

## SỰ CẦN THIẾT CỦA MÔ HÌNH HÓA TRONG DẠY HỌC TOÁN

NGUYỄN THỊ TÂN AN\*

### TÓM TẮT

Người ta thường nghĩ toán học ở nhà trường ít được sử dụng trong cuộc sống hàng ngày. Mô hình hóa toán học sẽ là cầu nối các suy luận trong lớp học và suy luận trong những tình huống thực tế. Bài báo trình bày một số lý do cần thiết của mô hình hóa trong dạy học toán, chỉ ra các yếu tố cơ bản của chu trình mô hình hóa và minh họa cho các yếu tố đó; giới thiệu tóm tắt lịch sử và các tiếp cận lý thuyết về mô hình hóa trong giáo dục toán để thấy được sự quan tâm của thế giới trong lĩnh vực này.

**Từ khóa:** mô hình hóa toán học, chu trình mô hình hóa toán học.

### ABSTRACT

#### *The relevance of modelling in teaching mathematics*

Mathematics in schools is often considered impractical. Thus mathematical modelling will be the bridge between classroom reasoning and real-life reasoning. This article presents some reasons why mathematical modelling should be introduced into teaching practice, draws out elements of the mathematical modelling process and illustrates these elements. The article also gives a brief history and discusses some theoretical approaches to modelling in mathematics education to show that this field is gaining an international interest.

**Keywords:** mathematical modelling, mathematical modelling cycle.

### 1. Giới thiệu

Mọi người đều có thể đã sử dụng nhiều kiến thức toán học khác nhau trong những tình huống quen thuộc hàng ngày từ khi còn nhỏ. Ví dụ, một em bé có thể biết xấp xỉ lượng thức ăn trong đĩa và so sánh với khẩu phần của anh/ chị mình; biết đo sự phát triển bằng cách đánh dấu chiều cao trên tường; biết đếm để đảm bảo có một lượng kẹo công bằng... Việc sử dụng kiến thức toán không chính thức này tiếp tục được thể hiện khi các em lớn hơn, chẳng hạn biết kiểm tra tiền trước khi vào chợ và kiểm tra sự thay đổi lượng tiền đó. Khi trở thành người lớn, các em

có thể lên kế hoạch cho việc chi tiêu của bản thân hoặc sắp xếp đồ đạc khi chuyển nhà để đạt được hiệu quả nhất... Và thường người ta không nhận ra các kiến thức toán đã được sử dụng ngầm ẩn trong những tình huống trên.

Tuy nhiên, ở lớp học toán, học sinh ít có cơ hội xây dựng, phát triển khả năng sử dụng toán để hiểu và giải quyết những vấn đề thực tiễn, mà thường thực hiện những nhiệm vụ quen thuộc đã được dạy cách làm như thế nào, nghĩa là có quy trình, có thuật toán. Lấy ví dụ trong chương Hàm số bậc nhất và bậc hai, Đại số 10 nâng cao, học sinh được yêu cầu tìm tập xác định, khảo sát sự biến thiên, xét tính chẵn lẻ, phép tịnh tiến đồ thị, vẽ

\* NCS, Trường Đại học Sư phạm TP HCM

đồ thị của hàm số... Điều này sẽ không chuẩn bị cho các em cách giải quyết những vấn đề không quen thuộc trong toán học hoặc các lĩnh vực khác. Những áp dụng toán được giới thiệu trong chương trình phổ thông hiện nay chủ yếu nhằm mục đích minh họa và nhấn mạnh các khái niệm và kỹ năng toán được dạy. Chẳng hạn bài toán bóng đá (tr. 60), bài toán về công Arch (tr. 61), bài toán tàu vũ trụ (tr. 62) (Đại số 10 – Nâng cao) là 3 bài tập của chương hàm số bậc nhất và bậc hai được đặt trong ngữ cảnh thực tế (tổng số bài tập của chương là 46 bài); tuy nhiên, yêu cầu đối với học sinh được xác định rất rõ ràng là tìm hàm số bậc hai có phần đồ thị trùng với đồ thị được cho tương ứng của mỗi bài toán... Những minh họa như vậy là quan trọng nhưng không đủ để học sinh có thể mô hình hóa các tình huống thực tế, chọn và sử dụng những kiến thức, kỹ năng toán phù hợp (từ những nội dung toán đã được học chứ không chỉ liên quan đến chủ đề các em đang được dạy) để giải quyết vấn đề khi chúng xuất hiện.

Lí do mà toán học luôn chiếm một thời lượng lớn trong chương trình, từ trong lịch sử cho đến nay, là vì người ta nhận thấy lợi ích của toán học trong thực tiễn. Trước đây, mục đích của việc dạy toán là trang bị những kỹ năng để tính toán hàng ngày, ngày nay tất cả những kỹ năng cơ bản đó có thể nhờ vào các thiết bị công nghệ thông tin.

Những thập kỉ gần đây, sự cần thiết để thúc đẩy mô hình hóa (MHH) toán học trong nhà trường ngày càng được chấp nhận rộng rãi nhằm đáp ứng mục tiêu

tăng cường giáo dục toán theo hướng thực tế được đặt ra bởi nhiều quan điểm giáo dục từ giữa thế kỉ XX đến nay.

## 2. Mô hình hóa toán học là gì?

*Mô hình* là một mẫu, một kế hoạch, một đại diện, một minh họa được thiết kế để mô tả cấu trúc, cách vận hành của một đối tượng, một hệ thống hay một khái niệm. Mô hình theo ý nghĩa vật lí của nó, đó là bản sao, thường thì nhỏ hơn của một đối tượng. Mô hình đó có cùng nhiều tính chất với đối tượng gốc: nó có cùng những điểm đặc trưng, có thể là màu sắc thậm chí cả chức năng với đối tượng mà mô hình đó biểu diễn. Một mô hình lí thuyết của một sự vật hiện tượng là một tập hợp các quy tắc biểu diễn sự vật hiện tượng đó trong đầu của người quan sát [1].

*MHH toán học* là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tế sang một vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận [7].

MHH toán học là một hoạt động phức hợp, đòi hỏi học sinh phải có nhiều năng lực khác nhau trong các lĩnh vực toán học khác nhau cũng như có kiến thức liên quan đến các tình huống thực tế được xem xét. Thông qua MHH, học sinh học cách sử dụng các biểu diễn khác nhau, lựa chọn và áp dụng các phương pháp, công cụ toán học phù hợp trong việc giải quyết vấn đề.

Việc đưa MHH toán học vào dạy và học toán đã được nhiều sự ủng hộ vì những lí do sau:

- MHH là một phương tiện góp phần phát triển các kĩ năng, năng lực toán học và thái độ của học sinh, cụ thể là khả năng giải quyết vấn đề, tính tò mò, sáng tạo, suy luận toán học và giao tiếp.

- MHH toán học cho phép học sinh kết nối toán học nhà trường với thế giới thực, chỉ ra khả năng ứng dụng của các ý tưởng toán. MHH cung cấp cho học sinh một bức tranh rộng hơn, phong phú hơn về toán học, giúp cho việc học toán trở nên ý nghĩa hơn, giúp học sinh thấy được mối liên hệ giữa toán học với thực tế và ngược lại.

- MHH hỗ trợ việc học các khái niệm và quá trình toán học của học sinh như tạo động cơ, giúp hình thành và hiểu khái niệm..., đặc biệt củng cố việc hiểu toán khi áp dụng vào những tình huống mới.

- MHH giúp trang bị cho học sinh các năng lực để có thể sử dụng toán giải quyết những tình huống của cuộc sống.

MHH toán học trong giáo dục chính thức xuất hiện đầu tiên tại hội nghị của Freudenthal (1968) ([4]), tại đây các nhà giáo dục toán đã đưa ra nhiều vấn đề liên quan đến MHH: Tại sao phải dạy toán để có ích (Freudenthal)? Tại sao nhiều học sinh không thể sử dụng kiến thức toán đã học để giải quyết các vấn đề thực tế mặc dù đạt được chứng chỉ xuất sắc về môn học này (Siller)? Dạy toán là phải dạy sao cho học sinh có thể áp dụng toán vào những tình huống đơn giản của cuộc sống (Klamkin)... Mối liên hệ giữa toán và MHH tiếp tục được đề cập đến tại hội nghị các nước nói tiếng Đức (1977) – bao gồm các thảo luận về những khía cạnh của toán học ứng dụng trong giáo dục.

Một dấu mốc quan trọng trong việc giới thiệu MHH toán học vào nhà trường là nghiên cứu của Pollak năm 1979: Ảnh hưởng của toán học lên các môn học khác ở nhà trường. Theo ông, giáo dục toán phải có trách nhiệm dạy cho học sinh cách sử dụng toán trong cuộc sống hàng ngày. Từ đó, dạy và học MHH trong nhà trường trở thành một chủ đề nổi bật trên phạm vi toàn cầu. Ví dụ, nghiên cứu của PISA, chương trình đánh giá học sinh quốc tế (Programme for International Student Assessment), nhấn mạnh mục đích của giáo dục toán là phát triển khả năng học sinh sử dụng toán trong cuộc sống hiện tại và tương lai. Hội nghị quốc tế về dạy mô hình hóa và áp dụng toán ICTMA (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) tổ chức 2 năm một lần với mục đích thúc đẩy ứng dụng và MHH trong tất cả các lĩnh vực của giáo dục toán. Xu hướng đưa MHH toán học vào chương trình, sách giáo khoa với các mức độ khác nhau ngày càng gia tăng. Chẳng hạn ở Đức, Hà Lan, Úc, Mĩ, MHH toán học là một trong những năng lực bắt buộc của chuẩn giáo dục quốc gia về môn toán. Ở Singapore, MHH toán học được đưa vào chương trình toán năm 2003 với mục đích nhấn mạnh tầm quan trọng của MHH trong việc học toán cũng như đáp ứng các thách thức của thế kỉ XXI...

Các nhiệm vụ MHH toán học thường yêu cầu học sinh phát triển một mô hình của mình và khám phá để đáp ứng những yêu cầu nào đó, cung cấp cơ hội để học sinh phát triển kĩ năng giải

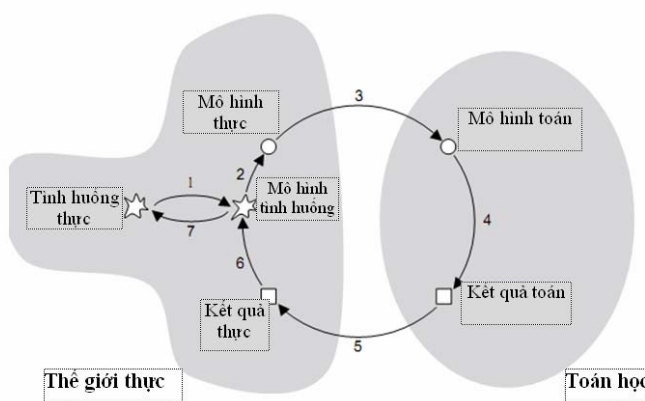
quyết vấn đề và khảo sát toán. Đối với nhiệm vụ MHH, một công cụ chiến lược cụ thể là cần thiết, đó là chu trình MHH toán học.

**3. Chu trình mô hình hóa toán học**

Nhiều sơ đồ đã được sử dụng để chỉ ra bản chất của hoạt động MHH toán học,

như là một hướng dẫn để thiết kế các nhiệm vụ MHH và thực hiện MHH trong lớp học.

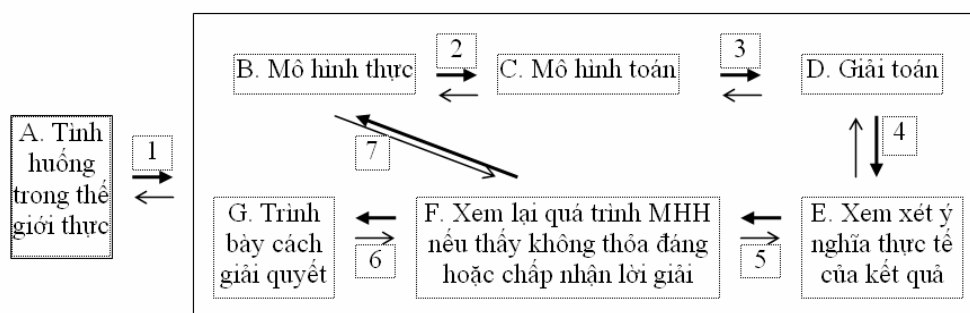
a. Sơ đồ của Blum (2005): sơ đồ này được xem là cơ sở cho tất cả các hoạt động MHH và những thay đổi của các chu trình MHH ngày nay.



**Sơ đồ 1.** Chu trình MHH 7 bước của Blum [2]

- Bước 1: Hiểu tình huống được cho, xây dựng một mô hình cho tình huống đó;
- Bước 2: Đơn giản hóa tình huống và đưa các biến phù hợp vào để được mô hình thực của tình huống;
- Bước 3: Chuyển từ mô hình thực sang mô hình toán;
- Bước 4: Làm việc trong môi trường toán học để đạt được kết quả toán;
- Bước 5: Thể hiện kết quả trong ngữ cảnh thực tế;
- Bước 6: Xem xét tính phù hợp của kết quả hay phải thực hiện chu trình lần 2;
- Bước 7: Trình bày cách giải quyết.

b. Sơ đồ của Stillman (2007)



**Sơ đồ 2.** Chu trình MHH của Stillman [7]

Các mục A-G biểu diễn các bước của quá trình MHH, các mũi tên đậm biểu thị sự chuyển đổi giữa các bước. Toàn bộ quá trình MHH là đi theo dấu mũi tên cùng chiều kim đồng hồ. Quá trình này kết thúc bởi việc thể hiện kết quả MHH hoặc tiếp tục một chu trình MHH khác nếu kết quả là không thỏa đáng ở một phương diện nào đó. Các hoạt động trí tuệ mà người MHH cần nỗ lực để chuyển từ một bước này sang bước tiếp theo được mô tả bởi các bước 1-7. Các mũi tên ngược lại (màu nhạt) nhấn mạnh sự tồn tại của hoạt động phản ánh, nghĩa là người thực hiện MHH có thể quay lại ở bất kỳ bước nào của chu trình

để xem xét nếu không thể tiếp tục thực hiện được.

c. Sơ đồ theo PISA (2006) gồm 5 bước :

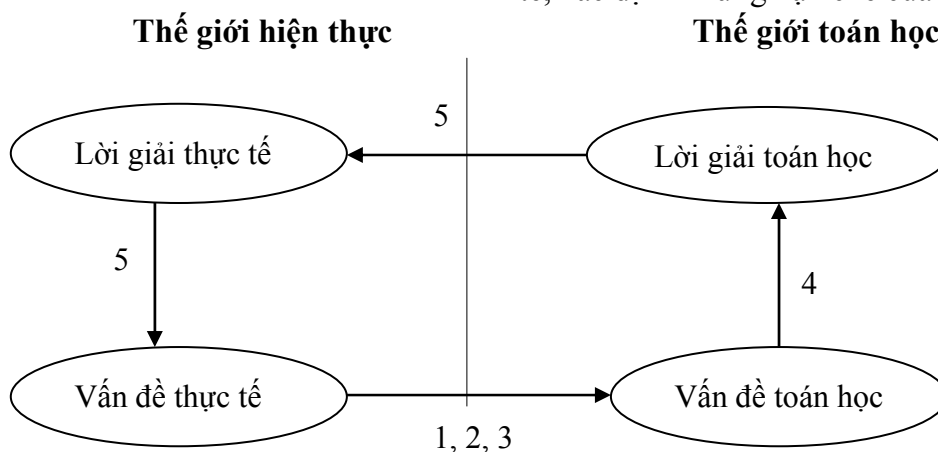
Bước 1: Bắt đầu từ một vấn đề được đặt ra trong thực tế;

Bước 2: Nhận ra các kiến thức toán phù hợp với vấn đề, tổ chức lại vấn đề theo các khái niệm toán học;

Bước 3: Không ngừng cắt tĩa các yếu tố thực tế để chuyển vấn đề thành một bài toán mà thể hiện trung thực cho tình huống;

Bước 4: Giải quyết bài toán;

Bước 5: Làm cho lời giải của bài toán có ý nghĩa đối với tình huống thực tế, xác định những hạn chế của lời giải.



**Sơ đồ 3.** Chu trình MHH theo PISA [5]

Các chu trình MHH toán học giới thiệu trên đây đều gồm 4 yếu tố chính: toán học hóa, làm việc với toán, chuyển đổi và phản ánh. Các yếu tố này mô tả những hoạt động mà học sinh sẽ thực hiện trong suốt quá trình MHH.

Quá trình MHH bắt đầu với 1 vấn đề thực tế - một vấn đề xuất phát từ thế giới thực với các dữ liệu thực.

- Toán học hóa: là quá trình chuyển đổi từ vấn đề thực sang vấn đề toán bằng cách thiết lập một mô hình toán học. Để làm được điều này, học sinh đòi hỏi phải hiểu vấn đề, nghiên cứu thông tin được cho, loại bỏ các thông tin không cần thiết, đưa ra các giả thuyết phù hợp và đơn giản hóa vấn đề để có thể giải quyết. Học sinh cần nhận ra các khái niệm toán học, các biến và biểu diễn vấn đề dưới dạng

toán học, đưa ra một mô hình toán như hình vẽ, đồ thị, hàm số hoặc hệ các phương trình...

- Giải toán: ở bước này đòi hỏi học sinh lựa chọn, sử dụng phương pháp và công cụ phù hợp để giải quyết vấn đề. Sản phẩm cuối cùng ở bước này là một kết quả toán học.

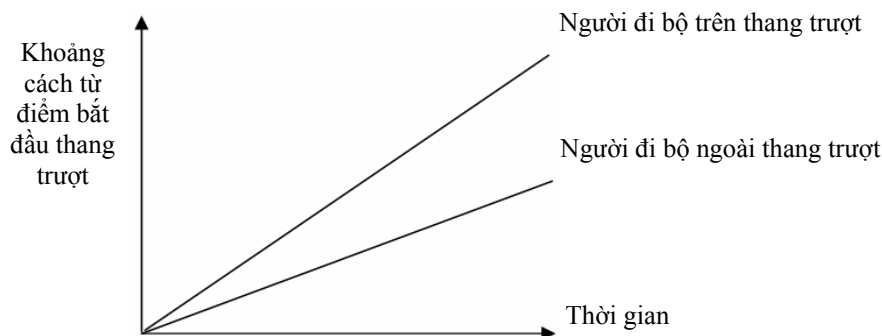
- Chuyển đổi: xem xét kết quả toán học trong ngữ cảnh của tình huống thực tế ban đầu.

- Phản ánh: xem lại các giả thuyết và những hạn chế của mô hình, các phương pháp cũng như công cụ được sử dụng trong giải quyết vấn đề. Điều này có thể dẫn đến một sự cải tiến trong mô hình cũng như lời giải hoặc tạo ra một chu trình mới nếu cần thiết.

#### 4. Ví dụ

Bên phải là hình ảnh thang trượt ở một sân bay. Đồ thị dưới đây chỉ ra sự so

sánh giữa một người đi bộ trên thang trượt và một người đi bộ ở lối đi bên cạnh thang trượt. Giả sử rằng trong đồ thị, tốc độ đi bộ của hai người gần như là giống nhau. Hãy vẽ thêm vào đồ thị một đường thẳng biểu diễn khoảng cách theo thời gian của một người chỉ đứng trên thang trượt, biết tốc độ của thang trượt nhỏ hơn tốc độ trung bình của một người đi bộ.



Đây là mô hình thực (theo sơ đồ Blum) của một tình huống thực tế, đã được giáo viên đơn giản hóa, thêm vào các giả thiết, thông tin để phù hợp với đối tượng học sinh lớp 10. Tuy nhiên khi đọc tình huống, học sinh vẫn chưa thấy xuất hiện các yếu tố toán học cần sử dụng để

giải quyết. Quá trình MHH có thể thực hiện như sau:

- Toán học hóa: Để thiết lập mô hình toán của tình huống, học sinh cần:
  - Hiểu vấn đề đặt ra;
  - Nhận ra các kiến thức toán liên quan. Trong trường hợp này là các hàm số bậc nhất biểu diễn khoảng cách

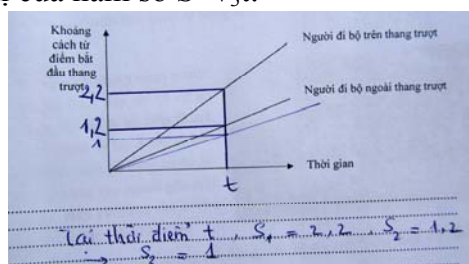
theo thời gian. Hàm số của đồ thị tương ứng với người đi bộ trên thang trượt, người đi bộ ngoài thang trượt, người đứng trên thang trượt lần lượt là  $S=v_1t$ ,  $S=v_2t$ ,  $S=v_3t$ , trong đó  $v_1=v_2+v_3$  và  $v_2>v_3$ ;

- Vẽ đồ thị hàm số  $S=v_3t$  trong cùng một hệ trục.

Giải toán:

- Học sinh có thể dựa vào tính chất hệ số góc của đồ thị hàm số bậc nhất để vẽ đồ thị thứ 3 với giả thiết  $v_3<v_2<v_1$ .

- Học sinh cũng có thể cho các giá trị cụ thể của  $v_2, v_3$  sao cho  $v_3<v_2$ , hoặc lấy giá trị xấp xỉ  $S_3=S_1-S_2$  trên đồ thị ứng với cùng một thời gian  $t$ , rồi vẽ đồ thị của hàm số  $S=v_3t$ .



- Kết quả: vẽ được một đường thẳng nằm phía dưới hai đường thẳng đã cho, nhưng phải gần đường thẳng “người đi bộ ngoài thang trượt” hơn so với trục thời gian.

- Chuyển đổi: Học sinh cần biết rằng trên thực tế thì người đi bộ trên thang trượt sẽ nhanh hơn người đi bộ ngoài thang trượt, và người đứng trên thang trượt sẽ chậm hơn hai trường hợp kia.

- Phản ánh: Học sinh có thể xem xét liệu đồ thị mình vẽ như vậy đã hợp lí chưa? Nếu không có giả thiết “tốc độ của thang trượt nhỏ hơn tốc độ của một người đi bộ” thì kết quả có còn giống như vậy không? Những kết luận nào có thể được đưa ra từ lời giải?

### 5. Các tiếp cận mô hình hóa trong giáo dục toán

Nếu phân tích các ví dụ về mô hình hóa hiện nay, chúng ta sẽ thấy rằng có rất nhiều hướng tiếp cận mô hình hóa toán học khác nhau. Các tiếp cận này bắt nguồn từ các quan điểm lí thuyết khác nhau, có mục đích khác nhau và đặc trưng cho các khía cạnh khác nhau của MHH ([3], [6]):

- Quan điểm “Epistemology” của người Đức: tập trung vào khả năng người học tạo ra mối liên hệ giữa toán học và thực tế. Theo quan điểm này, sự phát triển của lí thuyết toán là một bộ phận của quá trình MHH thể hiện qua bộ ba Tình huống – Mô hình – Lí thuyết, nghĩa là các mô hình được xây dựng từ tình huống thực tiễn và đi đến sự phát triển của một lí thuyết toán thông qua thúc đẩy sự kết nối giữa hoạt động MHH và hoạt động toán. Freudenthal có thể xem là người đi đầu theo hướng tiếp cận này và sau đó được phát triển bởi Stainer, Revuz, Garcia, Bosh.

- Quan điểm “Pragmatism” của Pollak: quan tâm đến khả năng người học áp dụng toán để giải quyết những vấn đề thực tế, giúp họ hiểu biết hơn về thế giới thực và thúc đẩy các năng lực MHH. Quá trình MHH là một quá trình hoàn chỉnh, được thực hiện giống như một nhà toán học ứng dụng thực hiện, với mục đích giải quyết một vấn đề thực tế chứ không phải để phát triển một lí thuyết mới. Các nhà giáo dục toán tiêu biểu cho tiếp cận này là Burkhardt, Kaiser & Schwarz.

- Quan điểm “Education”: phần lớn các tiếp cận được phát triển trong lĩnh

vực MHH thuộc quan điểm này (Blum, Niss, Blomhoj, Jensen, Maass, Galbraith, Stillman). Quan điểm này chú trọng tích hợp MHH vào dạy học toán; thông qua các ví dụ thực tế và mối quan hệ của chúng đối với toán học để xây dựng việc hiểu và thúc đẩy quá trình học; quan tâm đến các bước của quá trình MHH; phát triển các năng lực MHH cũng như ý nghĩa của việc học toán.

- Quan điểm “Socio-critic”: nhấn mạnh vai trò, chức năng của toán học nói chung, của mô hình hóa toán học nói riêng đối với sự phát triển tư duy phê phán, tư duy phản ánh của người học trước những tình huống trong xã hội. Ví dụ như D’Ambrosio, Araujo, Barbosa.

- Quan điểm “Context”: phát triển các hoạt động học tập, cho phép học sinh hiểu được ý nghĩa của toán học thông qua các tình huống thực tế thường gặp trong cuộc sống hàng ngày được MHH (Lesh&Doerr).

- Quan điểm “Cognition”: Đây là một tiếp cận mới về MHH, quan tâm đến hoạt động nhận thức của học sinh qua quá trình mô hình hóa toán học, thông qua việc phân tích các quá trình mô hình hóa khác nhau với các kiểu tình huống khác nhau (khác về mức độ xác thực và độ phức tạp) để nhận ra những rào cản, khó khăn của học sinh liên quan đến MHH. Các nhà nghiên cứu được xếp theo

quan điểm này là Blum & Leiss, Borromeo Ferri, Carreira.

## 6. Kết luận

Khi thực hiện MHH toán học, học sinh có thể gặp nhiều khó khăn như: không hiểu vấn đề được đặt ra bởi tình huống thực tế; khó khăn trong việc xác định giả thiết, nhận ra các biến quan trọng để thiết lập mô hình toán; hạn chế bởi kiến thức toán, khả năng để lựa chọn một phương pháp giải phù hợp cũng như giải thích kết quả... Nếu giáo viên hiểu được những khó khăn của học sinh để có những định hướng phù hợp, chẳng hạn quyết định cho học sinh thực hiện toàn bộ hay chỉ một vài bước của quá trình MHH; giới thiệu chu trình MHH đến học sinh thông qua việc sử dụng những ví dụ thực tế khi dạy và quan trọng là giáo viên nên quen thuộc với bốn yếu tố chính của quá trình MHH thì việc đưa MHH vào dạy học toán ở nhà trường hoàn toàn có thể thực hiện được. Chu trình MHH không bắt buộc sử dụng đối với học sinh mà đây xem như là một hướng dẫn, phương tiện trợ giúp khi các em gặp khó khăn trong quá trình giải quyết vấn đề. Học sinh học để sử dụng sơ đồ này bất cứ khi nào phù hợp. Việc giới thiệu sơ đồ một cách cẩn thận và từng bước là cần thiết, cũng như việc sử dụng lặp đi lặp lại sơ đồ sẽ giúp học sinh biết cách sử dụng nó.

*(Xem tiếp trang 129)*



**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Nguyễn Thị Tân An, Trần Dũng (2009), “Sử dụng mô hình hóa toán học trong việc dạy học toán”, *Tạp chí Giáo dục*, (219).
2. Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman (2011), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, Springer.
3. Gabriele Kaiser, Bharath Sriraman (2006), *A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education*, ZDM Vol 38(3).
4. Hans-Stefan Siller, *Modelling in Classroom. ‘Classical Models’ (in Mathematics Education) and recent developments.*  
[www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/...ESU-6/.../1-13-Siller.pdf](http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/...ESU-6/.../1-13-Siller.pdf)
5. OECD (2003), *The Pisa 2003 - Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OECD, Paris, France.
6. Rita Borromeo Ferri (2006). *Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process*. ZDM Vol.38(2).
7. Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn, Mogens Niss (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 01-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2012)