SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VOLTERRA ĐỐI SỐ LỆCH PHI TUYẾN LOẠI HYPERBOLIC

LÊ HOÀN HÓA*, NGUYỄN NGỌC TRỌNG**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic sau :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\left(u(t), u_t\right) + \int_0^t L\left(t, s, u(s), u_s\right) ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \qquad (T)$$

Từ khóa: nghiệm tuần hoàn, phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic.

ABSTRACT

The existence of periodic solutions for the nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument

In this paper, we prove the existence of periodic solutions for the following nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\left(u(t), u_t\right) + \int_0^t L\left(t, s, u(s), u_s\right) ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \qquad (T)$$

Keywords: periodic solution, nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument.

1. Giới thiệu

Trong [3], chúng tôi đã xem xét tính khác rỗng, tính continuum và tính R_δ của tập nghiệm phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến loại Hyperbolic có cả sự xuất hiện đối số lệch

---

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + L(t)u_t + V(t, u(t)) + \int\limits_0^t K(t, s, u(s), u_s)\,ds + f(t),\ t \geq 0, \\ u_0 = \varphi \in C_r. \end{cases}$$

Trong bài báo [1], chúng tôi nghiên cứu sự phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic dạng (T). Kết quả trên là điểm tựa cho sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình (T).

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình (T).

2. Kết quả được sử dụng

Điều kiện (A)**([4]).** Cho X là không gian lồi địa phương và P là một họ nửa chuẩn tách trên X, D là một tập con của X và $U : D \to X$. Với bất kì $a \in X$, ta định nghĩa $U_a : D \to X$ bởi $U_a(x) = U(x) + a$.

Toán tử $U : D \to X$ gọi là thỏa điều kiện (A) trên tập con Ω của X nếu:

$(A.1)$ Với bất kì $a \in \Omega : U_a(D) \subset D$,

$(A.2)$ Với bất kì $a \in \Omega$ và $p \in P$, tồn tại $k_a \in \mathbb{N}_0$ với tính chất: Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $r \in \mathbb{N}$ và $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ thỏa $\alpha_a^p(x, y) < \varepsilon + \delta$ thì $\alpha_a^p\left(U_a^r(x), U_a^r(y)\right) < \varepsilon$, ở đây $\alpha_a^p(x, y) = \max\left\{p\left(U_a^i(x) - U_a^j(y)\right) : i, j = \overline{0, k_a}\right\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Định lí (B)**([4]).**

Cho X là không gian lồi địa phương đầy đủ theo dãy với họ nửa chuẩn tách P và giả sử U, C là toán tử trên X sao cho:

$(B.1)$ U thỏa điều kiện (A) trên X;

$(B.2)$ Với bất kì $p \in P$, tồn tại $k_p \geq 0$ (k_p phụ thuộc vào p) sao cho:

$p\left(U(x) - U(y)\right) \leq k_p p(x - y)$ với mọi $x, y \in X$;

$(B.3)$ Tồn tại $x_0 \in X$ với tính chất: Với mọi $p \in P$ tồn tại $r \in \mathbb{N}$ và $\lambda \in [0, 1)$ (r, λ phụ thuộc vào p) sao cho $p\left(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)\right) \leq \lambda p(x - y)$ với mọi $x, y \in X$;

$(B.4)$ C hoàn toàn liên tục và $p\left(C(A)\right) < \infty$ với $A \subset X$ và $p(A) < \infty$

trong đó $p(A) = \sup\left\{p(x) : x \in A\right\}$;

(B.5) $\lim\limits_{p(x)\to\infty} \dfrac{p(C(x))}{p(x)} = 0$ với mọi $p \in P$.

Khi đó $U + C$ có điểm bất động.

3. Giới thiệu bài toán

Cho $r > 0$. Ta kí hiệu $|\bullet|$ là chuẩn của không gian Banach E và $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$,

$\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t \geq s\}$ và $\Delta_n = \Delta \cap [0,n]^2$ với $n \in \mathbb{N}$,

$C_r = C([-r,0],E)$ với chuẩn $|u|_r = \sup\{|u(t)| : t \in [-r,0]\}$,

$X = C([-r,\infty),E)$ là không gian Frechet các hàm liên tục từ $[-r,\infty)$ vào E với họ nửa chuẩn $\{\|\bullet\|_n\}_n$ được định nghĩa như sau: $\|x\|_n = \sup\{|x(t)| : t \in [-r,n]\}, n \in \mathbb{N}$.

Đặt $F = E \times C_r$ với chuẩn $\|(x,y)\| = |x| + |y|_r$. Đặt $\|\bullet\|_L$ là chuẩn trên không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục.

Với $u \in C([-r,\infty),E)$ và $t \geq 0$ đặt $u_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$u_t(\theta) = u(t+\theta)$ với $\theta \in [-r,0]$.

Xét phương trình

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t),u_t) + \displaystyle\int_0^t L(t,s,u(s),u_s)\,ds + f(t),\ t \geq 0, \\ u_0 = \varphi \in C_r, \end{cases} \tag{T}$$

trong đó $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ $E \times C_r$ vào E, tuần hoàn với chu kì $\omega > 0$ theo t và $f : \mathbb{R}_+ \to E$ liên tục, tuần hoàn với chu kì $\omega > 0$. Hơn nữa ta giả thiết:

(E.1) $t \mapsto A(t)$ liên tục ;

(E.2) $L : \Delta \times F \to E$ là hàm L^1-Caratheodory, nghĩa là

(E.2.1) Với mọi $z \in F$ hàm $\tau \mapsto L(\tau,z)$ Borel đo được ;

(E.2.2) Với hầu hết $\tau \in \Delta$ hàm $z \mapsto L(\tau,z)$ liên tục ;

(E.2.3) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và mỗi hằng số $C > 0$, tồn tại hàm không âm $h_C \in L^1([0,n]^2)$ và tập compact K_C trong E sao cho $L(t,s,z) \in h_C(t,s)K_C$ với mọi $z \in \overline{B_F}(0,C)$ và với hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$ (trong đó $L^1(\Omega)$ là không gian các hàm

$u:\Omega\to\mathbb{R}$ khả tích trên Ω). Hơn nữa khi $n\geq\omega$ thì $\int_0^\omega h_C(t,s)ds=0$ với mọi $t\in[\omega,n]$;

(E.3) L hầu tuần hoàn với chu kì ω theo (t,s), tức là $L(t+\omega,s+\omega,z)=L(t,s,z)$ với mọi $z\in F$ và hầu hết $(t,s)\in\Delta$;

(E.4) $\lim\limits_{\|z\|\to\infty}\dfrac{|L(t,s,z)|}{\|z\|}=0$ đều theo (t,s) trên mỗi tập bị chặn bất kì của Δ.

4. Sự tồn tại nghiệm tuần hoàn

Tương tự [2], ta đặt họ toán tự bị chặn $\{S(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ với $S(t,s):C_r\to C_r$ phụ thuộc liên tục theo $(t,s)\in\Delta$ và định nghĩa bởi $S(t,s)=y_t(\varphi)$ trong đó $y(\varphi)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} y'(t)=A(t)(y(t),y_t),t\geq s\geq 0,\\ y_s=\varphi. \end{cases}$$ (chú ý là $y_t(\varphi):=(y(\varphi))_t$).

Giả sử $\{V(t,s)\}_{s\geq 0,t\geq -r}$ là họ toán tử toán tử tuyến tính bị chặn trên E, liên tục mạnh theo (t,s) và thỏa phương trình dưới đây

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,s)=A(t)(V(t,s),V_t(.,s)),\ t\geq s\geq 0,\\ V(t,s)=\begin{cases} I, & t=s\\ 0, & s-r\leq t<s \end{cases}, \end{cases}$$

trong đó $V_t(.,s)(\theta)=V(t+\theta,s),\ \theta\in[-r,0]$.

Giả sử $\{X(\theta)\}_{\theta\in[-r,0]}$ là họ toán tử tuyến tính bị chặn trên C_r định nghĩa bởi

$$\begin{cases} X(\theta),-r\leq\theta<0,\\ X(0)=I. \end{cases}$$

Khi đó ta có $V_t(.,s)=S(t,s)X(.)$.

Đặt $S\equiv S(\omega,0)$. Chứng minh tương tự [2] ta có bổ đề 1.

Bổ đề 1. x *là nghiệm của* (T) *khi và chỉ khi*

$$x_t(\varphi) = S(t,0)\varphi + \int_0^t V_t(.,s)\left[\int_0^s L(s,\tau,x(\tau),x_\tau) + f(s)\right]ds.$$

Bổ đề 2. ([2]) S *thỏa các điều kiện (B.1) - (B.3) của định lí (B).*

Định lí.

Giả sử các điều kiện (E.1)-(E.4) đều thỏa mãn. Hơn nữa

(E.5)Với mọi $\varphi \in C_r$*, phương trình* (T) *có nghiệm duy nhất ;*

(E.6)Tồn tại $a, b > 0$ *sao cho* $\|S(t,s)\| \le be^{-a(t-s)}$ *với mọi* $(t,s) \in \Delta$.

Khi đó phương trình sau có nghiệm tuần hoàn chu kì ω *trên* $\mathbb{R}_+$.

$$u'(t) = A(t)(u(t),u_t) + \int_0^t L(t,s,u(s),u_s)ds + f(t),\ t \ge 0. \qquad (E)$$

Chứng minh:

Với $t \ge 0$ đặt $T(t): C_r \to C_r$ định bởi $T(t)(\varphi) = x_t(\varphi)$ với $x_t(\varphi)$ là nghiệm của phương trình (T). Đặt $T \equiv T(\omega)$.

Bổ đề 3.

Nếu T *có điểm bất động là* ψ *thì phương trình* (E) *có nghiệm tuần hoàn chu kì* ω *là* $x(\psi)$.

Chứng minh bổ đề 3:

Đầu tiên ta chứng minh $T(t+\omega) = T(t)T(\omega)$.

Với $\varphi \in C_r$ ta có $T(t)(T(\omega)(\varphi)) = T(t)(x_\omega(\varphi)) = x_t(x_\omega(\varphi))$ và $T(t+\omega)(\varphi) = x_{t+\omega}(\varphi)$.

Đặt $H(t,x) = \int_0^t L(t,s,x(s),x_s)ds + f(t)$. Ta có

$$\begin{cases} x'(\varphi)(t) = A(t)(x(\varphi)(t),x_t(\varphi)) + H(t,x(\varphi)), t \ge 0, \\ x_0(\varphi) = \varphi. \end{cases}$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x'(\varphi)(t+\omega) = A(t+\omega)(x(\varphi)(t+\omega),x_{t+\omega}(\varphi)) + H(t+\omega,x(\varphi)), t \ge 0, \\ x_0(\varphi) = \varphi. \end{cases}$$

Ta thấy với mỗi $x(\varphi)$ và $t > 0$ tồn tại $n \in \mathbb{N}, n > t + \omega$ sao cho $\left\|\left(x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right)\right\| \le n$ với mọi $s \in [0, n]$. Vậy theo (E.2.3) tồn tại hàm không âm $h \in L^1\left([0, n]^2\right)$ và $M > 0$ sao cho $\left|L\left(s, \tau, \left(x(\varphi)(\tau), x_\tau(\varphi)\right)\right)\right| \le Mh(s, \tau)$ với hầu hết $(s, \tau) \in \Delta_n$.

Ta có $\int\limits_0^\omega \left|L\left(t+\omega, s, x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right)\right| ds \le M\int\limits_0^\omega h(t+\omega, s)\, ds = 0$ (vì $t + \omega \in [\omega, n]$).

Vậy $\int\limits_0^\omega L\left(t+\omega, s, x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right) ds = 0$. Do đó

$$H\left(t+\omega, x(\varphi)\right) = \int\limits_0^\omega L\left(t+\omega, s, x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right) ds$$
$$+ \int\limits_\omega^{t+\omega} L\left(t+\omega, s, x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right) ds + f(t+\omega).$$

Vì f tuần hoàn chu kì ω và $\int\limits_0^\omega L\left(t+\omega, s, x(s), x_s\right) ds = 0$ nên

$$H\left(t+\omega, x(\varphi)\right) = \int\limits_0^t L\left(t+\omega, s+\omega, x(\varphi)(s+\omega), x_{s+\omega}(\varphi)\right) ds + f(t).$$

Từ (E.3) ta có $H\left(t+\omega, x(\varphi)\right) = \int\limits_0^t L\left(t, s, x(\varphi)(s+\omega), x_{s+\omega}(\varphi)\right) ds + f(t)$.

Vì $A(t)$ tuần hoàn chu kì ω theo t nên ta có

$$x'(\varphi)(t+\omega) = A(t)\left(x(\varphi)(t+\omega), x_{t+\omega}(\varphi)\right) + \int\limits_0^t L\left(t, s, x(\varphi)(s+\omega), x_{s+\omega}(\varphi)\right) ds + f(t).$$

Đặt $y(\varphi)(t) = x(\varphi)(t+\omega)$ với mọi $t \in [-r, \infty)$. Khi đó ta có $y_0(\varphi) = x_\omega(\varphi)$ và $y_t(\varphi) = x_{t+\omega}(\varphi)$. Vậy ta có

$$\begin{cases} y'(\varphi)(t) = A(t)\left(y(\varphi)(t), y_t(\varphi)\right) + \int\limits_0^t L\left(t, s, y(\varphi)(s), y_s(\varphi)\right) ds + f(t), t \ge 0, \\ y_0(\varphi) = x_\omega(\varphi). \end{cases}$$

Vậy $y(\varphi)$ và $x\left(x_\omega(\varphi)\right)$ cùng là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t), u_t) + \int_0^t L(t, s, u(s), u_s)ds + f(t),\ t \ge 0, \\ u_0 = x_\omega(\varphi). \end{cases}$$

Vì phương trình này có nghiệm duy nhất nên $y(\varphi) = x(x_\omega(\varphi))$. Do đó

$x_{t+\omega}(\varphi) = y_t(\varphi) = x_t(x_\omega(\varphi))$. Vậy $T(t)T(\omega) = T(t+\omega)$.

Đặt $U: C_r \to C_r$ định bởi $U(\varphi) = \int_0^\omega V_\omega(.,s)H(s, x(\varphi))ds$.

Vì $T \equiv T(\omega)$ nên từ bổ đề 1 ta có

$$T(\varphi) = x_\omega(\varphi) = S(\omega, 0)\varphi + \int_0^\omega V_\omega(.,s)\left[\int_0^s L(s, \tau, x(\tau), x_\tau) + f(s)\right]ds.$$

Vậy $T = S + U$.

Nếu T có điểm bất động là ψ thì ta có $\psi = T(\psi) = T(\omega)(\psi)$.

Vậy $T(t)T(\omega)(\psi) = T(t)(\psi)$. Do đó $T(t+\omega)(\psi) = T(t)(\psi)$, tức là $x_{t+\omega}(\psi) = x_t(\psi)$. Vậy phương trình (E) có nghiệm tuần hoàn chu kì ω là $x(\psi)$.

Bổ đề 4. U *thỏa điều kiện (B.4) và (B.5).*

Chứng minh bổ đề 4:

Ta cố định $n \in \mathbb{N}, n > \omega$.

Ta chứng minh U liên tục. Lấy $\{\varphi_k\}_k$ và $\varphi_k \to \varphi$. Ta đặt ánh xạ liên tục $\zeta: \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}_+ \times F$ định bởi $\zeta(t, x) = (t, x(t), x_t)$.

Do tính phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình (T) nên ta có $\lim_{k\to\infty} x(\varphi_k) = x(\varphi)$.

Vậy ta đặt $\Omega = \{x(\varphi_k) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x(\varphi)\}$ thì Ω là tập compact trong X. Vậy $\zeta([0, n] \times \Omega)$ là tập compact.

Do đó tồn tại $C > 0$ sao cho $\|(u(s), u_s)\| < C$ với mọi $(s, u) \in [0, n] \times \Omega$. Khi đó tồn tại hàm không âm $h_C \in L^1([0, n]^2)$ và $M > 0$ sao cho $|L(s, \zeta(\tau, u))| \le Mh_C(s, \tau)$ với mọi $u \in \Omega$ và hầu hết $(s, \tau) \in \Delta_n$.

Đặt $\rho_k(s, \tau) = |L(s, \zeta(\tau, x(\varphi_k))) - L(s, \zeta(\tau, x(\varphi)))|$.

Ta có $\rho_k(s,\tau) \le 2Mh_C(s,\tau)$.

Ta chú ý là do ζ liên tục nên $\lim_{k\to\infty}\left(x(\varphi_k)(s), x_s(\varphi_k)\right) = \left(x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right)$ với mọi $s \ge 0$. Vậy theo điều kiện $(E.2.2)$ ta có $\lim_{k\to\infty}\rho_k(s,\tau) = 0$ với hầu hết $(s,\tau) \in \Delta_n$.

Vậy theo định lí hội tụ bị chặn Lebesgue ta có $\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_n}\rho_k(s,\tau)dsd\tau = 0$.

Vì $(t,s) \mapsto V(t,s)$ liên tục nên tồn tại $m > 0$ để $\|V(t+\omega,s)\|_L \le m$ với mọi $t \in [-r,0]$ và $s \in [0,n]$.Mặt khác với mọi $t \in [-r,0]$ ta có

$$\left|U(\varphi_k)(t) - U(\varphi)(t)\right| \le \int_0^{\omega}\left(\|V(t+\omega,s)\|_L \int_0^s \rho_k(s,\tau)d\tau\right)ds$$

$$\le m\int_0^{\omega}\left(\int_0^s \rho_k(s,\tau)d\tau\right)ds \le m\int_{\Delta_n}\rho_k(s,\tau)dsd\tau.$$

Vậy $\left|U(\varphi_k) - U(\varphi)\right|_r \le m\int_{\Delta_n}\rho_k(s,\tau)dsd\tau$. Do đó $\lim_{k\to\infty}\left|U(\varphi_k) - U(\varphi)\right|_r = 0$.

Lấy Φ là tập bị chặn trong C_r. Chứng minh tương tự bước 1 của định lí 2 trong [1] ta thấy $\left\{\left(x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right) : s \in [0,n], \varphi \in \Phi\right\}$ bị chặn.

Do đó tồn tại $C > 0$ sao cho $\left\|\left(x(\varphi)(s), x_s(\varphi)\right)\right\| < C$ với mọi $(s,\varphi) \in [0,n] \times \Phi$. Khi đó tồn tại hàm không âm $h_C \in L^1\left([0,n]^2\right)$ và tập compact K_C trong E sao cho $L\left(t, \zeta(s, x(\varphi))\right) \in h_C(t,s)K_C$ với mọi $\varphi \in \Phi$ và hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$.

Từ [2] ta có ánh xạ liên tục $W : [0,\omega] \times E \to C_r$ định bởi $W(s,e) = V_\omega(.,s)(e)$

Vậy $B = W\left([0,n] \times K_C\right)$ và $G = W\left([0,n] \times f([0,n])\right)$ là tập compact. Do đó tập $D = B \bigcup G$ compact.

Ta có $V_\omega(.,s)L\left(s, \zeta(\tau, x(\varphi))\right) \in h_C(s,\tau)\left[V_\omega(.,s)(K_C)\right] \subset h_C(s,\tau)D$ với mọi $\varphi \in \Phi$ và hầu hết $(s,\tau) \in \Delta_n$. Hơn nữa $V_\omega(.,s)f(s) \in D$ với mọi $s \in [0,n]$.

Lấy nửa không gian đóng $\left\{z \in C_r : b^*(z) \le R\right\}$ chứa D, với $b^* \in (C_r)^*$ và $R > 0$. Để cho gọn ta đặt $z(s,\tau,\varphi) = V_\omega(.,s)L\left(s, \zeta(\tau, x(\varphi))\right)$.

Vậy $b^*\left(z(s,\tau,\varphi)\right) \le Rh_C(s,\tau)$ với mọi $\varphi \in \Phi$ và hầu hết $(s,\tau) \in \Delta_n$. Đồng thời $b^*\left(V_\omega(.,s)f(s)\right) \le R$ với mọi $s \in [0,n]$.

Ta đặt $a = \int_0^\omega \left(\int_0^s h_C(s,\tau)\,d\tau \right) ds + \omega > 0$. Ta thấy

$$b^*\left(U(\varphi)\right) = \int_0^\omega \left(\int_0^s b^*\left(z(s,\tau,\varphi)\right) d\tau \right) ds + \int_0^\omega b^*\left(V_\omega(.,s)f(s)\right) ds$$

$$\le R\int_0^\omega \left(\int_0^s h_C(s,\tau)\,d\tau \right) ds + \omega R = aR.$$

Vậy $b^*\left(\frac{1}{a}U(\varphi)\right) \le R$ tức là $\frac{1}{a}U(\varphi) \in \left\{ z \in C_r : b^*(z) \le R \right\}$. Vì giao của tất cả các nửa không gian đóng chứa D là bao lồi đóng $\overline{\text{conv}}(D)$ nên ta có $\frac{1}{a}U(\varphi) \in \overline{\text{conv}}(D)$. Vậy $U(\Phi) \subset a.\overline{\text{conv}}(D)$. Do đó $U(\Phi)$ compact tương đối. Do vậy U hoàn toàn liên tục.

Với $\varepsilon > 0$, tương tự [3] ta thấy tồn tại $R > 0$ và hàm không âm $h \in L^1\left([0,n]^2\right)$ sao cho $\left|L(t,s,z)\right| \le Rh(t,s) + \varepsilon\|z\|$ với mọi $z \in F$ và hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$. Vậy

$$\left|K(s,x(\varphi))\right| \le \int_0^s \left(Rh(s,\tau) + 2\varepsilon\left|x_\tau(\varphi)\right|_r \right) d\tau + \left|f(s)\right|$$

$$\le q + \int_0^s \left(Rh(s,\tau) + 2\varepsilon\left|x_\tau(\varphi)\right|_r \right) d\tau \quad \text{với mọi} \quad s \in [0,n], \quad \text{trong đó}$$

$\left|f(s)\right| \le q$ với mọi $s \in [0,n]$.

Chứng minh tương tự bước 1 của định lí 2 trong [1] ta thấy tồn tại $\alpha, \beta > 0$ sao cho $\left|x_t(\varphi)\right|_r \le \alpha|\varphi|_r\left[1 + \beta\varepsilon\left(\exp(m\varepsilon) - 1\right)\right]$ với mọi $t \in [0,\omega]$

Ta cũng thấy tồn tại $M > 0$ sao cho $\left\|V_\omega(.,s)\right\| \le M$ với mọi $s \in [0,\omega]$, trong đó $\left\|V_\omega(.,s)\right\| = \sup\left\{ \left|V_\omega(\theta,s)\right|_r : \theta \in [-r,0] \right\}$. Ta có

$$\left|U(\varphi)\right|_r \le \int_0^{\omega} \left\|V_\omega(.,s)\right\| \left|K(s, x(\varphi))\right|$$

$$\le M\int_0^{\omega}\left(q + \int_0^{s}\left(Rh(s,\tau) + 2\varepsilon\left|x_\tau(\varphi)\right|_r\right)d\tau\right)ds$$

$$\le Mq\omega + MR\int_0^{\omega}\left(\int_0^{s} h(s,\tau)\,d\tau\right)ds + 2\varepsilon M\int_0^{\omega}\left(\int_0^{s}\left|x_\tau(\varphi)\right|_r d\tau\right)ds.$$

Ta lại có $\left|x_\tau(\varphi)\right|_r \le \alpha\left|\varphi\right|_r\left[1+\beta\varepsilon\left(\exp(m\varepsilon)-1\right)\right]$.

Do đó $\left|U(\varphi)\right|_r \le d + d\varepsilon\left|\varphi\right|_r\left[1+\beta\varepsilon\left(\exp(m\varepsilon)-1\right)\right]$.

Vậy $\dfrac{\left|U(\varphi)\right|_r}{\left|\varphi\right|_r} \le \dfrac{d}{\left|\varphi\right|_r} + d\varepsilon\left[1+\beta\varepsilon\left(\exp(m\varepsilon)-1\right)\right]$.

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $\lim\limits_{\left|\varphi\right|_r \to \infty} \dfrac{\left|U(\varphi)\right|_r}{\left|\varphi\right|_r} = 0$.

Theo định lí (B) ta thấy T có điểm bất động là ψ. Vậy $x(\psi)$ là nghiệm tuần hoàn của phương trình (E). Định lí được chứng minh.

Chú ý. Tương tự [3] ta thấy nếu ta áp đặt thêm tính Lipschitz địa phương lên toán tử L thì phương trình (T) có nghiệm duy nhất với mọi $\varphi \in C_r$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hoàn Hóa, Nguyễn Ngọc Trọng, Lê Thị Kim Anh (2012), "Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM*, (36) , tr. 22 - 31.
2. Chu Văn Thọ (1997), *Phương trình vi phân hàm với đối số trễ vô hạn trong không gian Banach*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Sư phạm TPHCM
3. Nguyễn Ngọc Trọng (2011), *Tập nghiệm của phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic*, Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
4. L.H.Hoa, K.Schmitt (1994), "Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation", *Results in Mathematics*, vol.25, pp. 291 - 313.

*(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 22-5-2012; ngày phản biện đánh giá : 28-10-2012 ;
ngày chấp nhận đăng: 31-10-2012)*