18,** 452 – 464.

[20]. P.H. Rabinowitz (1967), *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic differential equations,* Comm. Pure. Appl. Math. **20,** 145 – 205.

[21]. L.X. Trường, L.T.P. Ngọc, N.T. Long (2009), *High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (1 – 2), 467 – 484.

[22]. L.X. Trường, L.T.P. Ngọc, A.P.N. Định, N.T. Long, *The regularity and exponential decay of solution for a linear wave equation associated with two-point boundary conditions*, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications (to appear).

Tóm tắt.

Trong bài báo này, chúng tôi xét phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất. Bằng cách liên kết bài toán với một thuật giải qui nạp tuyến tính đồng thời sử dụng phương pháp Faedo – Galerkin và phương pháp compact, sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán được chứng minh. Hơn nữa, một khai triển tiệm cận cấp cao theo nhiều tham số bé cũng được thiết lập.

Abstract.

On a nonlinear wave equation with mixed non-homogeneous boundary conditions: asymptotic expansion of solutions in accordance with many small parameters

The paper is about the study of a nonlinear wave equation associated with mixed non-homogeneous boundary conditions. By associating the problem with inductive linear method as well as the Faedo – Galerkin and the compact one, existence and uniqueness of the solution are proved. What‘s more, an asymptotic expansion of high order in accordance with many small parameters is also established.