TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 15, Số 1 (2018): 48-59
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
EDUCATION SCIENCE
Vol. 15, No. 1 (2018): 48-59

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

NGHIÊN CỨU SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM THEO CÁCH TIẾP CẬN DIDACTIC

Dương Hữu Tòng[*], Hồ Thị Ánh Như, Bùi Nguyên Phương, Nguyễn Quốc Khánh, Nguyễn Thị Tính, Trần Thị Ngọc Trân, Hoàng Thị Ngọc Hà, Nguyễn Thị Hiếu, Lâm Thị Kim Nhân

Trường Đại học Cần Thơ

Ngày nhận bài: 13-7-2017; ngày nhận bài sửa: 30-7-2017; ngày duyệt đăng: 22-01-2018

TÓM TẮT

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng khái niệm "hợp đồng dạy học" *và tổ chức toán học, được Guy Brousseau trình bày năm 1980 như là một công cụ để phát hiện và nghiên cứu những sai lầm của học sinh – hệ quả của những quan hệ ngầm ẩn giữa các thành phần của hệ thống giảng dạy: giáo viên – tri thức – môi trường – học sinh.*

Nghiên cứu bao gồm phân tích sách giáo khoa "Đại số và Giải tích lớp 11 (Nâng cao)" *và một số kết quả về hợp đồng dạy học liên quan đến dạng toán tính đạo hàm của một hàm số f(x) tại điểm x_0, từ đó chỉ ra sai lầm của học sinh khi thực hiện kiểu nhiệm vụ này.*

Từ khóa: đạo hàm của hàm số, hợp đồng dạy học, sai lầm của học sinh.

ABSTRACT

A study of students' errors in calculating the derivative of functions at a point, based on an approach to Mathematical Didactic

In this paper, we used the concept of "didactic contract" and mathematical organization, presented by Guy Brousseau in 1980, considered as an implement to find out and study students' errors, the corollarries of the implicit relations among the components of the teaching – learning system: teacher – knowledge – environment – student.

The study included textbook analysis of "Algebra and Calculus Grade 11 (Advanced)" and valuable findings on didactic contracts related to calculating the derivative of the function f(x) at point x_0, then indicated the errors students commit when performing this type of task.

Keywords: derivative of the function, didactic contract, students' errors.

1. Hợp đồng dạy học

Năm 1982, G. Brousseau định nghĩa hợp đồng dạy học (Contrat didactique) (HĐDH) như là "tập hợp các quan hệ xác định, thường là ngầm ẩn, có thể phân nhỏ một cách rõ ràng thành những điều khoản mà mỗi bên (giáo viên và học sinh) có trách nhiệm thực hiện những nghĩa vụ bên này đối với bên kia" (dẫn theo Annie B. (2009)).

[*] Email: *dhtong@ctu.edu.vn*

HĐDH nêu ra những quy tắc trong suốt quá trình học tập thể hiện những mong đợi và ứng xử của học sinh (HS) và giáo viên (GV) đối với kiến thức. Nó ngầm ẩn đưa ra những điều mà HS và GV phải làm, vai trò và trách nhiệm của họ với nhau.

2. Tìm kiếm và kiểm chứng giả thuyết về sự tồn tại những quy tắc của HĐDH

Theo tác giả Trần Anh Dũng (2011), tiến trình tìm kiếm và kiểm chứng giả thuyết về HĐDH có thể được trình bày theo các bước sau:

2.1. Thu thập và phân tích thông tin

Thu thập thông tin có thể được tìm hiểu từ nhiều nguồn khác nhau như: sách giáo khoa (SGK), sách giáo viên (SGV), sách bài tập, tập học của HS, giáo án của GV, biên bản dự giờ, ghi âm, thu hình tiết dạy, phỏng vấn HS…

Sau khi thu thập thông tin, nhà nghiên cứu (NNC) tiến hành phân tích chúng, tìm hiểu các kiểu nhiệm vụ nào liên quan đến kiến thức mà họ đang nghiên cứu? Có những quy tắc nào của HĐDH gắn liền với các kiểu nhiệm vụ?…

2.2. Dự đoán sự tồn tại quy tắc của HĐDH

Sau khi thu thập và phân tích thông tin hoàn tất, NNC đưa ra những dự đoán về các quy tắc của HĐDH tồn tại ứng với những kiểu nhiệm vụ nào đó. HĐDH phải bao gồm hai thành phần sau:

- Quy tắc đối với GV: Các quy tắc ngầm ẩn, trách nhiệm, mong đợi của GV khi dạy kiểu nhiệm vụ nào đó.
- Quy tắc về phía HS: Các quy tắc ngầm ẩn, nghĩa vụ của HS khi học kiểu nhiệm vụ nào đó.

2.3. Thiết kế tình huống phá vỡ hợp đồng để kiểm chứng sự tồn tại những quy tắc của HĐDH

Nhằm mục đích kiểm chứng quy tắc của HĐDH mà mình đề xuất có thực sự tồn tại hay không, NNC phải thiết kế tình huống ngắt quãng hợp đồng. Đồng thời họ phải dự đoán xem HS sẽ có những phản hồi, ứng xử như thế đối với tình huống ngắt quãng hợp đồng mà họ đặt ra từ đầu.

Tình huống ngắt quãng hợp đồng sẽ tạo ra sự biến loạn trong hệ thống giảng dạy, sao cho đặt GV và HS trong một tình huống khác lạ.

Để tạo ra tình huống ngắt quãng hợp đồng, NNC có thể tiến hành những cách sau:

- Đối với HS: Thay đổi những điều kiện sử dụng tri thức, đôi khi biến đổi các đặc trưng của tình huống. Hơn nữa, NNC có thể lợi dụng khi HS chưa biết cách vận dụng một số tri thức toán nào đó. Ngoài ra, NNC đặt HS ra ngoài phạm vi của tri thức đang bàn đến hoặc sử dụng những tình huống mà tri thức đó không giải quyết được.
- Đối với GV: Đặt GV trước những ứng xử của HS không phù hợp với những điều GV mong đợi. Chẳng hạn, NNC đưa ra những câu trả lời khác lạ cho một bài toán, yêu cầu nhận xét về các câu trả lời như thế (dẫn theo Annie B. (2009), tr. 341).

2.4. Thực nghiệm

Sau khi NNC hoàn thành các bước trên, họ tiến hành khảo sát trên một tập hợp HS được lựa chọn rồi tiến hành thu thập và phân tích kết quả thực nghiệm. Kết quả phân tích cuối cùng sẽ giúp cho họ trả lời cho câu hỏi về sự tồn tại của HĐDH mà họ đề xuất.

3. Hợp đồng dạy học gắn liền với kiểu nhiệm vụ tính đạo hàm tại một điểm

Những quy tắc của HĐDH chúng tôi đề xuất được nghiên cứu trong hai bài: "Khái niệm đạo hàm" "Các quy tắc tính đạo hàm", trong SGK Đại số và Giải tích 11 (Nâng cao) của tác giả Đoàn Quỳnh (chủ biên, 2009).

3.1. Thu thập và phân tích thông tin

Kiểu nhiệm vụ T₁: Tính đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại một điểm x_0 bằng định nghĩa.

Ví dụ: Xem ví dụ 1 *SGK trang 186.*

Kĩ thuật τ_1:

- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0.
- Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn thì ta kết luận $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ngược lại, ta nói hàm số đã cho không tồn tại đạo hàm tại x_0.

Hoặc dùng kĩ thuật τ_1':

- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn thì kết luận $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại x_0. Ngược lại thì ta kết luận hàm số $y = f\left(x\right)$ không có đạo hàm tại x_0.

Yếu tố công nghệ θ_1: Khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm *(SGK trang 185)*

Kiểu nhiệm vụ T₂: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng các công thức, quy tắc tính đạo hàm.

Ví dụ: Xem H1 *SGK trang 197.*

- Kĩ thuật τ_2: Tính đạo hàm bằng các công thức, quy tắc tính đạo hàm như:
- Đạo hàm của tổng, hiệu, tích hay thương hai hàm số.
- Đạo hàm của hàm số hợp.
- Tính giá trị của một hàm số tại một điểm.
- Yếu tố công nghệ θ_2: Các quy tắc, công thức tính đạo hàm. Giá trị của hàm số.

Bảng 1. *Tổng kết các kiểu nhiệm vụ*

Kiểu nhiệm vụ	Kĩ thuật	Hoạt động	Ví dụ SGK	Bài tập SGK	Tổng
T_1	τ_1, τ_1'	0	1	6	7
T_2	τ_2	3	0	3	6
		Tổng			**13**

Từ việc phân tích các kiểu nhiệm vụ, các dạng bài tập tương ứng với từng kiểu nhiệm vụ, các lời giải trong SGK và SGV Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, chúng tôi rút ra được những nhận xét đáng chú ý như sau:

Các hàm số được cho trong SGK để tính đạo hàm bằng định nghĩa phần lớn đều là những hàm khả vi tại điểm cần tính, hoặc nói cách khác là giới hạn của tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0^+$ hay $\Delta x \to 0^-$ là bằng nhau và ngầm ẩn rằng không cần xét tới hai trường hợp này.

Trong phần chú ý ở SGK trang 191 cũng như trong bài tập 14 SGK trang 195, tác giả muốn HS rút ra rằng "Một hàm số có thể xác định tại x_0, thậm chí liên tục tại x_0 nhưng có thể không có đạo hàm tại x_0". Tuy nhiên, dạng bài tập với các hàm số liên tục tại x_0 nhưng không có đạo hàm tại x_0 quá ít (chỉ có 1 bài), cho nên việc sử dụng giới hạn một bên để chứng minh một hàm số không có đạo hàm tại một điểm không thu hút được sự chú ý của HS.

Trong nhận xét của SGK trang 186 có trình bày tính chất "Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0" và cả cách chứng minh tính chất đó. Tuy nhiên SGK lại không đề cập mệnh đề phản đảo của nó là "Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại x_0 thì không có đạo hàm tại x_0". Bài tập 15 SGK trang 195 cũng hướng cho HS nhận thấy mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm nhưng còn chưa rõ ràng và bị ảnh hưởng bởi đồ thị hàm số hơn là xét tính liên tục bằng định nghĩa.

Phần lớn các bài tập yêu cầu tính đạo hàm của hàm số tại x_0 thì điểm x_0 luôn nằm trong tập xác định của hàm số hoặc trong miền mà hàm số có đạo hàm. Chỉ có duy nhất một bài tập là H5 SGK trang 191 là cho điểm x_0 không nằm trong tập xác định của hàm số ban đầu.

Kể từ bài 2: "Các quy tắc tính đạo hàm" trở đi thì tất cả các hàm số được cho đều có thể tính được bằng quy tắc và không cần sử dụng định nghĩa của đạo hàm để tính.

3.2. Dự đoán HĐDH

Những nhận xét trên cho phép chúng tôi đặt giả thuyết về sự tồn tại ngầm ẩn các quy tắc sau đây của HĐDH gắn liền với các kiểu nhiệm vụ T_1 và T_2:

Quy tắc GV: GV có nhiệm vụ chỉ yêu cầu HS tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 có những đặc trưng sau đây:

- Các hàm số được cho luôn tính được đạo hàm bằng các quy tắc, công thức.
- Điểm x_0 luôn nằm trong tập xác định của hàm số, thậm chí phải là miền mà hàm số có đạo hàm.
- Hàm số đã cho liên tục, khả vi tại điểm cần tính.

Quy tắc HS: Khi gặp dạng bài tập yêu cầu tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, HS ngầm hiểu rằng:

- Nhiệm vụ là tìm cách áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm đã học rồi tính giá trị của đạo hàm tại điểm đó mà không cần phải sử dụng định nghĩa của đạo hàm tại một điểm (nếu bài tập không nói rõ là phải dùng định nghĩa).
- Không có nghĩa vụ kiểm tra xem điểm cần tính có thuộc miền có đạo hàm hay không?
- Không có nghĩa vụ kiểm tra hàm số đã cho có liên tục tại điểm cần tính hay không?

3.3. *Thiết kế tình huống kiểm chứng HĐDH*

Để kiểm chứng quy tắc của HĐDH mà chúng tôi đã dự đoán, HS được yêu cầu giải các bài toán sau:

Bài 1: Tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{x}$ tại điểm $x_0=0$.

Sự ngắt quãng hợp đồng dạy học trong bài toán trên thể hiện ở điểm sau:

Hàm số đã cho có tập xác định là $\left[0\,;+\infty\right)$ nhưng có miền xác định đạo hàm là $\left(0\,;+\infty\right)$ hay nói cách khác là điểm x_0 thuộc tập xác định nhưng không thuộc miền có đạo hàm.

- Các chiến lược gắn liền với Bài 1:

S1: Chiến lược dùng công thức tính đạo hàm.

S1a: Chiến lược dùng công thức tính đạo hàm nhưng không rút gọn, sau đó thế $x_0=0$ vào đạo hàm thấy không tính được hoặc bấm máy tính xuất hiện lỗi.

S1b: Chiến lược dùng công thức tính đạo hàm nhưng không rút gọn kết quả, sau đó thế $x_0=0$ vào đạo hàm ra kết quả bằng 0.

S1c: Chiến lược dùng công thức tính đạo hàm rồi rút gọn kết quả, sau đó thế $x_0=0$ vào đạo hàm ra kết quả bằng 0.

S2a: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của Δx).

S2b: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của x_0).

S3: Chiến lược xác định miền tính được đạo hàm ngay khi tính đạo hàm, từ đó kết luận tính tồn tại giá trị của đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

Bài 2: Tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $f(x) = |x-1|$ tại điểm $x_0 = 1$.

Sự ngắt quãng hợp đồng dạy học trong bài toán trên thể hiện ở các điểm sau:

- Yêu cầu của kiểu nhiệm vụ không đề cập "dùng định nghĩa" để tính đạo hàm tại một điểm.
- Hàm số đã cho không tính được bằng các công thức, quy tắc tính đạo hàm đã học.
- Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$ nhưng không tồn tại đạo hàm tại điểm đó.

• Các chiến lược gắn liền với Bài 2:

S1: Chiến lược bỏ dấu giá trị tuyệt đối rồi dùng công thức tính đạo hàm.

S2: Chiến lược phân tích hàm số ban đầu thành 2 hàm số rồi dùng công thức tính đạo hàm của hàm số xác định trên nửa khoảng có chứa số 1.

S3: Chiến lược phân tích hàm số ban đầu thành 2 hàm số rồi dùng công thức tính đạo hàm của từng hàm số thành phần.

S4: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

S4a: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của Δ*x*).

S4b: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của x_0).

Bài 3: Tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & \text{neu } x \geq 1 \\ 2x^2 & \text{neu } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Sự ngắt quãng hợp đồng dạy học trong bài toán trên thể hiện ở các điểm sau:

- Hàm số đã cho không tính được bằng các công thức, quy tắc tính đạo hàm đã học.
- Đồ thị hàm số đã cho không liên tục tại điểm x_0.

• Các chiến lược gắn liền với Bài 3:

S1a: Chiến lược tìm cách dùng các công thức đạo hàm đã học (tính theo một hàm số).

S1b: Chiến lược tìm cách dùng các công thức đạo hàm đã học (tính theo hai hàm số).

S2: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

S2a: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của Δ*x*).

S2b: Chiến lược dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để tính (tính theo giới hạn một bên của x_0).

S3: Chiến lược dùng tính chất liên tục của hàm số.

S3a: Chiến lược dùng tính chất liên tục của hàm số để kết luận đạo hàm.

S3b: Biến thể của S3a (không kết luận sự gián đoạn).

S3c: Biến thể của S3a (chỉ xét tính liên tục của hàm số tại một điểm).

3.4. Thực nghiệm

Đối tượng nghiên cứu

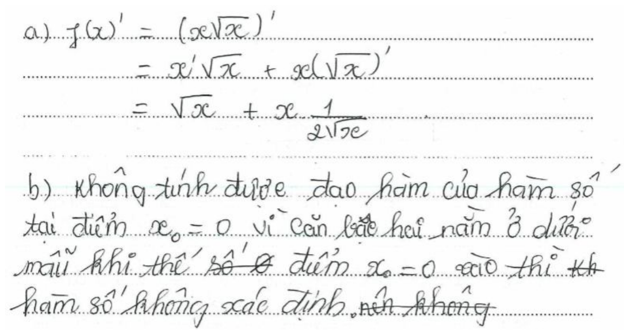
Thực nghiệm được tổ chức cho 115 HS lớp 11 của hai trường THPT: THPT Bình Thủy – Cần Thơ (11B10 và 11B11) và THPT Châu Thành A – Hậu Giang (11A3 và 11A4). Phân tích kết quả thu thập, chúng tôi ghi nhận được như sau:

Kết quả và bình luận

Bảng 2. *Kết quả gắn liền với Bài 1*

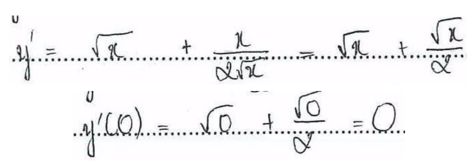
Chiến lược / Số liệu	S1a	S1b	S1c	S2a	S2b	S3	Không trả lời
Tổng số	46	10	32	0	0	0	27
Tỉ lệ	40%	8,7%	27,8%	0%	0%	0%	23,5%

Bảng thống kê cho thấy, có 88/115 HS (76,5%) lựa chọn các chiến lược S1a, S1b và S1c để giải bài toán, trong đó có 40% HS sử dụng chiến lược S1a. Ví dụ như HS1 trình bày như sau:



Hình 1. *Bài làm của HS1*

Bên cạnh đó, có 27,8% HS lựa chọn chiến lược giải S1c, ví dụ trong bài làm của HS43 trình bày như sau:



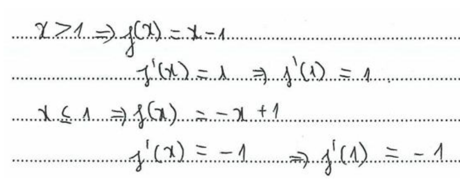
Hình 2. *Bài làm của HS43*

Hơn thế nữa, không có HS nào thực hiện chiến lược S3, tức là nhận ra miền có đạo hàm của hàm số đã cho trước khi thế điểm x_0 vào đạo hàm. Điều này cho thấy HS không kiểm tra sự tồn tại của đạo hàm tại điểm x_0 cho trước hay nói cách khác là HS không quan tâm đến tập xác định của đạo hàm (miền có đạo hàm). Như vậy, chúng tôi kiểm chứng được giả thuyết về sự tồn tại quy tắc của HĐDH "Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có đạo hàm tại điểm đó hay không cũng như không có trách nhiệm xác định miền mà hàm số đã cho có đạo hàm. HS chỉ có nghĩa vụ dùng công thức để tính đạo hàm rồi thế giá trị của x_0 vào đạo hàm tìm được".

Bảng 3. *Kết quả gắn liền với Bài 2*

Chiến lược / **Số liệu**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4a**	**S4b**	**Trả lời đúng ngoài dự đoán**	**Không trả lời**
Tổng số	5	28	39	5	3	1	34
Tỉ lệ	4,3%	24,3%	34%	4,3%	2,6%	0,9%	29,6%

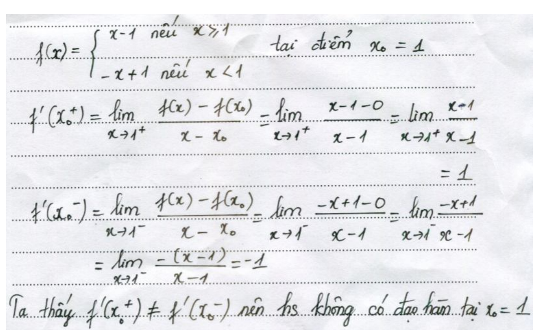
Qua thống kê, chúng tôi thấy có 72/115 HS (62,6%) HS lựa chọn các chiến lược giải S1, S2 và S3. Tức là những HS này dùng mọi cách áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm để tìm kết quả, các em không nghĩ tới việc dùng định nghĩa để tính đạo hàm dù rằng đã được học và thực hành nó nhiều lần. Chẳng hạn, HS87 trình bày như sau:



Hình 3. *Bài làm của HS87*

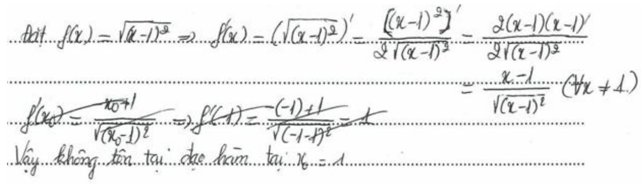
Hơn thế nữa, có 12,2% HS trả lời rằng "không tính được đạo hàm vì có dấu giá trị tuyệt đối" hay "đạo hàm không tính được giá trị tuyệt đối" (chiến lược S5). Điều này đồng nghĩa với việc các em cho rằng chỉ những hàm số có trong công thức tính đạo hàm mới tính được đạo hàm, ngoài ra là không tính được. Các em hoàn toàn không nhận thức được tầm quan trọng của việc tính đạo hàm bằng định nghĩa so với tính đạo hàm bằng công thức.

Trong khi đó, chỉ có 8/115 HS (6,9%) nghĩ tới việc dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm để giải bài toán (chiến lược S4a và S4b). Ví dụ như HS23 trình bày như sau:



Hình 4. *Bài làm của HS23*

Đáng lưu ý là có 1 HS có câu trả lời đúng ngoài tiên nghiệm của chúng tôi, cụ thể là HS92 giải bài trên như sau:



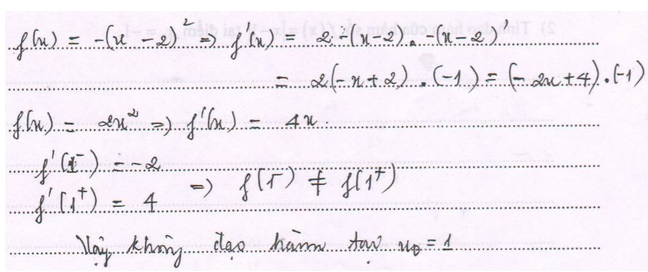
Hình 5. *Bài làm của HS92*

Từ đó, thấy phần lớn HS được khảo sát đều ưu tiên dùng các công thức, quy tắc tính đạo hàm để giải, thậm chí là hàm số ban đầu hoàn toàn không có trong bảng **Đạo hàm của một số hàm số thường gặp** *(SGK trang 203)*. Như vậy, chúng tôi kiểm chứng được giả thuyết về sự tồn tại quy tắc của HĐDH "Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, HS có nhiệm vụ là tìm cách áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm đã học rồi tính giá trị của đạo hàm tại điểm đó mà không cần phải sử dụng định nghĩa của đạo hàm tại một điểm (nếu bài tập không nói rõ là phải dùng định nghĩa).

Bảng 4. *Kết quả gắn liền với bài 3*

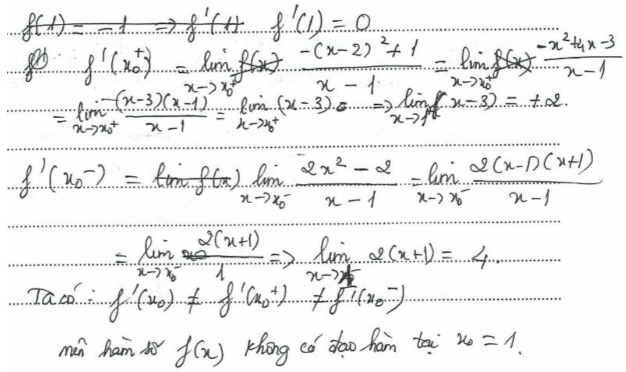
Chiến lược / Số liệu	S1a	S1b	S2a	S2b	S3a	S3b	S3c	Không trả lời
Tổng số	19	36	0	12	1	8	14	25
Tỉ lệ	16,5%	31,3%	0%	10,4%	0,9%	7%	12,2%	21,7%

Từ những số liệu thống kê, chúng tôi thấy có tới 55/115 HS (47,8%) vẫn tìm cách áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm để đưa ra câu trả lời. Ví dụ như HS41 trình bày như sau:



Hình 6. *Bài làm của HS41*

Điều này một lần nữa khẳng định lại rằng nhiều HS vẫn ưu tiên lựa chọn chiến lược dùng các công thức, quy tắc tính đạo hàm để áp dụng vào những dạng toán không quen thuộc hơn là sử dụng định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm. HS ngầm cho rằng sau khi đã học xong bài *Các quy tắc tính đạo hàm* thì các em chỉ có nghĩa vụ dùng các công thức, quy tắc đó để tính đạo hàm mà không còn cần quan tâm tới cách tính đạo hàm bằng định nghĩa nữa. Tuy nhiên, vẫn có 10,4% HS lựa chọn chiến lược giải S2b; ví dụ như HS45 trình bày như sau:


$f(1) = -1 \Rightarrow f'(1)$ $f'(1) = 0$

$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \frac{-(x-2)^2+1}{x-1} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{-x^2+4x-3}{x-1}$

$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{-(x-3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to x_0^+} -(x-3) \Rightarrow \lim_{x \to 1} -(x-3) = +2.$

$f'(x_0^-) = \lim f(x) \lim_{x \to x_0^-} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{2(x+1)}{1} \Rightarrow \lim_{x \to 1} 2(x+1) = 4.$

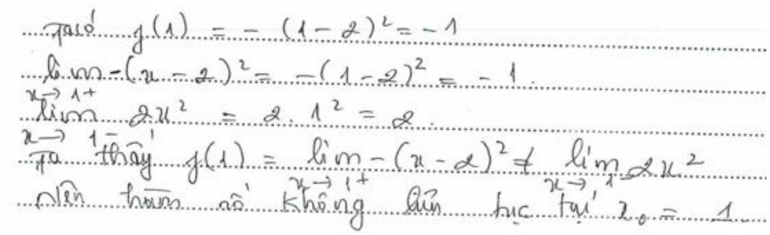
Ta có: $f'(x_0) \neq f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$

nên hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Hình 7. *Bài làm của HS45*

Điều đáng lưu ý ở đây là các HS này sử dụng khái niệm "Đạo hàm một bên", đây là nội dung được trình bày trong phần đọc thêm SGK trang 193. Ở đây, chúng tôi suy đoán rằng có thể trên lớp GV đã đề cập khái niệm này cho HS.

Chúng ta thấy rằng có 23/115 HS (20,1%) lựa chọn các chiến lược giải S3a, S3b và S3c, tuy nhiên, lại có đến 12,2% HS giải theo chiến lược S3c. Khi phỏng vấn các HS này thì các em đều trả lời rằng lý do họ giải theo chiến lược S3c là nhìn dạng hàm số đã cho rất giống với dạng hàm số trong kiểu nhiệm vụ ***"Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm"*** nên các em cứ xét tính liên tục tại x_0 rồi kết thúc. Tức là HS giải theo chiến lược này chỉ vì có sự tương đồng với một kiểu nhiệm vụ khác chứ không phải do HS nhận ra mối liên hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số tại một điểm. Điều này lại càng cho thấy sự nhận thức của HS về mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số thực sự mờ nhạt. Thậm chí các em sau khi xét được hàm số đó gián đoạn tại $x_0 = 1$ nhưng lại "không dám" kết luận rằng hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$, ví dụ như HS58 trình bày như sau:


Ta có $f(1) = -(1-2)^2 = -1$

$\lim_{x \to 1^+} -(x-2)^2 = -(1-2)^2 = -1.$

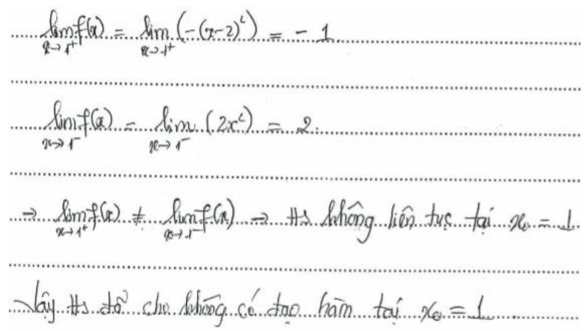
$\lim_{x \to 1^-} 2x^2 = 2.1^2 = 2.$

Ta thấy $f(1) = \lim_{x \to 1^+} -(x-2)^2 \neq \lim_{x \to 1^-} 2x^2$

nên hàm số không liên tục tại $x_0 = 1$.

Hình 8. *Bài làm của HS58*

Chỉ có duy nhất 1 HS nhận ra được mối liên hệ này và đưa ra được lời giải chính xác.



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-(x-2)^2\right) = -1$

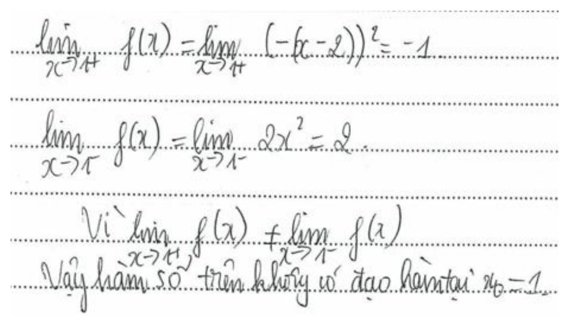
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2x^2\right) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$ HS không liên tục tại $x_0 = 1$

Vậy HS đã cho không có đạo hàm tại $x_0 = 1$

Hình 9. *Bài làm của HS115*

Cũng cần nói thêm là có 7% HS lựa chọn chiến lược giải S3b, tức là sau khi tính các giới hạn một bên của hàm số đã cho thì các em kết luận luôn hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x_0 = 1$ mà không kết luận gì về tính liên tục. Ví dụ như HS109 trình bày như sau:



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-(x-2)\right)^2 = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$

Vì $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

Vậy hàm số trên không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Hình 10. *Bài làm của HS109*

Sau khi phỏng vấn các em này thì thấy được rằng một số em sử dụng suy luận tương tự từ tính chất giới hạn của hàm số tại một điểm (*SGK trang 156*), trong khi đó các em khác suy luận tương tự từ tính liên tục của hàm số để kết luận bài toán. Nhưng khi hỏi tại sao không kết luận gì về tính liên tục trước khi kết luận sự tồn tại đạo hàm thì các em đều trả lời rằng "Em không dám chắc chúng có liên quan với nhau". Điều này một lần nữa chứng minh cho những nhận định của chúng tôi ở trên.

Từ tất cả những phân tích trên, chúng tôi kiểm chứng được giả thuyết về sự tồn tại quy tắc của HĐDH "Khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, HS không có nghĩa vụ kiểm tra tính liên tục của hàm số tại điểm cần tính". Bên cạnh đó, chúng tôi còn thấy được rằng việc làm cho HS nhận thức được mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số tại một điểm cần được GV chú trọng vấn đề này khi dạy đạo hàm của hàm số.

4. Kết luận

Một số kết luận rút ra từ thực nghiệm:

Tập xác định của "hàm số đạo hàm" hay là miền mà hàm số có đạo hàm không được HS coi trọng. Các em chỉ có nhiệm vụ là tính đạo hàm mà không cần quan tâm đến miền mà hàm số tồn tại đạo hàm. Điều này dẫn đến những sai lầm khi tính toán đạo hàm cũng như ảnh hưởng đến tính chính xác khi xét tính đơn điệu của hàm số trong chương trình toán lớp 12.

Định nghĩa đạo hàm của hàm số (tại một điểm) có vai trò rất mờ nhạt đối với HS. Khi gặp một tình huống nào đó dù quen thuộc hay lạ lẫm, phần lớn HS đều nghĩ ngay tới dùng công thức để tính đạo hàm và tìm mọi cách để áp dụng những công thức đó, còn nếu không áp dụng được thì kết luận rằng không tính được đạo hàm chứ không nghĩ tới sẽ dùng định nghĩa đạo hàm của hàm số (tại một điểm).

HS còn rất mơ hồ trong việc nhận thức mối quan hệ giữa tính liên tục của hàm số và đạo hàm của hàm số tại một điểm. Mặc dù về mặt ý nghĩa đại số hay ý nghĩa hình học thì mối quan hệ này cũng đóng vai trò rất quan trọng.

Như vậy, thông qua công cụ hợp đồng dạy học, chúng tôi đã phát hiện ra một số sai lầm của HS khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm, thấy được sự ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế lên quan niệm của HS.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Annie B., Claude C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*, NXB Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

Trần Anh Dũng. (2011). "Hợp đồng dạy học" – Một công cụ để nghiên cứu những sai lầm của học sinh. *Tạp chí khoa học ĐHSP TP HCM,* (25), 78-87.

Nguyễn Phú Lộc, Bùi Phương Uyên. (2015). *Giáo trình các xu hướng dạy học toán,* NXB Đại học Cần Thơ.

Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng. (2009). *Đại số và Giải tích 11 (Nâng cao).* Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.

Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng. (2009). *Đại số và Giải tích 11 – Sách giáo viên (Nâng cao).* Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.