VỀ MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH LOGISTIC SUY RỘNG

NGUYỄN BÍCH HUY*, TRẦN ĐÌNH THANH**

TÓM TẮT

Trong bài báo, chúng tôi áp dụng bậc tôpô trong nón để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu dương cho một lớp phương trình logistic suy rộng.

Từ khóa: phương trình logistic suy rộng, bậc tôpô trong nón, nghiệm yếu dương.

ABSTRACT

On a class of generalized logistic equations

In the present paper we apply the topological degree in a cone to prove the existence of a positive weak solution for a class of generalized logistic equations.

Keywords: generalized logistic equation, topological degree in cone, positive weak solution.

1. Mở đầu

Phương trình logistic có dạng:

$$Au = \lambda a(x)u^{\alpha} - b(x)u^{\beta} \text{ trong } \Omega;\ u = 0 \text{ trên } \delta\Omega, \tag{1}$$

trong đó, A là một toán tử vi phân elliptic cấp 2. Phương trình này được M. Gurtin và R. MacCamy đưa vào nghiên cứu năm 1977 nhằm mô tả sự phát triển của các quần thể sinh học trong tự nhiên. Sau này, phương trình (1) còn được ứng dụng trong nhiều vấn đề của Y học, trong bài toán vận tải… Vì những ứng dụng quan trọng của nó mà phương trình (1) nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học và được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau (xem [2-8] và các tài liệu tham khảo ở đó). Toán tử vi phân ban đầu là toán tử Laplace đã được mở rộng thành các toán tử elliptic tựa tuyến tính. Các hàm a(x), b(x) ban đầu là các hằng số, sau này đã được mở rộng thành các hàm liên tục và sau đó là các hàm thuộc lớp $L^q(\Omega)$ với q có thể nhỏ. Gần đây, vế phải của (1) đã được mở rộng trong các bài báo [2, 8] thành dạng $\lambda f(x,u) - g(x,u)$ với các hàm f, g khá tổng quát và được nghiên cứu nhờ phương pháp biến phân. Trong bài báo này chúng tôi sẽ nghiên cứu phương trình logistic mở rộng có dạng sau:

$$-\Delta_p u = \lambda f(x,u,Du) - g(x,u) \text{ trong } \Omega;\ u = 0 \text{ trên } \delta\Omega, \tag{2}$$

Trong đó $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ là toán tử p-Laplace

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** TS, Trường Đại học Y Dược TPHCM

Sự có mặt của số hạng Du trong (2) làm cho phương trình này không thể nghiên cứu nhờ phương pháp của [2, 8]. Ngoài ra, chúng tôi cho phép hàm $x \mapsto \lambda f(x,u,v) - g(x,u)$ thuộc lớp $L^q(\Omega)$ với q nhỏ và do vậy nghiệm của (2) có thể không bị chặn. Điều này làm cho việc nghiên cứu (2) trở nên phức tạp. Để nghiên cứu phương trình (2), chúng tôi sẽ sử dụng phương pháp bậc tôpô kết hợp với phương pháp chặn dưới đơn điệu.

Trong phần tiếp theo chúng tôi giả thiết Ω là tập bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$ và sử dụng các kí hiệu sau: $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ với $p < N$, t' là chỉ số liên hợp của t, nghĩa là $t' = \dfrac{t}{t-1}$; $\|.\|$ là chuẩn $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|.\|_t$ là chuẩn trong $L^t(\Omega)$. Nếu không nói rõ thêm thì các tích phân được lấy trên Ω.

2. Đưa về bài toán điểm bất động

Định nghĩa. Giả sử $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là các hàm thỏa mãn điều kiện Caratheodory. Ta gọi hàm $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ là nghiệm yếu của (2) nếu hàm

$\lambda f(x,u,Du) - g(x,u)$ thuộc không gian $L^{(p^*)'}(\Omega)$ và

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int [\lambda f(x,u,Du) - g(x,u)]\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Từ đây về sau ta sẽ kí hiệu $\langle Au,\varphi\rangle = \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi$.

Mệnh đề sau đây đóng vai trò quan trọng trong việc chuyển bài toán tìm nghiệm yếu của (2) về bài toán điểm bất động và đã được chứng minh trong [4, 7].

Mệnh đề 1. Giả sử $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm Caratheodory thỏa mãn điều kiện sau:

(G) $g(x,0)=0, g(x,u)$ là hàm tăng theo biến u và

$g(x,u) \le a.u^\beta + b(x)$ $\forall (x,u)\in\Omega\times[0,\infty)$ trong đó $\beta < p^*-1$ và $b \in L^{(p^*)'}(\Omega)$.

Khi đó với mỗi hàm $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tồn tại duy nhất hàm $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sao cho $ug(x,u) \in L^1(\Omega)$, $g(x,u) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$ và

$$\langle Au,\varphi\rangle + \int g(x,u)\varphi = \langle h,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3}$$

Ánh xạ P từ $W^{-1,p'}(\Omega)$ vào $W_0^{1,p}(\Omega)$, đặt tương ứng hàm h vào hàm u thỏa mãn (3), có các tính chất sau:

a. P là ánh xạ tăng theo nghĩa nếu $h_1 \le h_2$ thì $P(h_1) \le P(h_2)$.

b. P là ánh xạ liên tục và ảnh của tập bị chặn là tập bị chặn.

c. Nếu $\delta > \left(p^*\right)'$ thì P là ánh xạ hoàn toàn liên tục từ $L^\delta(\Omega)$ vào $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Tiếp theo ta xét thêm một ánh xạ. Cho $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ là hàm Caratheodory. Ta kí hiệu N là ánh xạ cho bởi

$N(u(x)) = f(x,u(x),Du(x)),\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)$. N gọi là ánh xạ Nemyskii tương ứng với hàm f.

Mệnh đề 2. Giả sử hàm Caratheodory $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\left|f(x,u,v)\le g(x,|u|,|v|)\right| \qquad \forall (x,u,v)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

trong đó $g:\Omega\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ là hàm Caratheodory, tăng theo biến thứ hai và ba và có tính chất

$$u\in L^{p^*}(\Omega), v\in L^p(\Omega)\Rightarrow g(x,u(x),v(x))\in L^\delta(\Omega)$$

Khi đó N là ánh xạ liên tục từ $W_0^{1,p}(\Omega)$ vào $L^\delta(\Omega)$.

Nói riêng, nếu

$$\left|f(x,u,v)\right|\le m(x)|u|^\alpha + c|v|^\gamma \tag{4}$$

Với $\alpha < p^*-1, \gamma < \dfrac{p}{(p^*)'}, m(x)\in L^q(\Omega), q > \left(\dfrac{p^*}{1+\alpha}\right)'$

thì N là ánh xạ liên tục từ $W_0^{1,p}(\Omega)$ vào $L^\delta(\Omega)$ với $\delta = \min\left\{\dfrac{p}{\gamma}, \dfrac{qp^*}{q\alpha+p^*}\right\}$.

Chứng minh. Giả sử trái lại ánh xạ N không liên tục tại u_0.

Khi đó

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega): u_n\to u_0, \left\|N(u_n)-N(u_0)\right\|_\delta \ge \varepsilon \tag{5}$$

Chuyển sang xét một dãy con nếu cần, ta có thể giả thiết rằng

$$u_n\to u_0,\ Du_n\to Du_0 \quad hkn\ trong\ \Omega$$

Khi đó ta có

$$N(u_n)\to N(u_0)\ \ hkn\ \ trong\ \Omega, \quad \left|N(u_n)\right|\le g(.,u,v)\in L^\delta(\Omega).$$

Do đó theo định lí hội tụ bị chặn ta suy ra $N(u_n)\to N(u_0)$ *trong* $L^\delta(\Omega)$ điều này mâu thuẫn với (5). Vậy ánh xạ N liên tục tại mọi điểm $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bây giờ ta xét trường hợp riêng khi hàm f thỏa mãn điều kiện (4). Với $u \in L^{p^*}(\Omega), w \in L^p(\Omega)$ và $u \geq 0, v \geq 0$ ta có $m(x)u^\alpha \in L^t(\Omega), t = \dfrac{qp^*}{q\alpha + p^*}, w^\gamma \in L^{p/\gamma}(\Omega)$.

Do đó hàm $m(x)u^\alpha + cw^\gamma$ thuộc $L^\delta(\Omega)$ với $\delta = \min\left\{\dfrac{p}{\gamma}, \dfrac{qp^*}{q\alpha + p^*}\right\}$.

Với việc xây dựng các ánh xạ P và N ta thấy bài toán tìm nghiệm yếu của (2) được đưa về bài toán tìm hàm $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sao cho $u = P[\lambda N(u)]$.

3. Kết quả chính

Định lí. Giả sử hàm $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện (G) trong mệnh đề 1 và hàm $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

(F_1) $0 \leq f(x,u,v) \leq m(x)u^\alpha + c|v|^\gamma \quad \forall (x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$

với $\alpha < p - 1,\ m(x) \in L^q(\Omega),\quad q > \left(\dfrac{p^*}{1+\alpha}\right)'$

và một trong các giả thiết sau được nghiệm đúng

(a) $\gamma < p - 1$

(b) $\gamma < p\dfrac{\beta}{1+\beta}$, $g(x,u) \geq b.u^\beta$.

(F_2) Tồn tại tập mở Ω_0 sao cho $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ và các số dương ε, a, m_1 sao cho

$f(x,u,v) \geq m_1 u^\alpha \qquad \forall x \in \Omega_0, \forall u \in [0,a], \forall v \in \mathbb{R}^N,$

$\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{g(x,u)}{u^{\alpha+\varepsilon}} = 0$ đều trên Ω_0.

Khi đó $\forall \lambda > 0$ thì phương trình (2) có nghiệm yếu dương.

Chứng minh. Ta cần chứng minh ánh xạ $P \circ \lambda N$ có điểm bất động trong nón K các hàm không âm của $W_0^{1,p}(\Omega)$. Để đơn giản kí hiệu, ta viết N thay cho λN. Từ giả thiết (F_1) ta thấy $\alpha < p^* - 1, \gamma < \dfrac{p}{(p^*)'}$ nên do mệnh đề 2 ánh xạ N tác động liên tục từ $W_0^{1,p}$ vào L^δ với $\delta = \min\left\{\dfrac{p}{\gamma}, \dfrac{qp^*}{q\alpha + p^*}\right\}$. Cũng từ các giả thiết đặt lên γ và q trong (F_1) ta thấy $\delta > (p^*)'$. Do đó theo mệnh đề 1 thì ánh xạ P là hoàn toàn liên tục từ L^δ vào $W_0^{1,p}$. Vậy ánh xạ hợp $P \circ N$ là hoàn toàn liên tục từ $W_0^{1,p}$ vào $W_0^{1,p}$. Phần tiếp theo của chứng minh được chia thành 3 bước.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh khi R đủ lớn thì

$$u \neq P[tN(u)] \qquad \forall t \in [0,1],\ \forall u \geq 0,\ \|u\| = R.$$

Thật vậy, nếu điều cần chứng minh là không đúng thì ta tìm được các dãy $\{t_n\} \subset [0,1]$,

$u_n \geq \theta$, $\|u_n\| \to \infty$ sao cho $u_n = P\left[t_n N\left(u_n\right)\right]$ hay

$$\left\langle Au_n, \varphi \right\rangle + \int g(x,u_n)\varphi = t_n \int f(x,u_n,Du_n)\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}. \tag{6}$$

Cho $\varphi = u_n$ và sử dụng giả thiết (F_1) ta nhận được:

$$\|u_n\|^p + \int g(x,u_n)u_n \leq \int m(x)u_n^{1+\alpha} + c\int |Du_n|^\gamma u_n \tag{7}$$

Giả sử giả thiết (a) của (F_1) đúng. Ta áp dụng các bất đẳng thức Holder và Young và thu được

$$\|u_n\|^p \leq \|m\|_q . \|u_n\|_{(1+\alpha)q'}^{1+\alpha} + \varepsilon . \|u_n\|^p + c(\varepsilon)\|u_n\|_t^t, \qquad t = \left(\frac{p}{\gamma}\right)^{/}. \tag{8}$$

Vì $\left(1+\alpha\right)q^{/} < p^*$, $t < p^*$ và phép nhúng $W_0^{1,p} \to L^{p^*}$ liên tục nên từ (8) ta suy ra

$$\|u_n\|^p \leq c(\|u_n\|^{1+\alpha} + \|u_n\|^t)$$

Điều này mâu thuẫn với $1+\alpha < p$, $t < p$ và $\|u_n\| \to \infty$

Tiếp theo ta xét trường hợp khi điều kiện (b) trong (F_1) đúng. Do bất đẳng thức Young ta có

$$\|Du_n\|^\gamma u_n \leq c(\varepsilon)|Du_n|^{\gamma(1+\beta)'} + \varepsilon . u_n^{1+\beta}$$

Thay vào (7) ta suy ra

$$\|u_n\|^p + b\|u_n\|_{1+\beta}^{1+\beta} \leq \|m\|_q . \|u_n\|_{(1+\alpha)q'}^{1+\alpha} + \varepsilon . \|u_n\|_{1+\beta}^{1+\beta} + c(\varepsilon)\|u_n\|^{\gamma(1+\beta)^{/}} \tag{9}$$

Từ đây ta được

$$\|u_n\|^p \leq c\left(\|u_n\|^{1+\alpha} + \|u_n\|^{\gamma(1+\beta)^{/}}\right)$$

Ta lại gặp mâu thuẫn vì $1+\alpha < p, \gamma\left(1+\beta\right)^{/} < p$.

Bước 2. Ta chứng minh khi r > 0 đủ nhỏ thì

$$u \neq P(N(u)) + tu_0 \qquad \forall t > 0, \forall u \geq 0, \|u\| = r \tag{10}$$

trong đó hàm u_0 được định nghĩa như sau: ta gọi $\bar{u}$ là hàm riêng dương, tương ứng với vectơ riêng chính λ_0 của toán tử $(-\Delta_p)$ trên tập Ω_0 và đặt $u_0 = c\bar{u}$ trong Ω_0 và $u_0 = 0$ trên $\Omega \setminus \Omega_0$.

Trong [1] đã chứng minh rằng

$$\langle Au_0, \varphi \rangle \le \lambda_0 \int u_0^{p-1}\varphi \le \lambda_0 \int u_0^{\alpha}\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}, \varphi \ge 0 \tag{11}$$

khi $c > 0$ đủ nhỏ.

Tiếp theo ta xây dựng hàm $f_1 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ cho bởi $f_1(x,u) = m_1 u^{\alpha}$ nếu $x \in \Omega_0$,

$f_1(x,u) = 0$ nếu $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ và gọi N_1 là ánh xạ Nemyskii tương ứng với hàm f_1. Ta chọn số σ thoản mãn $1 > \sigma > \max\left\{\frac{\alpha}{p-1}, \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\right\}$ và sẽ chứng minh

$$P[N_1(tu_0)] \ge t^{\sigma} u_0 \text{ thì } t > 0 \text{ đủ nhỏ.} \tag{12}$$

Thật vậy, đặt $v = P[N_1(tu_0)]$ thì theo định nghĩa của ánh xạ P ta có:

$$\langle Av, \varphi \rangle = \int [f_1(x,tu_0) - g(x,v)]\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{13}$$

Chọn $\varphi = (t^{\sigma}u_0 - v)^+$ trong (11), (13) và trừ từng vế ta được

$$\langle A(t^{\sigma}u_0) - Av, (t^{\sigma}u_0 - v)^+ \rangle \le \int_{\Omega_1} [\lambda_0 t^{\sigma(p-1)} u_0^{\alpha} - f_1(x,tu_0) + g(x,v)].(t^{\sigma}u_0 - v), \tag{14}$$

trong đó $\Omega_1 = \{x : t^{\sigma}u_0(x) \ge v(x)\}$. Ta gọi h là hàm trong dấu tích phân ở vế phải của (14). Trên $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ thì $h = 0$ còn trên $\Omega_1 \cap \Omega_0$ ta có $v \le t^{\sigma}u_0$ và vì hàm u_0 bị chặn trên với $t > 0$ đủ nhỏ ta có

$$h \le \left[\lambda_0 t^{\sigma(p-1)} u_0^{\alpha} - m_1(tu_0)^{\alpha} + m_2(t^{\sigma}u_0)^{\alpha+\varepsilon}\right]\left(t^{\sigma}u_0 - v\right) =$$

$$= (tu_0)^{\alpha}[\lambda_0 t^{\sigma(p-1)-\alpha} - m_1 + m_2 t^{\sigma(\alpha+\varepsilon)-\alpha}.u_0^{\beta-\alpha}](t^{\sigma}u_0 - v) \le 0$$

Do đó $\langle A(t^{\sigma}u_0) - Av, (t^{\sigma}u_0 - v)^+ \rangle \le 0$. Từ đây ta suy ra $v \ge t^{\sigma}u_0$ khi $t > 0$ đủ nhỏ.

Bây giờ ta trở lại chứng minh (10). Nếu điều này không đúng thì ta tìm được các dãy $t_n > 0, u_n \ge 0 \quad , \|u_n\| \to 0$ sao cho

$$u_n = P[N(u_n)] + t_n u_0 \tag{15}$$

Vì $u_n \ge t_n u_0$ nên nếu đặt s_n là số lớn nhất sao cho $u_n \ge s_n u_0$ thì $s_n \ge t_n$.

Vì $\|u_n\| \ge c.\|u_n\|_{p^*} \ge cs_n \|u_0\|_{p^*}$ nên $s_n \to 0$.

Từ (15) ta có

$$u_n \ge P[N(u_n)] \ge P[N_1(u_n)] \ge P[N_1(s_n u_0)].$$

Do đó $u_n \geq s_n^\sigma u_0$ theo (12). Do định nghĩa của s_n ta suy ra $s_n^\sigma \leq s_n$. Điều này mâu thuẫn với $\sigma < 1$ và $s_n \to 0$.

Bước 3. Từ các bước 1,2 ta tính được bậc tôpô trong nón K của ánh xạ $P \circ N$ như sau:

$i\left(P \circ N, B(\theta, R), K\right) = 1$ Khi R đủ lớn

$i\left(P \circ N, B(\theta, r), K\right) = 0$ Khi r đủ lớn

Do đó tồn tại $u \in K,\ r < \|u\| < R$ sao cho $u = P \circ N(u)$.

Định lí được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. L. Boccardo, L.Orsina (1994), "Suplinear elliptic equations in L^s", *Houston J.Math*, 20, pp. 99-114.
2. F. Brock, L.Iturriaga, P.Ubilla, (2008), "A multiplicity result for the p-Laplacian involving a parameter", *Ann. HenriPoincare*, 9, pp. 1371-1386.
3. M. Delgado, A. Suarez (2003), "Nonneggative solutions for the degenerate logistic indefinite sublinear equations", *Nonlinear Anal*. 52, pp. 127-141.
4. P. Drabek, J. Hernandez (2001), "Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems", *Nonlinear Anal*, 44, pp. 189-204.
5. M.E. Gurtin, R.C. MacCamy (1977), "On the diffusion of biological populations", *Math. Biosci*. 33, pp. 35-49.
6. N.B. Huy (2002), "Positive weak solutions for some semilinear elliptic equations", *Nonlinear Anal*. 48, pp. 939-945.
7. N.B. Huy, N.D. Thanh, T.D. Thanh (2012), "On the structure of unbounded positive solutions to the quasilinear logistic equation", *Nonlinear Anal.* 75, pp. 3682-3690.
8. A. Iannizzotto, N. Papageorgiou (2011), "Positive solutions for generalized nonlinear logistic equations of superdiffusive tupe", *Topo Meth. Nonlinear Anal*. 38, pp. 95-113.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 01-4-2014; ngày phản biện đánh giá: 25-4-2014; ngày chấp nhận đăng: 16-5-2014)