TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
**TẠP CHÍ KHOA HỌC**
ISSN: 1859-3100
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 14, Số 6 (2017): 165-171

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
**JOURNAL OF SCIENCE**
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 14, No. 6 (2017): 165-171

*Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn*

# MỘT KẾT QUẢ HỘI TỤ NGHIỆM BỊ CHẶN CỦA HỆ TỰA GRADIENT BẬC HAI KHÔNG THUẦN NHẤT

***Phạm Tiến Kha****
*Khoa Toán – Tin học – Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*
*Ngày Tòa soạn nhận được bài: 21-4-2017; ngày phản biện đánh giá: 22-5-2017; ngày chấp nhận đăng: 05-6-2017*

**TÓM TẮT**

*Trong bài viết này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự hội tụ của đạo hàm bậc nhất nghiệm bị chặn của phương trình* $\ddot{u}(t)+\gamma(t)\dot{u}(t)+\nabla\phi(u(t))=g(t)$, *trong đó* $\phi$ *là hàm lồi bị chặn dưới và* $g\in L^1$. *Cụ thể, chúng tôi khẳng định rằng nếu* $\gamma$ *bị chặn,* $\gamma\notin L^1$, $\gamma\in L^3$ *và* $\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma}\in L^1$ *thì* $\dot{u}(t)\to 0$ *khi* $t\to\infty$. *Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số ví dụ thể hiện sự độc lập của điều kiện đủ này với điều kiện được nêu trong [1].*

***Từ khóa:*** hệ tựa gradient, hệ số chống xóc, sự hội tụ.

**ABSTRACT**

***The convergence of the first derivative of bounded solution of Gradient system***

*In this article, we study the convergence of the first derivative of bounded solution of the equation* $\ddot{u}(t)+\gamma(t)\dot{u}(t)+\nabla\phi(u(t))=g(t)$, *where* $\phi$ *is a bounded below convex function and* $g\in L^1$. *In specific, we claim that if* $\gamma$ *is bounded,* $\gamma\notin L^1$, $\gamma\in L^3$ *and* $\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma}\in L^1$, *then* $\dot{u}(t)\to 0$ *as* $t\to\infty$. *We also give some examples showing the independence between this sufficient condition and one given in [1].*

***Keywords:*** gradient-like system, damping term, convergence.

## 1. Giới thiệu

Xét hệ tựa gradient bậc hai không thuần nhất, có dạng

$$\ddot{u}(t)+\gamma(t)\dot{u}(t)+\nabla\phi(u(t))=g(t), \tag{1}$$

trong đó $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ và $\gamma:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ là các hàm thỏa hệ điều kiện sau:

i. $\phi$ thuộc $C^1$, lồi và bị chặn dưới.

ii. $\nabla\phi$ Lipschitz địa phương.

iii. $\gamma\in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

iv. $g\in L^1$.

* Email: *phamtienkha@gmail.com*

Dưới đây ta sẽ dùng kí hiệu $L^p$ thay cho $L^p(0,\infty)$.

Trong [1], Jendoubi đã đưa ra định lí về một điều kiện đủ để $\dot{u}(t) \to 0$ khi $t \to \infty$ với $u$ là một nghiệm bị chặn của (1), cụ thể như sau.

***Định lí 1*** **([1, Định lí 1.1]).**

*Giả sử* $\operatorname{argmin}\phi \neq \varnothing$, $\gamma \notin L^1(0,\infty)$ *và* $\dot{\gamma} \in L^1(0,\infty)$. *Nếu* $u$ *là một nghiệm bị chặn của (1) thì*

$\dot{u}(t) \to 0$ *và* $\phi(u(t)) \to \min\phi$ *khi* $t \to \infty$.

Nhận xét rằng giả thiết $\gamma \notin L^1$ là quan trọng. Chẳng hạn, lấy $\phi(t) = \dfrac{1}{2}t^2$, $\gamma(t)= \dfrac{1}{t^2+1}$ và $g(t) = \dfrac{\cos t}{t^2+1}$. Xét phương trình

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{t^2+1}\dot{u}(t) + u(t) = \frac{\cos t}{t^2+1}.$$

Phương trình này có nghiệm $u(t) = \sin t$ bị chặn, tuy nhiên $\dot{u}(t) \not\to 0$ khi $t \to \infty$. Do đó chúng tôi tin rằng điều kiện $\gamma \notin L^1$ trong Định lí 1 là rất khó thay thế.

Trong quá trình khảo sát bài toán, chúng tôi phát hiện ra rằng có những lớp hàm $\gamma$ không thỏa điều kiện $\dot{\gamma} \in L^1$ nhưng vẫn thu được kết quả hội tụ nghiệm của (1). Với ý tưởng này, chúng tôi đã đưa ra một điều kiện đủ độc lập với Định lí 1 để $\dot{u}(t) \to 0$ khi $t \to \infty$ với $u$ là một nghiệm bị chặn của (1).

## 2. Kết quả chính

Trước hết, ta chứng minh một kết quả cơ bản và quan trọng đã được đề cập trong [1].

***Mệnh đề 2.***

Nếu $u$ là một nghiệm của (1) thì $\dot{u} \in L^\infty$ và $\sqrt{\gamma}\dot{u} \in L^2$.

*Chứng minh.* Xét hàm số

$$J(t) = \frac{1}{2}\|\dot{u}(t)\|^2 + \phi(u(t)) - \inf\phi + 1.$$

Do $\phi(u(t)) - \inf\phi + 1 > 0, \forall t > 0$ nên $J(t) > \dfrac{1}{2}\|\dot{u}(t)\|^2$, suy ra $\|\dot{u}(t)\| \leq \sqrt{2J(t)}$. (2)

Vì $u$ là nghiệm của (1) và thỏa (2) nên

$$\begin{aligned}\dot{J}(t) &= \langle \dot{u}(t), \ddot{u}(t) + \nabla\phi(u(t))\rangle \\ &= \langle \dot{u}(t), g(t) - \gamma(t)\dot{u}(t)\rangle \\ &\leq \langle \dot{u}(t), g(t)\rangle \leq \|\dot{u}(t)\| \cdot \|g(t)\| \\ &\leq \sqrt{2J(t)} \cdot \|g(t)\|.\end{aligned}$$

Do $J(t) > 0$ nên $\dfrac{\dot{J}(t)}{\sqrt{J(t)}} \leq \sqrt{2}\|g(t)\|$. Lấy tích phân hai vế trên $(0,t)$, suy ra

$$\sqrt{J(t)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \| g(s) \| \, ds + \sqrt{J(0)}.$$

Vì $g \in L^1$ nên $\sqrt{J(t)} \le M$ với $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \| g(s) \| \, ds + \sqrt{J(0)}$. (3).

Từ (2) và (3), ta được $\| \dot{u}(t) \| \le M\sqrt{2}$. Vậy $\dot{u} \in L^\infty$.

Xét hàm năng lượng

$$E(t) = \frac{1}{2}\| \dot{u}(t) \|^2 + \phi(u(t)) - \inf \phi + \int_t^\infty \langle g(\tau), \dot{u}(\tau) \rangle d\tau . \quad (4)$$

Ta có $E$ bị chặn dưới bởi $-\| u \|_{L^\infty} \| g \|_{L^1}$. Do $\frac{dE}{dt}(t) = -\gamma(t) \| \dot{u}(t) \|^2$ nên

$$\int_0^t \gamma(s) \| \dot{u}(s) \|^2 \, ds = E(0) - E(t) \le E(0) + \| \dot{u} \|_{L^\infty} \| g \|_{L^1} < \infty.$$

Vậy $\sqrt{\gamma} \| \dot{u} \| \in L^2$. □

***Định lí 3.***

*Giả sử* $\operatorname{argmin} \phi \ne \varnothing$ *và* $\gamma$ *bị chặn,* $\gamma \notin L^1$, $\gamma \in L^3$ *và* $\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} \in L^1$. *Nếu* $u$ *là một nghiệm bị chặn của (1) thì*

$$\dot{u}(t) \to 0 \text{ và } \phi(u(t)) \to \min \phi \text{ khi } t \to \infty.$$

*Chứng minh.* Xét hàm năng lượng được xác định như (4). Ta có

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \langle \ddot{u}(t) + \nabla \phi(u(t)) - g(t), \dot{u}(t) \rangle \\ &= -\gamma(t) \| \dot{u}(t) \|^2 \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Suy ra $E$ giảm. Hơn nữa, ta có

$$\left| \int_t^\infty \langle g(\tau), \dot{u}(\tau) \rangle d\tau \right| \le \left| \int_t^\infty \| g(\tau) \| \cdot \| \dot{u}(\tau) \| \, d\tau \right| \le \| \dot{u} \|_{L^\infty} \| g \|_{L^1} .$$

Do đó $E$ bị chặn dưới bởi $-\| u \|_{L^\infty} \| g \|_{L^1}$. Vậy $E$ có giới hạn hữu hạn $E_\infty$ khi $t \to \infty$.

Mặt khác, ta cũng có

$$\left| \int_t^\infty \langle g(\tau), \dot{u}(\tau) \rangle d\tau \right| \le \| \dot{u} \|_{L^\infty} \left| \int_t^\infty \| g(\tau) \| \, d\tau \right| \to 0 \text{ khi } t \to \infty ,$$

nên $E_\infty$ cũng là giới hạn khi $t \to \infty$ của hàm $\tilde{E}$ xác định bởi

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\| \dot{u}(t) \|^2 + \phi(u(t)) - \inf \phi.$$

Như vậy để chứng minh định lí, ta chỉ cần chứng minh $E_\infty = 0$.

Lấy $v \in \operatorname{argmin} \phi$ và xét hàm

$$h(t) = \frac{1}{2} \| u(t) - v \|^2 .$$

Ta có

$$\ddot{h}(t) + \gamma(t)\dot{h}(t) = \| \dot{u}(t) \|^2 - \langle \nabla \phi(u(t)), u(t) - v \rangle + \langle g(t), u(t) - v \rangle.$$

Do $\phi$ là hàm lồi nên

$$\phi(v) \geq \phi(u(t)) + \langle \nabla \phi(u(t)), v - u(t) \rangle,$$

do đó

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) + \gamma(t)\dot{h}(t) &\leq \| \dot{u} \|^2 + \phi(v) - \phi(u(t)) + \langle g(t), u(t) - v \rangle \\ &\leq \frac{3}{2} \| \dot{u}(t) \|^2 - \tilde{E}(t) + (\| u \|_{L^\infty} + \| v \|) \| g(t) \| . \end{aligned}$$

Lấy $T > 0$. Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $\gamma(t)$ (do $\gamma$ nhận giá trị dương nên bất đẳng thức giữ nguyên chiều) và lấy tích phân trên $[0, T]$, ta có

$$\int_0^T \gamma(t)\tilde{E}(t)dt \leq M_0 - \int_0^T \gamma(t)\ddot{h}(t)dt - \int_0^T \gamma^2(t)\dot{h}(t)dt$$

với

$$M_0 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \gamma(t) \| \dot{u}(t) \|^2 dt + (\| u \|_{L^\infty} + \| v \|) \| g \|_{L^1} \sup_{t \geq 0} | \gamma(t) | .$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$\left| \int_0^T \gamma(t)\ddot{h}(t)dt \right| + \left| \int_0^T \gamma^2(t)\dot{h}(t)dt \right| \leq M.$$

Ta chỉ cần chứng minh từng số hạng trong tổng trên bị chặn bằng cách đánh giá từng tích phân.

- Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^T \gamma(t)\ddot{h}(t)dt = \gamma(t)\dot{h}(t) \Big|_0^T - \int_0^T \dot{\gamma}(t)\dot{h}(t)dt.$$

Theo giả thiết thì $\gamma$ bị chặn, đồng thời do $u, \dot{u}$ cũng bị chặn nên $\gamma(t)\dot{h}(t)$ bị chặn. Đồng thời

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \dot{\gamma}(t)\dot{h}(t)dt \right| &= \left| \int_0^T \frac{\dot{\gamma}(t)}{\sqrt{\gamma(t)}} \cdot \sqrt{\gamma(t)} \langle \dot{u}(t), u(t) - v \rangle dt \right| \\ &\leq \left( \int_0^T \frac{\dot{\gamma}^2(t)}{\gamma(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \gamma(t) \langle \dot{u}(t), u(t) - v \rangle^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_0^T \frac{\dot{\gamma}^2(t)}{\gamma(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \gamma(t) \| \dot{u}(t) \|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sup_{t \geq 0} (\| u(t) \| + \| v \|)}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết thì $\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} \in L^1$ và $\sqrt{\gamma}\dot{u} \in L^2$ nên từ đây suy ra $\left|\int_0^T \gamma(t)\ddot{h}(t)dt\right|$ bị chặn.

- Ta có

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \gamma^2(t)\dot{h}(t)dt\right| &= \left|\int_0^T \gamma^2(t)\langle \dot{u}(t), u(t)-v\rangle dt\right| \\ &= \left|\int_0^T \gamma(t)\sqrt{\gamma(t)}\cdot\sqrt{\gamma(t)}\dot{u}(t)(u(t)-v)dt\right| \\ &\le \left(\int_0^T \gamma^3(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \gamma(t)\,\|\dot{u}(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\sup_{t\ge 0}(\|u(t)\|+\|v\|)}.\end{aligned}$$

Do $\gamma \in L^3$ và $\sqrt{\gamma}\dot{u} \in L^2$ nên suy ra $\left|\int_0^T \gamma^2(t)\dot{h}(t)dt\right|$ bị chặn.

Vậy

$$\int_0^T \gamma(t)\tilde{E}(t)dt \le M_0 + M.$$

Cho $T \to \infty$, suy ra $\int_0^\infty \gamma(t)\tilde{E}(t)dt < \infty$. Do $\tilde{E}(t) \ge 0$ với mọi $t \ge 0$ và $\lim_{t\to\infty}\tilde{E}(t) = E_\infty$ nên $E_\infty \ge 0$. Nếu $E_\infty > 0$ thì

$$\infty > \int_0^\infty \gamma(t)\tilde{E}(t)dt \ge E_\infty \int_0^\infty \gamma(t)dt,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $\gamma \notin L^1$.

Vậy $E_\infty = 0$. Định lí được chứng minh hoàn toàn. □

## 3. Một số ví dụ

Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra sự độc lập giữa kết quả trong Định lí 3 và Định lí 1 bằng một vài ví dụ. Cụ thể, chúng tôi đưa ra một lớp các hàm $\gamma$ thỏa các giả thiết của Định lí 3 nhưng không thỏa giả thiết $\dot{\gamma} \in L^1$ của Định lí 1 và ngược lại.

Ta xét hàm $\gamma_0 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ xác định như sau:

$$\gamma_0(t) = \frac{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1}{\sqrt{t+1}}, \forall t > 0.$$

Khi đó $\gamma_0$ thỏa mãn các tính chất sau:

i. $\lim_{t\to\infty}\gamma_0(t) = 0$;

ii. $\gamma_0 \in L^3$, $\gamma_0 \notin L^1$;

iii. $\dot{\gamma}_0 \notin L^1$, $\frac{\dot{\gamma}_0^2}{\gamma_0} \in L^1$.

*Chứng minh*. Các tính chất i), ii) có thể dễ dàng kiểm tra. Thật vậy,

$$\int_0^\infty |\gamma_0(t)|\,dt \geq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = \infty.$$

Do đó $\gamma_0 \notin L^1$.

Ta chứng minh tính chất iii). Ta có

$$\dot{\gamma}_0(t) = \frac{5\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)}{8(t+1)^{7/8}} - \frac{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1}{2(t+1)^{3/2}}.$$

Ta chứng minh rằng

$$\frac{\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)}{(t+1)^{7/8}} \notin L^1.$$

Do $\left|\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)\right| \leq 1$ nên $\left|\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)\right| \geq \sin^2\left(2(t+1)^{5/8}\right) = \dfrac{1-\cos\left(4(t+1)^{5/8}\right)}{2}$, do đó

$$\int_0^\infty \frac{\left|\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)\right|}{(t+1)^{7/8}}dt \geq \int_0^\infty \frac{1-\cos\left(4(t+1)^{5/8}\right)}{2(t+1)^{7/8}}dt = \int_0^\infty \frac{1}{2(t+1)^{7/8}}dt - \int_0^\infty \frac{\cos\left(4(t+1)^{5/8}\right)}{2(t+1)^{7/8}}dt.$$

Tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\left(4(t+1)^{5/8}\right)}{2(t+1)^{7/8}}dt$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet, còn tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2(t+1)^{7/8}}dt$ phân kì, do đó $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left|\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)\right|}{(t+1)^{7/8}}dt$ phân kì, tức là $\dfrac{\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)}{(t+1)^{7/8}} \notin L^1$.

Đồng thời, $\dfrac{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1}{2(t+1)^{3/2}} \in L^1$, do đó

$$\int_0^\infty |\dot{\gamma}_0(t)|\,dt \geq \int_0^\infty \frac{\left|\sin\left(2(t+1)^{5/8}\right)\right|}{(t+1)^{7/8}}dt - \int_0^\infty \frac{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1}{2(t+1)^{3/2}}dt = \infty.$$

Vậy $\dot{\gamma}_0 \notin L^1$.

Ngoài ra, dễ thấy

$$\frac{\dot{\gamma}_0^2(t)}{\gamma_0(t)} = \left(\frac{5\sin((t+1)^{5/8})\cos((t+1)^{5/8})}{4(t+1)^{7/8}} - \frac{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1}{2(t+1)^{3/2}}\right)^2 \frac{\sqrt{t+1}}{\sin^2\left((t+1)^{5/8}\right)+1} \in L^1.$$

Vậy ta đã chứng minh $\gamma_0$ thỏa cả ba điều kiện i), ii) và iii). Một cách tổng quát, lớp hàm

$$\Gamma_0 = \left\{\frac{\sin^2((t+1)^\alpha)+1}{(t+1)^\beta} : \frac{1}{3} < \beta < 1, \beta < \alpha < \frac{\beta+1}{2}\right\}$$

thỏa giả thiết của Định lí 3 nhưng không thỏa giả thiết của Định lí 1.

Ngược lại, ta cũng có thể chỉ ra lớp hàm

$$\Gamma_1 = \left\{ \frac{1}{(t+1)^\alpha} : 0 < \alpha < \frac{1}{3} \right\}$$

thỏa giả thiết của Định lí 1 nhưng không thỏa giả thiết của Định lí 3.

Ngoài ra, lớp hàm

$$\Gamma_2 = \left\{ \frac{1}{(t+1)^\alpha} : \frac{1}{3} < \alpha < 1 \right\}$$

thỏa giả thiết của cả Định lí 1 và Định lí 3.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

[1] Mohamed Ali Jendoubi, Ramzi May, "Asymptotics for a second-order differential equation with nonautonomous damping and an integrable source term," *Applicable Analysis 94 (2),* 2015, pp.436 – 444.

[2] Alain Haraux, Mohamed Ali Jendoubi, "On a second order dissipative ODE in Hilbert space with an integrable source term," *Acta Math. Sci,* 2012, pp.155 – 163.