TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ISSN: 1859-3100
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 14, Số 3 (2017): 68-75

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 14, No. 3 (2017): 68-75

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

IĐÊAN TUYỆT ĐỐI CỦA NHÓM ABEN KHÔNG XOẮN

Phạm Thị Thu Thủy *

Khoa Toán-Tin học – Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh

Ngày Tòa soạn nhận được bài: 20-12-2016; ngày phản biện đánh giá: 19-02-2017; ngày chấp nhận đăng: 24-3-2017

TÓM TẮT

Một nhóm con A của nhóm Aben G được gọi là iđêan tuyệt đối của G nếu A là iđêan trong mọi vành trên G. Nhóm Aben được gọi là nhóm RAI nếu trên nó có thể xây dựng được một vành mà trong đó mọi iđêan đều tuyệt đối. Nhóm Aben được gọi là nhóm afi nếu mọi iđêan tuyệt đối của nó đều là nhóm con hoàn toàn đặc trưng. Bài báo mô tả nhóm RAI và afi trong lớp nhóm Aben không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất.

Từ khóa: nhóm Aben, iđêan tuyệt đối, nhóm hoàn toàn phân rã.

ABSTRACT

Absolute ideal of completely decomposable Abelian groups

A subgroup A of an Abelian group G is called an absolute ideal of G if A is an ideal in every rings on G. An Abelian group is called a RAI group if it admits a ring structure, in which every ideal is absolute. An afi group is an Abelian group, whose every absolute ideal is a fully invariant subgroup. In this work, RAI groups and afi groups are described in the class of isotype completely decomposable Abelian groups.

Keywords: Abelian group, absolute ideal, completely decomposable group.

1. Giới thiệu

Bài báo này nghiên cứu một số bài toán trong Lí thuyết nhóm cộng của vành, một trong những hướng nghiên cứu của Lí thuyết nhóm Aben hiện đại. Trong bài báo, mọi nhóm được đề cập đều là nhóm Aben. Do đó, để đơn giản, từ "nhóm" trong bài này mặc định được hiểu là "nhóm Aben".

1.1. Định nghĩa

Một phép nhân trên nhóm G là một hàm song tuyến tính $\mu : G\times G \to G$. Để đơn giản, ta thường dùng kí hiệu × cho phép nhân, nghĩa là $a\times b = \mu(a,b)$. Nhóm G cùng với một phép nhân × trên nó được gọi là một vành trên nhóm G, kí hiệu là $(G,\times)$.

Bài toán nghiên cứu vành trên nhóm Aben được lần đầu tiên xem xét bởi Beaumont R.A. trong [1], trong đó nghiên cứu vành trên tổng trực tiếp các nhóm xyclic. Từ đó, vành trên nhóm Aben thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học khác. Các bài toán cụ thể được đặt ra vô cùng đa dạng. Một trong các vấn đề được quan tâm nghiên cứu trong đó là tìm các nhóm con của nhóm Aben G thỏa một tính chất nào đó trong mọi vành trên nó.

* Email: *ptthuthuy@gmail.com*

1.2. Định nghĩa

Nhóm con A của nhóm G được gọi là một *iđêan tuyệt đối* của G nếu A là iđêan trong mọi vành trên G.

Iđêan tuyệt đối được xem xét lần đầu tiên bởi Fried E. trong [2], trong đó Fried E. chứng minh nhóm con A là iđêan tuyệt đối của nhóm G khi và chỉ khi A bất biến dưới tác động của iđêan $F=\langle \mathrm{Im}\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(G,\mathrm{End}\,G)\rangle$ của $\mathrm{End}\,G$, nghĩa là $FA\subseteq A$. Tuy nhiên, việc áp dụng tiêu chuẩn này để giải quyết các bài toán liên quan tới iđêan tuyệt đối còn hạn chế vì việc mô tả iđêan F không đơn giản.

Hai bài toán được quan tâm khi nghiên cứu iđêan tuyệt đối là bài toán về nhóm RAI và nhóm afi. *Nhóm RAI* là nhóm Aben mà trên đó có thể xây dựng được một vành trong đó mọi iđêan đều là iđêan tuyệt đối. Vấn đề mô tả nhóm RAI được đặt ra bởi Fuchs L. trong [3, vấn đề 93]. Nhóm Aben được gọi là *nhóm afi* nếu mọi iđêan tuyệt đối A của nó đều là nhóm con hoàn toàn đặc trưng, nghĩa là $\varphi(A)\subseteq A$ với mọi tự đồng cấu $\varphi\in End(G)$. Bài toán mô tả nhóm afi được đưa ra bởi Fried E. trong [2]. Các kết quả về nhóm RAI và nhóm afi chủ yếu tập trung trong lớp nhóm xoắn trong các bài báo [4], [5] và [6]. Gần đây trong [7], Kompantseva E. I. và Fomin A. A. mô tả nhóm RAI trong một lớp con của lớp các nhóm không xoắn hầu như hoàn toàn phân rã.

Bài báo này mô tả nhóm RAI và afi trong lớp nhóm Aben không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất. Ta sẽ sử dụng một số khái niệm và kết quả sau trong [5] và [6].

1.3. Định nghĩa [5]

Iđêan tuyệt đối chính sinh bởi g trong nhóm G, kí hiệu $\langle g\rangle_{AI}$, là iđêan tuyệt đối nhỏ nhất chứa g. Để phân biệt, ta kí hiệu iđêan chính sinh bởi g trong vành $(G,\times)$ là $\langle g\rangle_{\times}$.

1.4. Định lí [5]

Cho G là nhóm. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

i. Nhóm G là nhóm RAI;

ii. Trên G tồn tại vành $(G,\times)$ sao cho $\langle g\rangle_{\times}$ là iđêan tuyệt đối với mọi $g\in G$;

iii. Trên G tồn tại vành $(G,\times)$ sao cho $\langle g\rangle_{\times}=\langle g\rangle_{AI}$ với mọi $g\in G$.

1.5. Định lí [6]

Nhóm G là nhóm afi khi và chỉ khi $\langle g\rangle_{AI}$ là nhóm con hoàn toàn đặc trưng của G với mọi $g\in G$.

2. Vành trên nhóm Aben hoàn toàn phân rã

2.1. Định nghĩa

Cho G là một nhóm Aben, p là số nguyên tố và $g \in G$. Khi đó số nguyên dương n lớn nhất sao cho $p^n | g$ trong G được gọi là p-cao độ của phần tử g trong G và kí hiệu là $h_p^{(G)}(g)$; nếu số nguyên dương n như vậy không tồn tại thì ta nói $h_p^{(G)}(g) = \infty$.

Để đơn giản, nếu ta chỉ xét cao độ của phần tử trong một nhóm cố định, ta sẽ chỉ dùng kí hiệu $h_p(g)$ cho p-cao độ của phần tử g. Cho $p_1, p_2, \ldots$ là tất cả các số nguyên tố được xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó dãy $\chi(g) = (h_{p_1}(g), h_{p_2}(g), \ldots, h_{p_n}(g), \ldots)$ được gọi là *dãy cao độ* hay *đặc trưng* của phần tử g trong nhóm G. Như vậy, một dãy cao độ chỉ có thể chứa các số nguyên và kí hiệu ∞.

Hai dãy cao độ được gọi là *tương đương* nếu chúng chỉ có hữu hạn (hoặc không có) các vị trí khác nhau, và tại các vị trí đó đều phải là các số nguyên. Dễ thấy, quan hệ trên giữa các dãy cao độ thực sự là một quan hệ tương đương. Ta gọi mỗi lớp tương đương các dãy cao độ là một *dạng*. Dạng của phần tử $g \in G$ là dạng chứa $\chi(g)$ và kí hiệu là $t(g)$.

Dễ thấy, nếu G là một nhóm không xoắn hạng 1, thì mọi phần tử khác 0 đều phụ thuộc tuyến tính với nhau và có dãy cao độ tương đương. Do đó, các phần tử khác 0 trong nhóm G không xoắn hạng 1 đều có cùng một dạng, được gọi là *dạng của nhóm G không xoắn hạng 1* và kí hiệu là $t(G)$. Thực tế, hai nhóm không xoắn hạng 1 đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng dạng. Mệnh đề sau dễ dàng có được từ [3, Định lí 85.1].

2.2. Mệnh đề

Cho G là một nhóm không xoắn hạng 1 dạng t. Nếu e là phần tử khác 0 bất kì của G thì $G = Re$ với $R = \left\{ \frac{u}{\prod p_i^{s_i}} \,\middle|\, s_i \le h_{p_i}(e) \right\}$, hiển nhiên, R có dạng t. Ngược lại nếu R là nhóm hữu tỉ bất kì có dạng $t = t(G)$ ta luôn có thể chọn duy nhất trong G một phần tử e sao cho $G = Re$. ■

2.3. Định nghĩa

Cho $\chi_1 = (k_1, k_2, \ldots)$ và $\chi_2 = (s_1, s_2, \ldots)$ là hai dãy cao độ lần lượt có dạng t_1 và t_2. Ta định nghĩa:

i. Tích của hai dãy cao độ: $\chi_1\chi_2 = (k_1 + s_1, k_2 + s_2, \ldots)$;

ii. Giao của hai dãy cao độ: $\chi_1 \cap \chi_2 = (\min\{k_1, s_1\}, \min\{k_2, s_2\}, \ldots)$;

iii. Tích và giao của hai dạng: $t_1t_2 = t(\chi_1\chi_2)$ và $t_1 \cap t_2 = t(\chi_1 \cap \chi_2)$.

Dãy cao độ χ (dạng t) được gọi là *lũy đẳng* khi và chỉ khi $\chi^2 = \chi$ ($t^2 = t$). Dễ thấy dãy cao độ χ lũy đẳng khi và chỉ khi χ chỉ chứa 0 và ∞. Và dạng t lũy đẳng nếu các phần tử đại diện của nó chỉ chứa hữu hạn (hoặc không có) các số nguyên khác 0.

2.4. Mệnh đề [3, Mệnh đề 85.3].

Cho $(G, \times)$ là một vành trên G. Khi đó $\chi(a \times b) \ge \chi(a)\chi(b)$ với mọi $a, b \in G$. ■

2.5. Định nghĩa

Ta nói $\chi_1 = (k_1, k_2, \ldots) \le \chi_2 = (s_1, s_2, \ldots)$ nếu $k_i \le s_i$ với mọi $i \in I$. Ta nói $t_1 \le t_2$ nếu tồn tại $\chi_1 \in t_1$ và $\chi_2 \in t_2$ sao cho $\chi_1 \le \chi_2$.

Dễ thấy, quan hệ so sánh dãy cao độ và dạng đều là các quan hệ thứ tự không toàn phần.

2.6. Định nghĩa

Nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã là nhóm có thể biểu diễn được dưới dạng tổng trực tiếp của các nhóm không xoắn hạng 1.

2.7. Mệnh đề [3, Mệnh đề 86.1]

Cho $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ là nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã với G_i là các nhóm không xoắn hạng 1. Bộ các dạng $\{t_i = t(G_i)\}_{i\in I}$ là một bất biến của nhóm G, nghĩa là không phụ thuộc vào cách phân tích G thành tổng trực tiếp của các nhóm không xoắn hạng 1.

Nếu $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ là nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã thì G có thể biểu diễn dưới dạng $G = \bigoplus_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in I} R_i e_i$ với R_i là nhóm hữu tỉ dạng $t_i = t(G_i)$. Tập hợp $\{e_i\}_{i\in I}$ tạo thành một hệ độc lập tuyến tính tối đại, gọi là *cơ sở*, của nhóm G và mọi phần tử $g \in G$ có thể được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$g = r_{i_1} e_{i_1} + r_{i_2} e_{i_2} + \ldots + r_{i_n} e_{i_n} \text{ với } r_{i_k} \in R_{i_k}.$$

2.8. Định lí

Cho nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã $G = \bigoplus_{i\in I} R_i e_i$. Khi đó, với mọi bộ $\{a_i\}_{i\in I}$ các phần tử của G thỏa $\chi(a_i) \ge \chi(e_i)\chi(e_j)$ với mọi $i, j \in I$, tồn tại duy nhất một vành $(G,\times)$ trên G sao cho $e_i \times e_j = a_{ij}$.

Chứng minh.

Cho $\{a_i\}_{i\in I}$ là bộ các phần tử của G thỏa $\chi(a_i) \ge \chi(e_i)\chi(e_j)$. Ta xét quy tắc nhân như sau: Cho $x = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i \in G$, với mọi $i, j \in I$ ta có $\chi(a_{ij}) \ge \chi(e_i)\chi(e_j)$ và $r_i e_i, r_j e_j \in G$ nên $r_i s_j \mid a_i$ hay $r_i s_j a_{ij} \in G$. Ta đặt $x \times y = \sum_{i,j=1}^{n} r_i s_j a_{ij}$. Dễ thấy, $\times$ là một đồng cấu song tuyến tính từ $G\times G$ vào G, nên $(G,\times)$ là một vành trên G. Hơn nữa vì mọi phần tử đều biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của các $e_i, I \in I$ và phép nhân bất kì đều là song tuyến tính trên G nên phép nhân $\times$ ở trên là duy nhất. ■

3. Iđêan tuyệt đối của nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất

3.1. Định nghĩa

Nhóm không xoắn đồng nhất là nhóm không xoắn mà mọi phần tử đều có cùng một dạng.

Dễ thấy, nếu G là một nhóm không xoắn đồng nhất dạng t lũy đẳng thì ta luôn có thể chọn được một hệ cơ sở $\{e_i\}_{i\in I}$ sao cho $G=\bigoplus_{i\in I} Re_i$, $\chi(e_i)$ lũy đẳng và R là một nhóm hữu tỉ dạng t.

Bổ đề sau dễ dàng được suy ra từ [3, Mệnh đề 85.4].

_3.2. Bổ đề_

Cho G là nhóm không xoắn hạng 1 có dạng $t=(k_1,k_2,\ldots,k_n,\ldots)$. Khi đó, quy tắc φ là tự đồng cấu trên G khi và chỉ khi φ có dạng $\varphi(x)=\dfrac{m}{n}x$ với $m,n\in$ □ và n không chia hết cho các số nguyên tố p_i mà $k_i\in$ □. ■

3.3. Định lí (Nhóm đồng nhất dạng không lũy đẳng)

Nếu G là nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất dạng t với t không lũy đẳng thì

i. mọi nhóm con của G đều là iđêan tuyệt đối và G là nhóm RAI;

ii. G là nhóm afi khi và chỉ khi hạng của G là 1 và t không chứa ∞.

Chứng minh.

i. Giả sử $(G,\times)$ là một vành trên G và a,b là hai phần tử khác 0 bất kì của G. Vì G đồng nhất và t không lũy đẳng nên $t(a)=t(b)=t<t^2$. Mặt khác $t(a\times b)\geq t(a)t(b)=t^2$. Vì G lũy đẳng dạng t nên $a\times b=0$. Vậy trên G chỉ tồn tại duy nhất vành tầm thường. Hiển nhiên khi đó mọi nhóm con của G đều là iđêan tuyệt đối và G là nhóm RAI.

ii. Giả sử G là nhóm không xoắn hạng 1 có dạng t không chứa ∞. Cho φ là một tự đồng cấu trên G và $a\in G$. Vì t không chứa ∞ nên từ Bổ đề 3.2 suy ra $\varphi(a)=ma$ với $m\in$ □. Do đó $\varphi(a)\in\langle a\rangle_{AI}$. Vậy theo Định lí 1.5 nhóm G là nhóm afi.

Giả sử $r(G)>1$. Khi đó G có thể biểu diễn dưới dạng $G=Re_1\oplus Re_2\oplus A$ với R là nhóm hữu tỉ dạng t. Xét ánh xạ $\varphi: G\to G$ với $\varphi(re_1)=re_2$ và $\varphi(x)=0$ nếu $x\notin Re_1$. Rõ ràng φ là tự đồng cấu của G và $\varphi(Re_1)=Re_2$ Ú Re_1, nên Re_1 không là nhóm con hoàn toàn đặc trưng của G. Mặt khác, theo chứng minh ở phần trên, ta có Re_1 là iđêan tuyệt đối của G. Vậy G không là nhóm afi.

Giả sử $r(G)=1$ và t chứa ∞. Không mất tính tổng quát, giả sử ∞ đứng ở vị trí đầu tiên của t. Theo Bổ đề 3.2, quy tắc tương ứng $\varphi: G\to G$ với $\varphi(x)=\dfrac{1}{p_1}x$ là một tự đồng cấu của G. Cho $a \in G$ và $a \neq 0$. Khi đó rõ ràng $\varphi(a) = \frac{1}{p_1} a \notin \langle a \rangle$, nên $\langle a \rangle$ không là nhóm con hoàn toàn đặc trưng của G. Mặt khác, theo chứng minh ở phần trên, ta có $\langle a \rangle$ là iđêan tuyệt đối của G. Vậy G không là nhóm afi. ■

3.4. *Bổ đề*

Cho G là nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã, χ_1, χ_2 là hai dãy đặc trưng tương đương. Khi đó $G(\chi_1 \cap \chi_2) = G(\chi_1) + G(\chi_2)$.

Chứng minh.

Cho $g \in G(\chi_1 \cap \chi_2)$. Đặt $\chi_1 = (k_1, k_2, \ldots)$ và $\chi_2 = (l_1, l_2, \ldots)$. Vì χ_1 và χ_2 tương đương nên chỉ tồn tại tồn tại hữu hạn giá trị $i \in \square^*$ sao cho $k_i \neq l_i$, hơn nữa tại các vị trí đó $k_i, l_i \in \square$. Đặt $m = \prod_{l_i < k_i} p_i^{k_i}$ và $n = \prod_{k_i < l_i} p_i^{l_i}$. Rõ ràng $UCLN(m,n) = 1$ nên tồn tại $u, v \in \square$ sao cho $um + vn = 1$. Khi đó $g = (um)g + (vn)g$.

Ta chứng minh $(um)g \in G(\chi_1)$. Cho $i \in \square^*$. Nếu $k_i \leq l_i$ thì $k_i = \min\{k_i, l_i\}$. Mà $g \in G(\chi_1 \cap \chi_2)$ nên $k_i \leq h_{p_i}(g) \leq h_{p_i}(umg)$. Nếu $k_i > l_i$ thì từ cách xây dựng m ta có $p_i^{k_i} | \ m$, nên $k_i \leq h_{p_i}(umg)$. Vậy $\chi(umg) \geq \chi_1$ hay $(um)g \in G(\chi_1)$. Chứng minh tương tự ta có $(vn)g \in G(\chi_2)$.

Vậy $g = (um)g + (vn)g \in G(\chi_1) + G(\chi_2)$, hay $G(\chi_1 \cap \chi_2) \subseteq G(\chi_1) + G(\chi_2)$. Chiều ngược lại là hiển nhiên vì $\chi_1, \chi_2 \geq \chi_1 \cap \chi_2$. Vậy $G(\chi_1 \cap \chi_2) = G(\chi_1) + G(\chi_2)$. ■

3.5. *Định lí (Iđêan tuyệt đối chính)*

Cho G là nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất dạng lũy đẳng và $\{e_i\}_{i \in I}$ là cơ sở của G sao cho $G = \bigoplus_{i \in I} Re_i$ và $\chi(e_i)$ lũy đẳng. Cho $g = r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n \in G$. Khi đó,

$\langle g \rangle_{AI} = \sum_{i=1}^{n} r_i G = G(\chi(g))$.

Chứng minh.

Cho $a \in \sum_{i=1}^{n} r_i G$. Khi đó $a = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$ với $a_1, \ldots, a_n \in G$. Vì $\chi(e_i)$ lũy đẳng và $t(a_i) = t(e_i)$ với mọi $i \in \overline{1,n}$ nên $\chi(e_i)\chi(e_1) = \chi(e_i) \leq \chi(a_i)$. Do đó, tồn tại vành $(G, \times)$ trên G sao cho $e_i \times e_1 = a_i$ với mọi $i \in \overline{1,n}$ và $e_i \times e_j = 0$ trong các trường hợp còn lại. Khi đó ta có $g \times e_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i \right) \times e_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i (e_i \times e_1) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i = a$. Suy ra $a \in \langle g \rangle_{\times} \subseteq \langle g \rangle_{AI}$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} r_i G \subseteq \langle g \rangle_{AI}.$$

Vì $G(\chi(g))$ là iđêan tuyệt đối của G và chứa g, nên

$$\langle g \rangle_{AI} \subseteq G(\chi(g)).$$

Vì $g = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n \in G$ nên $\chi(g) = \bigcap_{i=1}^{n} \chi(r_ie_i)$. Từ Bổ đề 3.4 ta suy ra $G(\chi(g)) = G(\bigcap_{i=1}^{n} \chi(r_ie_i)) = \sum_{i=1}^{n} G(\chi(r_ie_i))$. Hiển nhiên với mọi $a \in G$, nếu $\chi(a) \geq \chi(r_ie_i)$ thì $r_i \mid a$ hay $a \in r_iG$. Do đó

$$G(\chi(g)) \subseteq \sum_{i=1}^{n} r_iG$$

Vậy $\langle g \rangle_{AI} = \sum_{i=1}^{n} r_iG = G(\chi(g))$. ■

Định lí 3.5 cho thấy mọi iđêan tuyệt đối của nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đều là nhóm con hoàn toàn đặc trưng. Do đó, từ Định lí 1.5 ta có kết quả sau.

3.6. *Hệ quả.* *Nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất dạng lũy đẳng là nhóm afi.* ■

3.7. *Định lí*

Nhóm không xoắn hoàn toàn phân rã đồng nhất dạng lũy đẳng là nhóm RAI.

Chứng minh.

Nếu G hạng 1, biểu diễn G dưới dạng $G = Re$ với $\chi(e)$ lũy đẳng. Khi đó $\chi(e)\chi(e) = \chi(e)$ nên tồn tại vành $(G,\times)$ trong đó $e \times e = e$. Cho $g = re \in G$ và $a \in rG$. Khi đó tồn tại $b = se \in G$ sao cho $a = rb$. Khi đó $a = r(se) = re \times se = g \times b \in \langle g \rangle_\times$. Vậy $rG \subseteq \langle g \rangle_\times$. Chiều ngược lại là hiển nhiên vì rG là iđêan của $(G,\times)$ và chứa g. Do đó G là nhóm RAI.

Nếu G có hạng ≥ 2, G có thể biểu diễn dưới dạng $G = \bigoplus_{i \in I} Re_i$ với e_i là các phần tử có với $\chi(e_i)$ lũy đẳng. Khi đó ta xây dựng phép nhân trên G như sau:

$$e_i \times e_i = 0 \quad \text{và} \quad e_i \times e_j = e_i \text{ nếu } i \neq j.$$

Trước hết ta chứng minh $\langle e_i \rangle_\times = G$ với mọi $i \in I$. Cho $a = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n \in G$. Cho $\alpha \in \overline{1,n}$. Nếu $\alpha \neq i$ thì $r_\alpha e_\alpha = r_\alpha(e_\alpha \times e_i) = (r_\alpha e_\alpha) \times e_i \in \langle e_i \rangle_\times$. Trường hợp $\alpha = i$, vì G có hạng ≥ 2 nên tồn tại $\beta \neq \alpha$ trong I, khi đó $r_\alpha e_\alpha = r_\alpha e_i = r_\alpha e_i \times e_\beta = e_i \times (r_\alpha e_\beta) \in \langle e_i \rangle_\times$. Vậy $a = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n \in \langle e_i \rangle_\times$, do đó $\langle e_i \rangle_\times = G$ với mọi $i \in I$.

Cho $g = s_1e_1 + \ldots + s_ne_n$. Từ cách xây dựng phép nhân $\times$ ở trên, ta có $g \times e_n = s_1e_1 + \ldots + s_{n-1}e_{n-1}$, nên $g_1 = s_1e_1 + \ldots + s_{n-1}e_{n-1} \in \langle g \rangle_\times$ và $s_ne_n = g - g_1 \in \langle g \rangle_\times$. Chứng minh tương tự ta lần lượt có $s_{n-1}e_{n-1}, \ldots, s_1e_1 \in \langle g \rangle_\times$. Suy ra $\sum_{i=1}^{n} \langle s_ie_i \rangle_\times \subseteq \langle g \rangle_\times$. Theo chứng minh trên ta có $\sum_{i=1}^{n} \langle s_ie_i \rangle_\times = \sum_{i=1}^{n} s_iG$. Suy ra $\sum_{i=1}^{n} s_iG \subseteq \langle g \rangle_\times$. Mặt khác, $\sum_{i=1}^{n} s_iG$ là nhóm con hoàn toàn đặc trưng, do đó là iđêan của $(G, \times)$ và $g \in \sum_{i=1}^{n} s_iG$. Vậy $\langle g \rangle_\times = \sum_{i=1}^{n} s_iG$ và là iđêan tuyệt đối của G.

Vậy theo Định lí 1.4 ta có G là nhóm RAI. ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Beaumont R.A., "Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups," *Duke Math. J.*, vol.15, pp. 367 – 369, 1948.

[2] Fried E., *On the subgroups of Abelian groups that are ideals in every ring*, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, pp. 51-55.

[3] Fuchs L., *Infinite Abelian groups*, Vol.2, Academic Press, New York and London, 1973.

[4] McLean K.R., "The additive ideals of a p-ring," *J. London Math. Soc.*, vol.2, pp.523-529

[5] Thuy, P.T.T., "Torsion Abelian RAI-Groups," *J Math Sci*, vol. 197, Issue 5, pp. 658–678, 2014.

[6] Thuy, P.T.T., "Torsion Abelian afi-Groups", *J Math Sci*, vol. 197, Issue 5, pp. 679–683, 2014,

[7] Kompantseva E. I., Fomin A. A., *Absolute ideals of almost completely decomposable abelian groups*, Chebyshevskii Sb., 2015, Volume 16, Issue 4, pp. 200–211.