TÍNH CHẤT ACYCLIC CỦA TẬP NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TRONG KHÔNG GIAN FRÉCHET

LÊ HOÀN HÓA [*], ĐỖ HOÀI VŨ [**]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xét tính chất Acyclic của tập nghiệm phương trình tích phân dưới đây:

$$x(t) = \phi(t) + v(t, x(\theta(t))) + \int_0^t F(t,s,x(\theta_1(s)))ds + \int_0^t K(t,s)g(s,x(\theta_2(s)))ds,\ t \in R_+ \quad (2).$$

Trong đó: $R_+ = [0,+\infty)$; $(E, |.|)$ *là không gian Banach thực;* $\theta, \theta_1, \theta_2 : R_+ \to R_+$; $\phi : R_+ \to E$; $K : [0,\infty)^2 \to L(E,E)$; $v, g : R_+ \times E \to E$; $F : R_+^2 \times E \to E$; *L(E,E) là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ E vào E, với các giả thiết của các hàm F, g, K được mở rộng (nhẹ) hơn bài báo [2].*

Trong bài báo này, chúng tôi xét tính chất Acyclic của tập nghiệm phương trình tích phân dưới đây:

X(t) = $\phi(t)+v(t,x(\theta(t)))+$

ABSTRACT

The Acyclic property of the solution set of integral equation in fréchet space

In this paper we consider the **Acyclic** property of solution set to the following intergral equation

$$x(t) = \phi(t) + v(t, x(\theta(t))) + \int_0^t F(t,s,x(\theta_1(s)))ds + \int_0^t K(t,s)g(s,x(\theta_2(s)))ds,\ t \in R_+ \quad (2)$$

Here $R_+ = [0,+\infty)$; $(E, |.|)$ real space Banach; $\theta, \theta_1, \theta_2 : R_+ \to R_+$; $\phi : R_+ \to E$; $K : [0,\infty)^2 \to L(E,E)$;

[*] PGS TS, Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Sư phạm TP HCM
[**] ThS, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp TP HCM

$v,g: R_+ \times E \to E$; $F: R_+^2 \times E \to E$. E is a real Banach space with norm |.| and L(E,E) is the Banach space of continuous linear operators with domain E and range in E, with the hypothesis of the functions F, K, g that satisfy the conditions which are more general than that in the article [2] .

1. Giới thiệu

Khi khảo sát một phương trình vi phân (hoặc tích phân) nói chung, bên cạnh việc chứng minh phương trình tồn tại nghiệm thì sự xem xét về cấu trúc của tập nghiệm cũng được chú ý (trong trường hợp phương trình có nhiều nghiệm).

Năm 1890 Peano khi nghiên cứu bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \; t \in [0,a] \subset R; \qquad (1)$$

với $g:[0,a]\times R^n \to R^n$ là hàm liên tục đã chứng minh được trong trường hợp n=1 tập nghiệm S của phương trình (1) là liên thông, compact (xét topo trên đường thẳng thực) với t thuộc lân cận t_0. Kết quả này còn được mở rộng bởi Kneser (1923) khi xét n là số tự nhiên tùy ý (khác không) và Hukuhara (1928) khi thay R^n bằng không gian Banach thực.

Năm 1942, N. Aronszajn đã chứng minh được tập nghiệm S của (1) đồng phôi với dãy giảm các không gian compact co rút (compact contractible). Điều này suy ra được S compact, liên thông và không những thế, mặc dù S không đơn trị nhưng đứng trên quan niệm topo đại số, S sẽ tương đương với không gian điểm (theo nghĩa nhóm đồng đều của S trùng với nhóm đồng đều của không gian điểm). Tập S có tính chất như trên gọi là tập Acyclic và được kí hiệu là R_δ.

Trong bài báo này, chúng tôi xét tính chất Acyclic của tập nghiệm phương trình tích phân dưới đây:

$$x(t) = \phi(t) + v(t, x(\theta(t))) + \int_0^t F(t,s,x(\theta_1(s)))ds + \int_0^t K(t,s)g(s,x(\theta_2(s)))ds, \; t \in R_+ \qquad (2).$$

Trong đó: $R_+ = [0,+\infty)$; $(E,|.|)$ là không gian Banach thực; $\theta, \theta_1, \theta_2 : R_+ \to R_+$; $\phi: R_+ \to E$; $K:[0,\infty)^2 \to L(E,E)$; $v,g: R_+ \times E \to E$; $F: R_+^2 \times E \to E$; L(E,E) là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ E vào E.

Chú ý: Cấu trúc (compact, liên thông) tập nghiệm của phương trình dạng (2) đã được khảo sát trong một số bài báo gần đây (xem [2]), trong đó giả thiết các hàm tham gia trong (2) đều liên tục (cùng thêm nhiều giả thiết khác). Trong bài báo này, chúng tôi xét tính chất Acyclic của tập nghiệm của (2) với giả thiết các hàm F, g là hàm Carathéodory.

Kết quả chính của bài báo được trình bày trong định lý 3.1, để chứng minh định lý này chúng tôi sử dụng các định lý dưới đây (trong đó định lý 2.1 là cơ bản).

2. Các định nghĩa và định lý sử dụng trong bài báo

***Định lý 2.1*[3]**

Xét K là tập con lồi không bị chặn của R, $K_\varepsilon = \{t \in K; |t - t_0| \le \varepsilon\}$, *E là không gian Banach và C là không gian Fréchet của các hàm liên tục bị chặn địa phương* $f : K \to E$ *với topo hội tụ đều địa phương. Giả sử rằng* $T : C \to C$ *là ánh xạ liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Tồn tại $t_0 \in K$ *và* $x_0 \in C$ *sao cho* $T(x)(t_0) = x_0$ *với mọi* $x \in C$,

(ii) Tập T(C) liên tục đồng bậc địa phương,

(iii) Với mọi $\varepsilon > 0$ *nếu* $x|_{K_\varepsilon} = y|_{K_\varepsilon}$ *thì* $T(x)|_{K_\varepsilon} = T(y)|_{K_\varepsilon}$ *với mọi* $x, y \in C$,

(iv) Mọi dãy $(x_n)_{n\in N}, x_n \in C$, *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = 0$ *có giới hạn điểm.*

Khi đó tập các điểm cố định của T là Acyclic.

Chú ý: Nếu T là ánh xạ compact thì các điều kiện (ii) và (iv) luôn thỏa.

***Giả thiết 2.2* (**Giả thiết (A) [1]**)**

Cho X là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương, P là họ tách các nửa chuẩn trên X. Đặt D là tập con của X và $U : D \to X$. *Với mỗi* $a \in X$, *định nghĩa* $U_a : D \to X$ *bằng* $U_a(x) = U(x) + a$.

Toán tử U gọi là thỏa giả thiết (A) trên tập con Ω *của X nếu:*

(A.1) Với mọi $a \in \Omega,\ U_a(D) \subset D$,

(A.2) Với mọi $a \in \Omega,\ p \in P$ *tồn tại* $k_a \in Z_+$ *có tính chất*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in N, \delta > 0 :\ \alpha_a^p(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha_a^p(U_a^r(x), U_a^r(y)) < \varepsilon,$$

trong đó

$$\alpha_a^p(x,y) = \max\left\{ p\left(U_a^i(x) - U_a^j(y)\right), i, j = 0,1,2,...,k_a \right\},$$

$$N = \{1,2,3,...\}, Z+ = N \cup \{0\}.$$

***Định lý 2.3* [1]**

Cho X là không gian đầy đủ theo dãy, lồi địa phương với họ tách các nửa chuẩn P. U, C là các toán tử trên X sao cho:

(i) U thỏa giả thiết (A),

(ii) Với p tùy ý thuộc P tồn tại k > 0 (độc lập với p) sao cho:

$$p(U(x) - U(y)) \le kp(x - y),\ \forall x, y \in X,$$

(iii) Tồn tại $x_0 \in X$ *có tính chất: Với p tuỳ ý thuộc P, tồn tại* $r \in N$, $\lambda \in [0,1)$ *(* r, λ *phụ thuộc vào p) sao cho:*

$$p(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)) \le \lambda p(x-y),$$

(iv) C hoàn toàn liên tục và $p(C(A)) < \infty$ *khi* $p(A) < \infty, A \subset X$,

(v) $\lim\limits_{p(x)\to\infty} \dfrac{p(C(x))}{p(x)} = 0, \quad \forall x \in X$.

Khi đó U + C có điểm cố định .

Chú ý: Nếu các giả thiết của định lý 2.3 thỏa thì trong chứng minh của định lý này ta có ánh xạ $(I-U)^{-1}C$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục trên X và tồn tại tập D lồi, đóng và bị chặn (chứa phần tử 0) trong X sao cho $(I-U)^{-1}C(D) \subset D$.

Đặt (Ω, Σ, μ) là không gian độ đo với $\Omega = [0,a], a \in R_+$, μ là độ đo Lebesgue.

Định nghĩa 2.4 **[4]:**

$L^p(\Omega; E)$ *là không gian các lớp các hàm tương tương đo được (mạnh)* $f : \Omega \to E$ *sao cho* $|f| \in L^p(\Omega)$ *với* $p \in [1, +\infty)$.

Ghi chú: $L^p(\Omega; E)$ là không gian Banach với chuẩn $\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ và trong trường hợp E = R_+ chúng tôi dùng kí hiệu $L^p(\Omega)$ thay cho $L^p(\Omega; E)$.

Định nghĩa 2.5 **[4]:**

Xét (Ω, Σ, μ) *là một không gian độ đo. Hàm* $g : \Omega \times E \to E$ *gọi là hàm Carathéodory nếu thỏa các điều kiện*

(i) Với mọi $x \in E$ *hàm* $t \to g(t,x)$ *đo được,*

(ii) Với mọi $t \in \Omega$ *hàm* $x \to g(t,x)$ *liên tục.*

Định nghĩa 2.6 **[5]:**

Hàm $g : \Omega \times E \to E$ *gọi là hàm* L^P*- Carathéodory (* $p \in (1,\infty)$*) nếu g là hàm Carathéodory và thỏa thêm điều kiện: Với mỗi hằng số C dương tồn tại hàm không âm* $h_C \in L^p(\Omega)$ *và tập compact* $K_C \subset E$ *sao cho* $|x| \le C \Rightarrow g(t,x) \in h_C(t) K_C$ *với hầu hết* $t \in \Omega$.

3. Kết quả chính

Đặt $X_0 = C\left(\left[0,\infty\right);E\right)$ là không gian gồm tất cả các hàm liên tục từ $\left[0,+\infty\right)$ vào E. Với mỗi số tự nhiên $n \in N$, trên X_0 xét họ nửa chuẩn $p_n(x) = \sup_{t\in[0,n]} \left\{ \left|x(t)\right| \right\}$, ta có X_0 là không gian Fréchet với metric $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$.

Đặt $X_n = C\left(\left[0,n\right];E\right)$ là không gian của tất cả các hàm liên tục từ [0,n] vào E. Ta có X_n không gian Banach với chuẩn $\left\|x\right\|_n = \sup_{t\in[0,n]} \left\{\left|x(t)\right|\right\}$.

Xét phương trình (2) với các giả thiết sau:

V2.1 $\theta, \theta_1, \theta_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ là các hàm liên tục thỏa điều kiện

$\theta(t) \le t$, $\theta_1(t) \le t$, $\theta_2(t) \le t; \forall t \in [0,+\infty)$.

V2.2 $v: R_+ \times E \to E$ là hàm liên tục sao cho các điều kiện sau thỏa:

(i) Tồn tại hàm $l: R_+ \to R_+$ sao cho $l(t) \le \dfrac{t}{n+1}$ với mỗi $t \in [0,n]$,

(ii) Với mỗi hằng số C > 0 nếu $\left|x\right| \le C$ thì $v(0,x) = 0$,

(iii) $\left|v(t,x) - v(t,y)\right| \le l(t)\left|x-y\right|$.

V2.3 $F: R_+ \times R_+ \times E \to E$ thỏa các điều kiện sau :

(i) Với mỗi $t \in R_+$ cố định $F_t(s,x) = F(t,s,x)$ là hàm Carathéodory trên [0,t],

(ii) Tồn tại các hàm $h,k: [0,\infty) \to [0,+\infty)$ sao cho h là hàm liên tục, $k \in L^1([0,\infty))$ và $\left|F(t,s,x) - F(t,s,y)\right| \le h(s)k(t)\left|x-y\right|$.

V2.4 $g: R_+ \times E \to E$ thỏa các điều kiện sau:

(i) Với mỗi số thực t hàm g là hàm L^P- Carathéodory trên $[0,t] \times E$,

(ii) $\lim_{|x|\to\infty} \dfrac{\left|g(t,x)\right|}{\left|x\right|} = 0$ đều theo biến t trên mỗi tập con bị chặn của R_+

V2.5 $K: R_+ \times R_+ \to L(E,E)$ sao cho với mỗi số thực t các điều dưới đây thỏa:

(i) $\left\| \left\| K_t - K_{t'} \right\|_{L(E,E)} \right\|_{L^q([0,n])} \to 0$ đều khi $t \to t'$ với $q = \dfrac{p-1}{p}$,

(ii) Họ $t \mapsto \|K(t,s)\|^q_{L(E,E)}$ thỏa điều kiện:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \Omega \subset R,\ \mu(\Omega) < \delta,\ \forall s \Rightarrow \int_\Omega \|K(t,s)\|^q_{L(E,E)}\, d\mu < \varepsilon$$

Định lý 3.1

Nếu các giả thiết V2.1- V2.5 thỏa thì tập nghiệm của phương trình (2) là Acyclic.

Để chứng minh định lý trước hết chúng tôi chứng minh các bổ đề sau :

Đặt $K(t) = \int_0^t k(s)\,ds$, $H = \sup_{t\in[0,n]} \{ |h(t)| \}, L = \sup_{t\in[0,n]} \{ |l(t)| \}$ ta có L< 1.

Trên X_n xét chuẩn $\|x\|_N = \sup_{t\in[0,n]} \{ e^{-NK(t)} |x(t)| \}$, với N là hằng số được chọn sao cho $N > \dfrac{H}{1-L}$, ta có chuẩn $\|x\|_N$ tương đương với chuẩn $\|x\|_n$.

Đặt

$$U(x)(t) = \phi(t) + v(t, x(t)) + \int_0^t F(t,s,x(\theta_1(s)))ds,\ U_z(x)(t) = z(t) + U(x)(t).$$

Bổ đề 1

Nếu các giả thiết V2.1, V2.2, V2.3 thỏa thì U_z là ánh xạ co trên $\left(X_n, \|x\|_N\right)$.

Chứng minh:

$$\left|U_z(x)(t) - U_z(y)(t)\right| = \left|v(t,x(t)) - v(t,y(t)) + \int_0^t F(t,s,x(\theta_1(s)))ds - \int_0^t F(t,s,y(\theta_1(s)))ds\right| .$$

$$\le l(t)\left|x(t) - y(t)\right| + \int_0^t k(s)h(s)\left|x(\theta_1(s))) - y(\theta_1(s))\right| ds$$

Tương đương

$$e^{-NK(t)}\left|U_z(x)(t) - U_z(y)(t)\right| \le e^{-NK(t)} l(t)\left|x(t) - y(t)\right| +$$

$$+ e^{-NK(t)} \int_0^t k(s)h(s)e^{NK(\theta_1(s))} e^{-NK(\theta_1(s))} \left|x(\theta_1(s))) - y(\theta_1(s))\right| ds.$$

$$\le L\|x-y\|_N + \frac{H}{N}e^{-NK(t)}\int_0^t \left(\frac{de^{NK(s)}}{ds}\right)\|x-y\|_N\, ds$$

$$=\left(L+\frac{H}{N}\right)\|x-y\|_N,\ \forall t\in[0,n].$$

Vậy $\|U_z(x)-U_z(y)\|_N \le \left(L+\frac{H}{N}\right)\|x-y\|_N$.

Vì $N > \dfrac{H}{1-L}$ nên suy ra $L+\dfrac{H}{N}<1$ do đó U_z là ánh xạ co.

Bổ đề 2

Nếu giả thiết V2.4i và V2.5 thỏa thì

$$C(x)(t)=\int_0^t K(t,s)g(s,x(\theta_2(s)))ds$$

là một toán tử hoàn toàn liên tục trên $\left(X_n,\|.\|_N\right)$.

Chứng minh:

Giả sử Δ là một tập bị chặn trong X_n. Khi đó $A=\{x(\theta_2(s)) : x\in\Delta, s\in[0,n]\}$ là một tập bị chặn trong E, điều này suy ra tồn tại hằng số C sao cho $|x(\theta_2(s))|\le C$ với mọi $x(\theta_2(s))\in A$. Do g là hàm L^p-Carathéodory nên tồn tại hàm không âm $h_C\in L^p(\Omega)$ và tập compact $K_C\subset E$ sao cho $g(s,x(\theta_2(s)))\in h_C(s)K_C$, với hầu hết $s\in[0,n]$; điều này suy ra được tồn tại hằng số dương G sao cho $|g(s,x(\theta_2(s)))|\le Gh_C(s)$, với hầu hết $s\in[0,n]$.

1) *Chứng minh $C(\Delta)$ liên tục đồng bậc*

Với mọi $t, t'\in[0,n]$: $|t-t'|<\delta$, đặt $t_0=\max\{t,t'\}$ khi đó với mọi $x\in\Delta$ ta có:

$$|C(x)(t)-C(x)(t')| = \left|\int_0^t K(t,s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds - \int_0^{t'} K(t',s)\big(g(s,x(\theta_2(s)))\big)ds\right|$$

$$\le \int_0^t \left|\big(K(t,s)-K(t',s)\big)g(s,x(\theta_2(s)))\right|ds + \int_{t'}^t \left|K(t',s)g(s,x(\theta_2(s)))\right|ds$$

$$\leq\left(\int_0^n |g(s,x(\theta_2(s)))|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^{t_0}\|K(t,s)-K(t',s)\|^q_{L(E,E)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{t'}^{t}\|K(t',s)\|^q_{L(E,E)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq G\left(\int_0^n h_C^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^{t_0}\|K(t,s)-K(t',s)\|^q_{L(E,E)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{t'}^{t}\|K(t',s)\|^q_{L(E,E)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Do giả thiết V2.5 suy ra $C(\Delta)$ liên tục đồng bậc.

2) *Chứng minh C liên tục*

Xét dãy $\{x_m\}_m$ trong X_n sao cho $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$. Đặt $A=\{x_m(s): s\in[0,n], m\in N^*\}$ thì A là tập compac (xem [1]), điều này suy ra được A là tập bị chặn trong E.

Đặt $\rho_m(s) = |g(s,x_m(\theta_2(s))) - g(s,x_0(\theta_2(s)))|$ ta có:

$\rho_m(s)\to 0$ và $|\rho_m(s)|\leq 2Gh_C(s)$ với hầu hết $s\in[0,n]$.

Đặt $K=\sup\limits_{t\in[0,n]}\left\{\left\|\|K(t,s)\|_{L(E,E)}\right\|_{L^q([0,n])}\right\}$ ta có:

$$|C(x_m)(t)-C(x_0)(t)| = \left|\int_0^t [K(t,s)g(s,x_m(\theta_2(s))) - K(t,s)g(s,x_0(\theta_2(s)))]ds\right|$$

$$\leq \int_0^t \|K(t,s)\|_{L(E,E)}|g(s,x_m(\theta_2(s)))-g(s,x_0(\theta_2(s)))|ds$$

$$\leq K\left(\int_0^n |g(s,x_m(\theta_2(s)))-g(s,x_0(\theta_2(s)))|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq K\left(\int_0^n |\rho_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall t\in[0,n].$$

Suy ra $\left\|C(x_m)-C(x_0)\right\|_n \le K\left(\int_0^n \left|\rho_m(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$.

Theo giả thiết V2.5 suy ra K hữu hạn, từ đó theo định lý hội tụ, bị chặn Lebesgue và sự liên tục đồng bậc của $C(\Delta)$ suy ra sự liên tục của C.

3) *Chứng minh* $C(\Delta)(t), \forall t \in [0,n]$ *là tập compact trong E*

Đặt $b^* \in E^*$ sao cho K_C nằm trong nửa không gian $b^* \le r$ nghĩa là

$$b \in K_C \Rightarrow b^*(b) \le r.$$

Như vậy với mỗi $x \in \Delta$ và hầu hết $s \in [0,n]$ ta có

$$b^*\left(g(s,x(\theta_2(s)))\right) \le h_C(t)r.$$

Xét trường hợp $\int_0^t h_C(s)ds > 0$, theo tính chất của tích phân Bochner suy ra

$$b^*\left(\frac{\int_0^t g(s,x(\theta_2(s)))ds}{\int_0^t h_C(s)ds}\right) = \frac{\int_0^t b^*\left(g(s,x(\theta_2(s)))\right)ds}{\int_0^t h_C(s)ds} \le \frac{r\int_0^t h_C(s)ds}{\int_0^t h_C(s)ds} = r.$$

Vì giao của tất cả các nửa không gian đóng chứa K_C là bao lồi đóng nên ta được

$$\int_0^t g(s,x(\theta_2(s))) \in \left(\int_0^t h_C(s)ds\right)\overline{co}(K_C),$$

Do đó

$$\int_0^t K(t,s)g(s,x(\theta_2(s))) \in \left(\int_0^t h_C(s)ds\right)\left(\overline{co}(K(t,s)(K_C))\right) \equiv K_1.$$

Vậy

$$C(\Delta)(t) \subset \left(\int_0^t h_C(s)ds\right)\overline{co}(K(t,s)(K_C)) \equiv K_1, \forall t \in [0,n].$$

Xét trường hợp $\int_0^t h_C(s)ds = 0$ khi đó ta có h = 0 với hầu hết $t \in [0,n]$ vì vậy $g(s, x(\theta_2(s))) = 0$ với hầu hết $t \in [0,n]$, do đó dễ dàng suy ra được $C(\Delta)(t) \subset K_1, \forall t \in [0,n]$.

Vì K_C là tập compact và $K(t,s)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào E nên ta có K_1 là tập compact trong E, từ đó kết luận được $C(\Delta)(t), \forall t \in [0,n]$ là tập compact trong E.

Từ các chứng minh 1), 2), 3) và theo kết quả của Ambrosetti, kết luận C là toán tử hoàn toàn liên tục trên $\left(X_n, \|.\|_n\right)$ và do đó cũng hoàn toàn liên tục trên $\left(X_n, \|.\|_N\right)$.

Bổ đề 3

Nếu giả thiết V2.4ii thỏa thì $\lim\limits_{\|x\|_N \to \infty} \dfrac{\|C(x)\|_N}{\|x\|_N} = 0$.

Chứng minh:

Ta có $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\dfrac{|g(s,x)|}{|x|} < \dfrac{\varepsilon}{2Kn}$ với mọi x thỏa $|x| \geq \delta$ và $s \in [0,n]$.

Khi $|x| \leq \delta$ vì g là hàm L^p- Carathéodory nên tồn tại hằng số G > 0 sao cho $|g(s,x)| \leq G h_C(s)$ với hầu hết $s \in [0,n]$. Đặt $H = G\left(\int_0^n h_C^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}$ ta có H hữu hạn.

Chọn $\delta_1 : \dfrac{1}{\delta_1} < \dfrac{\varepsilon}{2HK}$ khi đó với mọi $x \in X_n$ với $\|x\|_n \geq \delta_1$, đặt

$$I_1 = \left\{ s \in [0,n] : |x(\theta_2(s))| \leq \delta \right\}, I_2 = [0,n] \setminus I_1$$

Ta có:

$$\frac{|C(x)(t)|}{\|x\|_n} = \frac{1}{\|x\|_n} \left| \int_0^t K(t,s)\left(g(s, x(\theta_2(s)))\right) ds \right|$$

$$\le \frac{K}{\|x\|_n}\left(\int_0^n |g(s,x(\theta_2(s)))|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{K}{\|x\|_n}\left[\left(\int_{I_1} |g(s,x(\theta_2(s)))|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{I_2} \frac{|g(s,x(\theta_2(s)))|^p\,|x(\theta_2(s))|^p}{|x(\theta_2(s))|^p}\, ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\le \frac{K}{\|x\|_n}\left(\int_{I_1} |g(s,x(\theta_2(s)))|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} + K\left(\int_{I_2} \frac{|g(s,x(\theta_2(s)))|^p}{|x(\theta_2(s))|^p}\frac{|x(\theta_2(s))|^p}{\|x\|_n^p}\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{KH}{\|x\|_n} + \frac{\varepsilon n}{2n} \le \frac{KH}{\delta_1} + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon KH}{2KH} + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall t \in [0,n].$$

Suy ra $\frac{\|C(x)\|_n}{\|x\|_n} \le \varepsilon, \forall x \in X_n$ hay $\lim\limits_{\|x\|_n \to \infty} \frac{\|C(x)\|_n}{\|x\|_n} = 0, \forall x \in X_n$.

Do $\|.\|_n$ tương đương với $\|.\|_N$ nên ta suy ra được $\lim\limits_{\|x\|_N \to \infty} \frac{\|C(x)\|_N}{\|x\|_N} = 0, \forall x \in X_n$.

Vậy bổ đề đã được chứng minh.

Chứng minh định lý 3.1 :

Từ các Bổ đề 1, 2, 3 suy ra các giả thiết của Định lý 2.3 đều thỏa, do vậy trong chứng minh của định lý này ta có ánh xạ $(I-U)^{-1}C$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục trên X_0 và tồn tại tập D lồi, đóng và bị chặn trong X_0 và sao cho $(I-U)^{-1}C(D) \subset D$.

Áp dụng Định lý 2.1 bằng cách đặt C=D, $T=(I-U)^{-1}C$, $t_0=0$, $x_0=0$ thì rõ ràng các giả thiết của Định lý này đều thỏa. Vậy định lý 3.1 được chứng minh.

TAI LIEU THAM KHAO

1. Le Hoan Hoa and Klaus Schimtt (1994), « Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation » , *Results in Mathematics,* Vol.25, pp. 291-313.
2. Lê Hoàn Hóa, Đỗ Hoài Vũ, Lê Thị Kim Anh (2008), « Tính compact và liên thông của tập nghiệm của phương trình tích phân trong không gian Fréchet", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TP HCM,* (14), tr. 20-31.

3. Daria Bugajewska (2000), *On the structure of solution sets of differential equations in Banach space,* Math. Sovaca, No. 4, pp. 463-471.
4. Leszek Gasi'nski, Nikolaos S.Papageorgiou (2005), *Nonlinear Analysis,* Taylor Francis Group , LLC.
5. John W. Lee, Donal O'Regan (1994), *Existence principles for differential equations and systems of equations,* Topological methods in differential equations and inclusions, Kluwer Academic publishers. Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 472, pp. 239-289.