TÍNH R_δ CỦA TẬP NGHIỆM MẠNH PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VOLTERRA ĐỐI SỐ LỆCH PHI TUYẾN LOẠI HYPERBOLIC

LÊ HOÀN HÓA*, NGUYỄN NGỌC TRỌNG**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh tập nghiệm mạnh S của phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic sau là tập R_δ.

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + L(t)u_t + V(t,u(t)) + \int_0^t K(t,s,u(s),u_s)ds + f(t), t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \tag{1}$$

Do đó S khác rỗng, compact, liên thông. Công cụ chính được sử dụng là định lý điểm bất động của toán tử dạng Krasnosel'skii trong không gian lồi địa phương, định lý về tính R_δ của tập điểm bất động của ánh xạ hoàn toàn liên tục.

Từ khóa: Tập R_δ, phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic

ABSTRACT

The R_δ property of a set of strong solutions of the nonlinear hyperbolic Volterra integro-differential equation with deviating argument

In this paper, we prove the R_δ property of a set S of strong solutions of the following nonlinear Hyperbolic Voltera integro-differential equation with deviating argument

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + L(t)u_t + V(t,u(t)) + \int_0^t K(t,s,u(s),u_s)ds + f(t), t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \tag{1}$$

Hence, S is a non empty, compact, connected set. The Theorem of a fixed point of the Krasnosel'skii-operator in a locally convex space and the Theorem about the R_δ property of a set of fixed points of completely continuous maps are mainly used.

Keywords: $R_\delta -$set, nonlinear Volterra integro-differential equation with deviating argument

* PGS TS, Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP HCM

** Học viên Cao học Trường Đại học Sư phạm TP HCM

1. Giới thiệu

Khi khảo sát một phương trình, trước tiên ta muốn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của nó. Khi phương trình đã có nghiệm thì một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: liệu nghiệm đó có duy nhất hay không và trong trường hợp phương trình có nhiều nghiệm thì tập nghiệm có những tính chất gì?

Năm 1942, N.Aronszajn đã chứng minh rằng tập nghiệm S của bài toán giá trị đầu $x' = f(t,x), x(0) = x_0$ (trong đó $x \in \mathbb{R}^n, t \in I = [0,T]$, f bị chặn và liên tục trên $I \times \mathbb{R}^n$) là một tập R_δ trong không gian $C(I)$ tất cả các hàm liên tục từ I vào $\mathbb{R}^n$. Điều này suy ra S khác rỗng, compact, liên thông. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh tính R_δ của tập nghiệm mạnh của phương trình (1). Công cụ sử dụng là định lý điểm bất động của toán tử dạng Krasnosel'skii trong không gian lồi địa phương, định lý về tính R_δ của tập điểm bất động của ánh xạ hoàn toàn liên tục và một số định lý khác.

2. Kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa:

Cho Ω là không gian metric đầy đủ. B là tập con khác rỗng của Ω.

B gọi là co rút được (contractible) nếu tồn tại $x_0 \in B$ và ánh xạ liên tục $h:[0,1]\times B \to B$ thỏa $h(0,x) = x_0$ và $h(1,x) = x$ với mọi $x \in B$.

B gọi là R_δ nếu B đồng phôi với giao của một dãy giảm $(B_n)_n$, trong đó B_n là co rút được với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Một tập R_δ thì khác rỗng, compact, liên thông.

Định nghĩa:

Cho X,Y là không gian metric và ánh xạ $f: X \to Y$. f gọi là ánh xạ riêng (proper map) nếu f liên tục và với mọi tập compact M của Y ta có $f^{-1}(M)$ là tập compact của X.

Điều kiện (A) $([2])$. Cho X là không gian lồi địa phương và $\mathcal{P}$ là một họ nửa chuẩn tách trên X, D là một tập con của X và $U: D \to X$. Với bất kỳ $a \in X$, ta định nghĩa $U_a : D \to X$ bởi $U_a(x) = U(x) + a$.

Toán tử $U: D \to X$ gọi là thỏa điều kiện (A) trên tập con Ω của X nếu

$(A.1)$ Với bất kỳ $a \in \Omega : U_a(D) \subset D$.

$(A.2)$ Với bất kỳ $a \in \Omega$ và $p \in \mathcal{P}$, tồn tại $k_a \in \mathbb{N}_0$ với tính chất: Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $r \in \mathbb{N}$ và $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ thỏa $\alpha_a^p(x,y) < \varepsilon + \delta$ thì $\alpha_a^p\left(U_a^r(x), U_a^r(y)\right) < \varepsilon$.

Ở đây
$\alpha_a^p(x,y) = \max\left\{p\left(U_a^i(x) - U_a^j(y)\right) : i, j = 0, 1, 2, ..., k_a\right\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Định lý (B) $([2])$**.** Cho X là không gian lồi địa phương đầy đủ theo dãy với họ nửa chuẩn tách $\mathcal{P}$ và giả sử U, C là toán tử trên X sao cho

$(B.1)$ U thỏa điều kiện (A) trên X.

$(B.2)$ Với bất kỳ $p \in \mathcal{P}$, tồn tại $k_p \geq 0$ (k_p phụ thuộc vào p) sao cho:
$p\left(U(x) - U(y)\right) \leq k_p p(x - y)$ với mọi $x, y \in X$.

$(B.3)$ Tồn tại $x_0 \in X$ với tính chất: Với mọi $p \in \mathcal{P}$ tồn tại $r \in \mathbb{N}$ và $\lambda \in [0,1)$ (r, λ phụ thuộc vào p) sao cho $p\left(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)\right) \leq \lambda p(x - y)$ với mọi $x, y \in X$.

$(B.4)$ C hoàn toàn liên tục và $p\left(C(A)\right) < \infty$ với $A \subset X, p(A) < \infty$
trong đó $p(A) = \sup\left\{p(x) : x \in A\right\}$.

$(B.5)$ $\lim\limits_{p(x) \to \infty} \dfrac{p\left(C(x)\right)}{p(x)} = 0$ với mọi $p \in \mathcal{P}$.

Khi đó $U + C$ có điểm bất động.

Chú ý 1: Từ chứng minh của định lý (B) ta thấy: Trong trường hợp X là không gian Banach, tồn tại quả cầu mở $B(x_0, r)$ của X thỏa mãn $(I - U)^{-1} C\left(\overline{B}(x_0, r)\right) \subset \overline{B}(x_0, r)$, $U + C$ có điểm bất động trong $B(x_0, r)$ và mọi điểm bất động của $U + C$ đều thuộc $B(x_0, r)$, trong đó $\overline{B}(x_0, r)$ là quả cầu đóng tâm x_0, bán kính r.

Định lý (C) $([2])$**.** Cho X là không gian lồi địa phương với họ nửa chuẩn tách $\mathcal{P}$, D là tập con đầy đủ theo dãy của X. Cho U là một toán tử liên tục đều trên D (tức là với $p \in \mathcal{P}$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $p(x - y) < \delta$ thì dẫn đến $p\left(U(x) - U(y)\right) < \varepsilon$).

Giả sử U thỏa điều kiện (A) trên một tập con Ω của X. Khi đó toán tử $(I-U)^{-1}$ được định nghĩa tốt và liên tục trên Ω. Với bất kỳ $a \in \Omega$, toán tử U_a có duy nhất một điểm bất động trên D là $(I-U)^{-1}(a)$ và $\lim_{n\to\infty} U_a^n(x) = (I-U)^{-1}(a)$ với mọi $x \in D$.

Chú ý 2: $([2])$**.** Nếu trong điều kiện (A), δ được chọn độc lập với $a \in \Omega$ thì với các giả thiết của định lý trên ta có $(I-U)^{-1}$ liên tục đều trên Ω.

Định lý (D) $([1])$**.** Cho X là không gian metric, $(E, |\bullet|)$ là không gian Banach và ánh xạ riêng $f : X \to E$. Giả sử rằng có một dãy các ánh xạ riêng $f_k : X \to E$ thỏa

$(D.1)$ $|f_k(x) - f(x)| < \dfrac{1}{k}$ với mọi $x \in X$.

$(D.2)$ Với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $u \in E$ thỏa $|u| \le \dfrac{1}{k}$, phương trình $f_k(x) = u$ có nghiệm duy nhất.

Khi đó tập $M = f^{-1}(0)$ là R_δ.

Định lý (E) **([1]).** Cho $\{X_n, \pi_n^p, \mathbb{N}\}$ là một hệ ngược. Nếu mỗi X_n là R_δ thì giới hạn ngược $\lim_{\leftarrow} X_n$ cũng là R_δ.

3. Kết quả chính

3.1. Giới thiệu bài toán

Cho $r > 0$. Ta ký hiệu $|\bullet|$ là chuẩn của không gian Banach E và $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

$C_r = C([-r, 0], E)$ với chuẩn $\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in [-r, 0]\}$.

$C([-r, \infty), E)$ là không gian các hàm liên tục từ $[-r, \infty)$ vào E với họ nửa chuẩn $\{|\bullet|_n\}_n$ được định nghĩa như sau: $|x|_n = \sup\{|x(t)| : t \in [-r, n]\}, n \in \mathbb{N}$.

Với mọi $u \in C([-r, \infty), E)$ và $t \ge 0$ đặt $u_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$u_t(\theta) = u(t + \theta)$ với $\theta \in [-r, 0]$.

Với mọi $u \in C([-r, d], E)$ và $t \in [0, d]$ đặt $u_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$u_t(\theta) = u(t + \theta)$ với $\theta \in [-r, 0]$.

Với $u \in X$, đặt $\overline{u} : [-r, \infty) \to E$ được định nghĩa như sau

$$\bar{u}(s)=\begin{cases}u(s)+\varphi(0)-u(0), & s\geq 0\\ \varphi(s) & , s\in[-r,0]\end{cases}$$

Với $u\in C([0,d],E)$, đặt $\bar{u}:[-r,d]\to E$ được định nghĩa như sau

$$\bar{u}(s)=\begin{cases}u(s)+\varphi(0)-u(0), & s\in[0,d]\\ \varphi(s) & , s\in[-r,0]\end{cases}$$

Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $X_n=C([0,n],E)$ là không gian Banach gồm các hàm liên tục $u:[0,n]\to E$ với chuẩn $\|u\|_n=\sup\{|u(t)|:t\in[0,n]\}$.

$X=C(\mathbb{R}_+,E)$ là không gian Frechet các hàm liên tục từ $\mathbb{R}_+$ vào E với họ nửa chuẩn $\{\|\bullet\|_n\}_n$ được định nghĩa như sau: $\|u\|_n=\sup\{|u(t)|:t\in[0,n]\}$ với $n\in\mathbb{N}$.

Xét phương trình

$$\begin{cases}u'(t)=A(t)u(t)+L(t)u_t+V(t,u(t))+\int_0^t K(t,s,u(s),u_s)ds+f(t), t\geq 0\\ u_0=\varphi\in C_r\end{cases} \quad (1)$$

trong đó $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ E vào E, $\{L(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ C_r vào E, $f:\mathbb{R}_+\to E$ liên tục, hơn nữa

(i) $t\mapsto A(t)$ liên tục và $t\mapsto L(t)$ liên tục.

(ii) $V:\mathbb{R}_+\times E\to E$ liên tục và tồn tại hàm liên tục $\omega:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ sao cho $|V(t,x)-V(t,y)|\leq\omega(t)|x-y|$ với mọi $x,y\in E$ và $t\in\mathbb{R}_+$.

(iii) $K:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times E\times C_r\to E$ hoàn toàn liên tục.

(iv) $\lim_{|x|+\|y\|\to\infty}\dfrac{|K(t,s,x,y)|}{|x|+\|y\|}=0$ đều theo (t,s) trên mỗi đoạn bị chặn tùy ý của $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

Định nghĩa:

$u:[-r,\infty)\to E$ gọi là nghiệm mạnh của phương trình (1) nếu $u|_{[0,\infty)}\in C^1([0,\infty),E)$ và u thỏa phương trình (1), ở đây $C^1([0,\infty),E)$ là không gian các hàm khả vi liên tục $u:[0,\infty)\to E$.

3.2. Các định lý

Định lý 1.

Cho $(E,|\bullet|)$ là không gian Banach, D là tập con mở, bị chặn của E và ánh xạ hoàn toàn liên tục $L:\overline{D}\to E$. Giả sử rằng có một dãy các ánh xạ hoàn toàn liên tục $L_k:\overline{D}\to E$ thỏa

(1.1) $\left|L_k(x)-L(x)\right|<\dfrac{1}{k}$ với mọi $x\in\overline{D}$.

(1.2) Với mọi $k\in\mathbb{N}$ và $u\in E$ thỏa $|u|\le\dfrac{1}{k}$, phương trình $x=L_k(x)+u$ có nghiệm duy nhất.

Khi đó tập điểm bất động của L là R_δ.

Chứng minh: Ký hiệu $i:\overline{D}\to E$ định bởi $i(x)=x$. Đặt $f=i-L,\ f_k=i-L_k$ với $k\in\mathbb{N}$. Theo định lý (D) ta có điều phải chứng minh.

Định lý 2.

Cho tập đóng, khác rỗng $M\subset X=C(\mathbb{R}_+,E)$. Với $n\in\mathbb{N}$, đặt $M_n=\left\{x|_{[0,n]}:x\in M\right\}$. Nếu mỗi M_n là R_δ thì M cũng là R_δ.

Chứng minh : Với $m\le p$, đặt $\pi_m^p:M_p\to M_m$ định bởi $\pi_m^p(x)=x|_{[0,m]}$. Ta có $\left\{M_n,\pi_n^p,\mathbb{N}\right\}$ là hệ ngược và M đồng phôi với $\lim_{\leftarrow}M_n$. Theo định lý (E), M là R_δ.

Định lý 3.

Nếu các điều kiện $(i),(ii),(iii),(iv)$ được thỏa mãn thì tập nghiệm mạnh của bài toán (1) là R_δ.

Chứng minh :

Đặt $g:\mathbb{R}_+\times C_r\to E$ định bởi $g(t,u)=A(t)u(0)+L(t)u$.

Ta thấy (I) tương đương với phương trình tích phân sau

$$\begin{cases} u(t)=\displaystyle\int_0^t\big(g(s,u_s)+V(s,u(s))+f(s)\big)ds+\int_0^t\left(\int_0^s K(s,\sigma,u(\sigma),u_\sigma)d\sigma\right)ds+\varphi(0),t\ge 0\\ u_0=\varphi\end{cases}$$

Đặt $P,H,U,C:X\to X$ định bởi $P(u)(s)=g\left(s,\left(\overline{u}\right)_s\right)+V(s,u(s))+f(s)$,

$$H(u)(t)=\int_0^t K\left(t,s,u(s),(\bar{u})_s\right)ds, U(u)(t)=\int_0^t Pu(s)ds,\ C(u)(t)=\int_0^t Hu(s)ds+\varphi(0).$$

Đặt Δ là tập điểm bất động của $U+C$ và Ψ là tập nghiệm mạnh của (1).

Khi $u\in\Delta$ thì $u(0)=\varphi(0)$ nên $\bar{u}(t)=\begin{cases}u(t),\ t\geq 0\\ \varphi(t),\ t\in[-r,0]\end{cases}$

Đặt $F:\Delta\to\Psi$ định bởi $F(u)=\bar{u}$. Khi đó F là phép đồng phôi.

Vậy ta sẽ chứng minh Δ là tập R_δ.Ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 1. $([3])$. $g:\mathbb{R}_+\times C_r\to E$ liên tục và với mọi $n\in\mathbb{N}$ tồn tại $k_n>0$ sao cho với mọi $x,y\in C_r$ và $t\in[0,n]$ ta có $\left|g(t,x)-g(t,y)\right|\leq k_n\|x-y\|$.

Bổ đề 2. $([3])$. Với mọi $s\in[0,n]$ và $x,y\in X$ ta có $\left\|(\bar{x})_s-(\bar{y})_s\right\|\leq 2\|x-y\|_n$ và $\left\|(\bar{x})_s\right\|\leq 2\|x\|_n+\|\varphi\|$.

Bổ đề 3. $([3])$. Ta có C liên tục. Với $n\in\mathbb{N}$ đặt $d_n=\max\{\omega(s):s\in[0,n]\}$ và $c_n=2k_n+d_n$. Khi đó ta có $\left\|U_z^j(x)-U_z^j(y)\right\|_n\leq\dfrac{(nc_n)^j}{j!}\|x-y\|_n$ với mọi $j\in\mathbb{N}$ và $x,y,z\in X$. Do đó U thỏa điều kiện $(B.1)-(B.3)$ của định lý (B).

Bổ đề 4. C hoàn toàn liên tục và $\lim\limits_{\|u\|_n\to\infty}\dfrac{\|C(u)\|_n}{\|u\|_n}=0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Khi $\Omega\subset X$ thỏa mãn $\|\Omega\|_n<\infty$ thì ta có $\|C(\Omega)\|_n<\infty$.

Chứng minh bổ đề 4 :

Theo bổ đề 3 ta có C liên tục. Lấy $\Omega\subset X$ bị chặn. Đặt $P=\{x(s):x\in\Omega,s\in[0,n]\}$, $Q=\left\{(\bar{x})_s:x\in\Omega,s\in[0,n]\right\}$. Khi đó P,Q bị chặn. Vì K hoàn toàn liên tục nên $B:=\overline{K\left([0,n]^2\times P\times Q\right)}$ compact. Do đó tồn tại $\beta>0$ sao cho $\left|K\left(t,s,u(s),(\bar{u})_s\right)\right|\leq\beta$ với mọi $(t,s)\in[0,n]^2$ và $u\in\Omega$.

Vậy lấy $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n\beta}$ sao cho với mọi $u \in \Omega$ và $t_1, t_2 \in [0, n]$ mà $|t_1 - t_2| < \delta$ thì $|Cu(t_1) - Cu(t_2)| \le \int\limits_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)} \left(\int\limits_0^s \left| K\left(s, \sigma, u(\sigma), (\bar{u})_\sigma\right) \right| d\sigma \right) ds$

$$\le n\beta |t_1 - t_2| < n\beta\delta < \varepsilon.$$

Do đó $\left\{ (Cu)\big|_{[0,n]} : u \in \Omega \right\}$ đẳng liên tục.

Lấy nửa không gian đóng $\{u \in E : b^*(u) \le r\}$ chứa B, với $b^* \in E^*$ và $r > 0$. Theo tính chất của tích phân Bochner và tính tuyến tính của b^* ta có :

$$b^*\left(\frac{1}{n^2} \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s K\left(s, \sigma, u(\sigma), (\bar{u})_\sigma\right) d\sigma \right) ds \right) = \frac{1}{n^2} \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s b^*\left(K\left(s, \sigma, u(\sigma), (\bar{u})_\sigma\right) \right) d\sigma \right) ds \le r$$

với mọi $u \in \Omega$ và với mọi $t \in [0, n]$.

Vậy $\dfrac{1}{n^2} \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s K\left(s, \sigma, u(\sigma), (\bar{u})_\sigma\right) d\sigma \right) ds \in \{u \in E : b^*(u) \le r\}$ với mọi $u \in \Omega$ và $t \in [0, n]$.

Vì giao của tất cả các nửa không gian đóng chứa B là bao lồi đóng $\overline{\text{conv}}(B)$ của B nên ta có $\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s K\left(s, \sigma, u(\sigma), (\bar{u})_\sigma\right) d\sigma \right) ds \in n^2 \left(\overline{\text{conv}}(B) \right)$ với mọi $u \in \Omega$ và $t \in [0, n]$.

Với mỗi $t \in [0, n]$ đặt $\left(C(\Omega)\right)_n(t) := \left\{ \left((Cu)\big|_{[0,n]} \right)(t) : u \in \Omega \right\}$.

Khi đó $\left(C(\Omega)\right)_n(t) \subset n^2 \left(\overline{\text{conv}}(B) \right) + \varphi(0)$. Do B là tập compact nên ta có $\left(C(\Omega)\right)_n(t)$ là tập compact tương đối. Vậy $C(\Omega)$ là tập compact tương đối. Suy ra C hoàn toàn liên tục.

Do (iv) nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $m > 0$ sao cho với mọi $x \in E$ và $y \in C_r$ mà $|x| + \|y\| > m$ thì $|K(t, s, x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{12n^2}(|x| + \|y\|)$ với mọi $(t, s) \in [0, n]^2$.

Do K hoàn toàn liên tục nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho với mọi $x \in E$ và $y \in C_r$ mà $|x| + \|y\| \le m$ thì $|K(t, s, x, y)| \le \rho$ với mọi $(t, s) \in [0, n]^2$.

Vậy $|K(t, s, x, y)| < \rho + \dfrac{\varepsilon}{12n^2}(|x| + \|y\|)$ với mọi $(t, s) \in [0, n]^2, x \in E, y \in C_r$.

Khi đó với mọi $t \in [0,n]$ và $u \in X$ ta có :

$$\begin{aligned}|Cu(t)| &\le \int_0^t \left(\int_0^s \left| K\left(s,\sigma,u(\sigma),(\bar{u})_\sigma\right) \right| d\sigma \right) ds + |\varphi(0)| \\ &\le \int_0^t \left(\int_0^s \left[\rho + \frac{\varepsilon}{12n^2}\left(|u(\sigma)| + \left\| (\bar{u})_\sigma \right\| \right) \right] d\sigma \right) ds + |\varphi(0)| \\ &\le n^2\rho + \frac{\varepsilon}{4}\|u\|_n + \frac{\varepsilon}{12}\|\varphi\| + |\varphi(0)|.\end{aligned}$$

Chọn $\mu_n > \max\left\{ \frac{4n^2\rho}{\varepsilon}, \frac{\|\varphi\|}{3}, \frac{4|\varphi(0)|}{\varepsilon} \right\}$. Khi $\|u\|_n > \mu_n$ thì $\frac{\|Cu\|_n}{\|u\|_n} < \varepsilon$.

Lấy $\Omega \subset X$ thỏa $\|\Omega\|_n < \infty$. Đặt $P = \{ x(s) : x \in \Omega, s \in [0,n] \}$ và $Q = \left\{ (\bar{x})_s : x \in \Omega, s \in [0,n] \right\}$. Do $\|\Omega\|_n < \infty$ nên P, Q bị chặn. Vì K hoàn toàn liên tục nên tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $\left| K\left(t,s,u(s),(\bar{u})_s\right) \right| \le \gamma$ với mọi $(t,s) \in [0,n]^2, u \in \Omega$.

Vậy $\|C(u)\|_n \le \gamma n^2 + |\varphi(0)|$ với mọi $u \in \Omega$. Do đó $\|C(\Omega)\|_n < \infty$.

Ta chứng minh định lý 3 qua hai bước.

Bước 1. Ta chứng minh $\Delta \ne \varnothing$**.** Theo bổ đề 3 và bổ đề 4 ta có U, C thỏa các điều kiện của định lý (B).Vậy $\Delta \ne \varnothing$.

Bước 2. Ta chứng minh Δ là tập R_δ.

Đặt $\Delta_n = \left\{ u|_{[0,n]} : u \in \Delta \right\}$. Ta chứng minh Δ_n là R_δ. Để đỡ nặng nề về mặt ký hiệu ta đặt $P, H, V, G : X_n \to X_n$ định bởi

$$Pu(s) = g\left(s,(\bar{u})_s\right) + V\left(s,u(s)\right) + f(s), Hu(t) = \int_0^t K\left(t,s,u(s),(\bar{u})_s\right) ds,$$

$$V(u)(t) = \int_0^t Pu(s) ds, G(u)(t) = \int_0^t Hu(s) ds + \varphi(0) \text{ với } t \in [0,n].$$

Tương tự chứng minh đối với U, C ta có V, G thỏa kết luận của bổ đề 3 và bổ đề 4. Vậy với $z, u, v \in X_n$ ta có $\left\| V_z^j(u) - V_z^j(v) \right\|_n \le \frac{(nc_n)^j}{j!} \|u - v\|_n$ với mọi $j \in \mathbb{N}$. Do đó V thỏa điều kiện $(B.1) - (B.3)$ của định lý (B), V liên tục đều, $(I - V)^{-1}$ được định nghĩa tốt và liên tục đều trên X_n. Đặt $A=(I-V)^{-1}G$. Khi đó A hoàn toàn liên tục. Ta gọi tập điểm bất động của A là $\tilde{\Delta}$.

Bổ đề 5. $\Delta_n=\tilde{\Delta}$

Chứng minh bổ đề 5 :

Khi $u\in\Delta$ thì $u\big|_{[0,n]}$ là điểm bất động của A. Vậy $\Delta_n\subset\tilde{\Delta}$.

Lấy $y\in\tilde{\Delta}$. Ta có $y(t)=\int\limits_0^t Py(s)ds+\int\limits_0^t Hy(s)ds+\varphi(0)$ với $t\in[0,n]$.

Xét phương trình

$$\begin{cases} u'(t)=g(t,u_t)+V(t,u(t))+\int\limits_0^t K(t,s,u(s),u_s)ds+f(t),\ t\ge n \\ u(t)=\overline{y}(t) \qquad ,t\in[-r,n] \end{cases} \tag{2}$$

Tương tự phương trình (1) ta thấy phương trình (2) có một nghiệm là u. Đặt $x(t)=\begin{cases} y(t), & t\in[0,n] \\ u(t), & t\ge 0 \end{cases}$. Khi đó $x\in\Delta$ và $x\big|_{[0,n]}=y$. Do đó $y\in\Delta_n$. Tức là $\tilde{\Delta}\subset\Delta_n$.

Bởi $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{(nc_n)^j}{j!}=0$ nên tồn tại $p\in\mathbb{N}$ sao cho $\frac{(nc_n)^j}{j!}<1$ với mọi $j\ge p$. Đặt $\lambda=\frac{(nc_n)^p}{p!}<1$ và $\tau=nc_n$. Theo định lý (C) tồn tại điểm bất động duy nhất z_0 của V.

Đặt $\beta=(1-\lambda)^{-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{p-1}\tau^i\right)>0$. Ta có $\lim\limits_{\|x\|_n\to\infty}\frac{\|G(x)\|_n}{\|x-z_0\|_n}=0$ nên tồn tại $R_1>0$ sao cho khi $\|x-z_0\|_n\ge R_1$ thì $\|G(x)\|_n<\frac{1}{2\beta}\|x-z_0\|_n$.

Đặt $M=\{x\in X_n:\|x-z_0\|_n\le R_1\}$. Khi đó $\|G(M)\|_n<\infty$ nên tồn tại $R_2>0$ sao cho $\|G(x)\|_n<R_2$ với mọi $x\in X_n$ thỏa mãn $\|x-z_0\|_n\le R_1$.

Lấy $\varepsilon>0$, vì $(I-V)^{-1}$ liên tục đều trên X_n, nên tồn tại $\delta>0$ thỏa mãn $\left\|(I-V)^{-1}(x)-(I-V)^{-1}(y)\right\|_n<\varepsilon$ với mọi $x,y\in X_n$ mà $\|x-y\|_n<\delta$. (3)

Chọn $R_3 > \beta\delta + R_1 + \beta R_2$ thì tương tự phần chứng minh định lý (B) trong [2] ta thấy $(I-V)^{-1}G\left(\overline{B}(z_0,R_3)\right) \subset \overline{B}(z_0,R_3)$, $V+G$ có một điểm bất động trong $B(z_0,R_3)$ và mọi điểm bất động của $V+G$ đều thuộc $B(z_0,R_3)$, tức là $\Delta_n \subset B(z_0,R_3)$.

Đặt $P_n = \left\{u(s) : s\in[0,n], u\in\overline{B}(z_0,R_3)\right\}, Q_n = \left\{(\overline{u})_s : s\in[0,n], u\in\overline{B}(z_0,R_3)\right\}$. Ta có $\overline{P_n},\overline{Q_n}$ bị chặn. Do K liên tục nên tồn tại mở rộng liên tục K^* của $K\big|_{[0,n]^2\times\overline{P_n}\times\overline{Q_n}}$ lên $\mathbb{R}^2\times E\times C_r$ sao cho $K^*\left(\mathbb{R}^2\times E\times C_r\right)\subset\overline{\text{conv}}K\left([0,n]^2\times\overline{P_n}\times\overline{Q_n}\right)$.

Khi đó tồn tại toán tử Lipschitz địa phương K_ε xác định trên $\mathbb{R}^2\times E\times C_r$ sao cho $\left|K_\varepsilon(t,s,x,y)-K^*(t,s,x,y)\right| < \dfrac{\delta}{2n^2}$ với mọi $(t,s,x,y)\in\mathbb{R}^2\times E\times C_r$ và $K_\varepsilon\left(\mathbb{R}^2\times E\times C_r\right)\subset\overline{\text{conv}}K^*\left(\mathbb{R}^2\times E\times C_r\right)\subset\overline{\text{conv}}K\left([0,n]^2\times\overline{P_n}\times\overline{Q_n}\right)$.

Vì K hoàn toàn liên tục và $\overline{P_n},\overline{Q_n}$ bị chặn nên $K_\varepsilon\left(\mathbb{R}^2\times E\times C_r\right)$ compact tương đối. Vậy K_ε hoàn toàn liên tục.

Đặt $C_\varepsilon : X_n\to X_n$ định bởi $C_\varepsilon(u)(t)=\int_0^t\left(\int_0^s K_\varepsilon\left(s,\sigma,u(\sigma),(\overline{u})_\sigma\right)d\sigma\right)ds+\varphi(0)$ với $t\in[0,n]$. Vì K_ε hoàn toàn liên tục nên chứng minh hoàn toàn tương tự bổ đề 4 ta có C_ε hoàn toàn liên tục. Đặt $A_\varepsilon=(I-V)^{-1}C_\varepsilon$. Khi đó A_ε cũng hoàn toàn liên tục.

Với mọi $t\in[0,n]$ và $u\in\overline{B}(z_0,R_3)$ ta có

$$\begin{aligned}\left|C_\varepsilon(u)(t)-G(u)(t)\right| &\le \int_0^t\left(\int_0^s\left|K_\varepsilon\left(s,\sigma,u(\sigma),(\overline{u})_\sigma\right)-K\left(s,\sigma,u(\sigma),(\overline{u})_\sigma\right)\right|d\sigma\right)ds\\ &=\int_0^t\left(\int_0^s\left|K_\varepsilon\left(s,\sigma,u(\sigma),(\overline{u})_\sigma\right)-K^*\left(s,\sigma,u(\sigma),(\overline{u})_\sigma\right)\right|d\sigma\right)ds\\ &\le\int_0^t\left(\int_0^s\frac{\delta}{2n^2}d\sigma\right)ds\le\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $\left\|C_\varepsilon(u)-G(u)\right\|_n\le\dfrac{\delta}{2}$ với mọi $u\in\overline{B}(z_0,R_3)$. $\quad(4)$

Từ $(3),(4)$ ta có $\left\|A_\varepsilon(u)-A(u)\right\|_n<\varepsilon$ với mọi $u\in\overline{B}(z_0,R_3)$.

Lấy $h\in X_n$, ta xét phương trình $u=A_\varepsilon(u)+h$ với $u\in X_n$. $\quad(5)$

Ta thấy phương trình (5) tương đương phương trình sau $u = V(u) + h - V(h) + C_\varepsilon(u)$. Đặt $W(u) = V(u) + h - V(h)$.

Bổ đề 6. $W + C_\varepsilon$ có điểm bất động.

Chứng minh bổ đề 6 :

Với $z, u, v \in X_n$ ta có $\left\| V_z^j(u) - V_z^j(v) \right\|_n \le \dfrac{(nc_n)^j}{j!} \|u - v\|_n$ với mọi $j \in \mathbb{N}$.

Lại có h cố định và $W_z = V_{h - V(h) + z}$ nên với mọi $z, u, v \in X_n$ ta cũng có $\left\| W_z^j(u) - W_z^j(v) \right\|_n \le \dfrac{(nc_n)^j}{j!} \|u - v\|_n$ với mọi $j \in \mathbb{N}$.

Tương tự phần chứng minh định lý (B) trong [2] ta có $\left\| W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) - z_0 \right\|_n \le \beta \left\| C_\varepsilon(x) \right\|_n$ với mọi $x \in X_n$ và $m \in \mathbb{N}$, trong đó $\beta = (1 - \lambda)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \right)$.

Vậy $\left\| W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) - z_0 \right\|_n \le \beta \left\| C_\varepsilon(x) \right\|_n \le \beta \left(\left\| C_\varepsilon(x) - G(x) \right\|_n + \left\| G(x) \right\|_n \right)$ với mọi $x \in X_n$ và $m \in \mathbb{N}$.

Do đó với mọi $x \in \overline{B}(z_0, R_3)$ và $m \in \mathbb{N}$ ta có: $\left\| W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) - z_0 \right\|_n \le \beta \left(\dfrac{\delta}{2} + \left\| G(x) \right\|_n \right)$.

Lấy $x \in \overline{B}(z_0, R_3)$. Ta xét hai trường hợp

TH1. $\|x - z_0\|_n \le R_1$.

Khi đó $\left\| W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) - z_0 \right\|_n \le \beta \left(\dfrac{\delta}{2} + \left\| G(x) \right\|_n \right) \le \dfrac{\beta\delta}{2} + \beta R_2 < R_3$. Điều này cho ta $W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) \in B(z_0, R_3)$.

TH2. $R_1 < \|x - z_0\|_n \le R_3$. Ta có:

$$\begin{aligned}\left\| W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) - z_0 \right\|_n &\le \beta \left(\frac{\delta}{2} + \left\| G(x) \right\|_n \right) < \beta \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\beta} \|x - z_0\|_n \right) \\ &= \frac{\beta\delta}{2} + \frac{1}{2} \|x - z_0\|_n < \frac{R_3}{2} + \frac{R_3}{2} = R_3.\end{aligned}$$

Điều này cho ta $W_{C_\varepsilon(x)}^{pm}(z_0) \in B(z_0, R_3)$.

Vậy $W^{pm}_{C_\varepsilon(x)}(z_0) \in B(z_0, R_3)$ với mọi $x \in \overline{B}(z_0, R_3)$ và $m \in \mathbb{N}$.

Theo định lý (C) ta có $\lim\limits_{m\to\infty} W^{pm}_{C_\varepsilon(x)}(z_0) = (I-W)^{-1} C_\varepsilon(x)$ với mọi $x \in X_n$. Do đó $(I-W)^{-1} C_\varepsilon(x) \in \overline{B}(z_0, R_3)$ với mọi $x \in \overline{B}(z_0, R_3)$.

Như vậy $(I-W)^{-1} C_\varepsilon\left(\overline{B}(z_0, R_3)\right) \subset \overline{B}(z_0, R_3)$.

Theo định lý (C) ta có $(I-W)^{-1}$ liên tục nên $(I-W)^{-1} C_\varepsilon$ liên tục. Do C_ε hoàn toàn liên tục nên $(I-W)^{-1} C_\varepsilon\left(\overline{B}(z_0, R_3)\right)$ là tập compact tương đối. Vậy theo định lý điểm bất động Schauder ta thấy $(I-W)^{-1} C_\varepsilon$ có điểm bất động trong $\overline{B}(z_0, R_3)$. Đó cũng chính là điểm bất động của $W + C_\varepsilon$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm thuộc $\overline{B}(z_0, R_3)$.Ta chứng minh nghiệm đó là duy nhất. Giả sử x, y là hai nghiệm của phương trình (5) tức x, y là hai điểm bất động của $W + C_\varepsilon$. Khi đó $x(0) = y(0) = \varphi(0) + h(0)$.

Đặt $b = \max\{\alpha \in [0,n] : x(t) = y(t), \forall t \in [0,\alpha]\}$. Ta chứng minh $b = n$.

Giả sử trái lại $b < n$. Do K_ε Lipschitz địa phương trên $[0,n]^2 \times E \times C_r$ nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho K_ε Lipschitz trên $[0,n]^2 \times B_1 \times B_2$ với hằng số Lipschitz là m, trong đó $B_1 = \{z \in E : |z - x(b)| < \rho\}, B_2 = \left\{z \in C_r : \left\|z - (\overline{x})_b\right\| < \rho\right\}$.

Đặt $\tau_n = k_n + d_n$.Với mỗi $u \in X_n$ cố định thì các ánh xạ $s \mapsto (\overline{u})_s$ và $s \mapsto u(s)$ liên tục nên tồn tại $\sigma_1 > 0$ sao cho $\sigma_1 < \dfrac{1}{2(\tau_n + 2mn)}, b + \sigma_1 < n$; $x(s), y(s) \in B_1$ và $(\overline{x})_s, (\overline{y})_s \in B_2$ với mọi $s \in [b, b+\sigma_1]$.

Vậy với mọi $s \in [0,n]$ và $\sigma \in [b, b+\sigma_1]$ ta có

$$\left|K_\varepsilon\left(s,\sigma,x(\sigma),(\overline{x})_\sigma\right) - K_\varepsilon\left(s,\sigma,y(\sigma),(\overline{y})_\sigma\right)\right| \le m\left(|x(\sigma)-y(\sigma)| + \left\|(\overline{x})_\sigma - (\overline{y})_\sigma\right\|\right).$$

Đặt $X_b = C([b, b+\sigma_1], E)$ với chuẩn $\|u\|_b = \max\{|u(s)| : s \in [b, b+\sigma_1]\}$.

Ta thấy với mọi $\sigma \in [b, b+\sigma_1]$ thì $\left\|(\overline{x})_\sigma - (\overline{y})_\sigma\right\| \le \|x - y\|_b$. Do đó $\left|K_\varepsilon\left(s,\sigma,x(\sigma),(\overline{x})_\sigma\right) - K_\varepsilon\left(s,\sigma,y(\sigma),(\overline{y})_\sigma\right)\right| \le 2m\|x-y\|_b$.

Với $\sigma \in [0,b]$ thì $x(\sigma) = y(\sigma), (\bar{x})_\sigma = (\bar{y})_\sigma$.

Vậy $\int_b^t \left(\int_0^b \left| K_\varepsilon\left(s,\sigma,x(\sigma),(\bar{x})_\sigma\right) - K_\varepsilon\left(s,\sigma,y(\sigma),(\bar{y})_\sigma\right) \right| d\sigma \right) ds = 0$.

Ta lại có x, y là điểm bất động của $W + C_\varepsilon$ nên với $t \in [b, b+\sigma_1]$ ta có $x(t) = \int_b^t Px(s)ds + \int_b^t \left(\int_0^s K_\varepsilon\left(s,\sigma,x(\sigma),(\bar{x})_\sigma\right) d\sigma \right) ds + x(b)$ và

$y(t) = \int_b^t Py(s)ds + \int_b^t \left(\int_0^s K_\varepsilon\left(s,\sigma,y(\sigma),(\bar{y})_\sigma\right) d\sigma \right) ds + y(b)$. Do đó

$$|x(t) - y(t)| \le \int_b^t \left| g\left(s,(\bar{x})_s\right) - g\left(s,(\bar{y})_s\right) \right| ds + \int_b^t \left| V(s,x(s)) - V(s,y(s)) \right| ds$$
$$+ \int_b^t \left(\int_b^s \left| K_\varepsilon\left(s,\sigma,x(\sigma),(\bar{x})_\sigma\right) - K_\varepsilon\left(s,\sigma,y(\sigma),(\bar{y})_\sigma\right) \right| d\sigma \right) ds.$$

Vậy

$$|x(t) - y(t)| \le \tau_n \|x-y\|_b (t-b) + 2mn\|x-y\|_b (t-b) \le (\tau_n + 2mn)\sigma_1 \|x-y\|_b$$
$$\le \frac{1}{2}\|x-y\|_b \text{ với mọi } t \in [b, b+\sigma_1].$$

Do đó $\|x-y\|_b \le \frac{1}{2}\|x-y\|_b$. Vậy $\|x-y\|_b = 0$.

Do vậy $x(t) = y(t)$ với mọi $t \in [b, b+\sigma_1]$. Vậy $x(t) = y(t)$ với mọi $t \in [0, b+\sigma_1]$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của b.Vậy $b = n$. Do đó $x = y$. Vậy phương trình (5) có nghiệm duy nhất thuộc $\bar{B}(z_0, R_3)$.

Đặt $L = A|_{\bar{B}(z_0,R_3)}$ và $L_\varepsilon = A_\varepsilon|_{\bar{B}(z_0,R_3)}$. Ta thấy Δ_n là tập điểm bất động của L và L thỏa các điều kiện của định lý 1 nên Δ_n là tập R_δ. Do U, C liên tục nên tập điểm bất động Δ của $U + C$ là đóng và theo bước 1 thì $\Delta \ne \varnothing$. Vậy theo định lý 2 ta có Δ là R_δ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. Gabor (1999), "On the acyclicity of fixed point sets of multivalued maps", *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, vol.14, pp. 327-343.

2. L. H. Hoa, K. Schmitt (1994), "Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation", *Results in Mathematics*, vol.25, pp. 291-313.
3. L. H. Hoa, N. N. Trong, L. T. K. Anh (2010), "Nghiệm mạnh của phương trình vi tích phân với đối số lệch", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TP HCM*, (24), tr. 104 -114.