TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 14, Số 6 (2017): 146-156

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 14, No. 6 (2017): 146-156

ISSN: 1859-3100

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

MỘT LỚP MỞ RỘNG KÉP CỦA MỘT VÀI ĐẠI SỐ LIE TOÀN PHƯƠNG GIẢI ĐƯỢC 7 CHIỀU

Nguyễn Thị Mộng Tuyền *

Khoa Sư phạm Toán Tin - Trường Đại học Đồng Tháp

Ngày Tòa soạn nhận được bài: 15-3-2017; ngày phản biện đánh giá: 05-5-2017; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2017

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một lớp mở rộng kép của một vài đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều đã được liệt kê trong [4]. Kết quả thu được là một phần trong bài toán phân loại các đại số Lie toàn phương giải được 9 chiều bằng phương pháp mở rộng kép.

Từ khóa: đại số Lie toàn phương giải được, mở rộng kép.

ABSTRACT

A double extension class of some solvable quadratic Lie algebras of dimension 7

In this paper, we study and come up with result that a class double extension of some of solvable quadratic Lie algebras of dimension 7 listed in [4]. The result is a part of classification of solvable quadratic Lie algebras of dimension 9 by applying the method of double extension.

Keywords: solvable quadratic Lie algebra, double extension.

1. Mở đầu

Trong vài thập niên gần đây, bài toán phân loại các đại số Lie toàn phương (giải được hay không giải được) luôn là một vấn đề thời sự được rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm. Nhắc lại rằng, đại số Lie toàn phương là một đại số Lie hữu hạn chiều trên trường đóng đại số F cùng với một dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến và không suy biến. Để thấy rõ tính thời sự của vấn đề, trước hết chúng ta điểm lại một số công trình tiêu biểu trong khoảng ba thập niên gần đây.

- Năm 1987, Favre và Santharoubane [1] đã phân loại các đại số Lie toàn phương lũy linh chiều bé hơn hoặc bằng 7 bằng phương pháp mở rộng kép trên không gian véctơ toàn phương.
- Năm 2003, Baum và Kath [2] đã phân loại các đại số Lie toàn phương giải được chiều bé hơn hoặc bằng 6.
- Năm 2007, Kath [3] đã phân loại các đại số Lie toàn phương lũy linh chiều bé hơn hoặc bằng 10 bằng phương pháp đối đồng điều toàn phương.
- Năm 2014, Duong [4] đã phân loại các đại số Lie toàn phương giải được chiều bé hơn hoặc bằng 8 bằng phương pháp mở rộng kép trên không gian véctơ toàn phương.

* Email: *ntmtuyen@dthu.edu.vn*

- Năm 2008, Campoamor và Stursberg [6] đã phân loại các đại số Lie toàn phương không giải được chiều bé hơn hoặc bằng 9.
- Năm 2014, Benayadi [7] đã phân loại các đại số Lie toàn phương không giải được chiều bé hơn hoặc bằng 13.

Như vậy, cho đến thời điểm này, vẫn chưa có một kết quả nào về phân loại lớp các đại số Lie toàn phương giải được chiều lớn hơn hoặc bằng 9. Đây chính là động lực để chúng tôi hướng đến nghiên cứu bài toán phân loại các đại số Lie toàn phương giải được 9 chiều bằng cách mở rộng kép các đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều trong [4]. Mặc dù đã hạn chế trên số chiều 9, vấn đề vẫn còn rất phức tạp. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu được một lớp mở rộng kép hoàn toàn mới của ba đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều.

Bài báo được bố cục như sau: Phần 1 nêu vấn đề và đặt bài toán nghiên cứu. Phần 2 nhắc lại phân loại các đại số Lie toàn phương giải được đến 7 chiều trong [4]. Phần 3 giới thiệu các kết quả chính của bài báo về một lớp hoàn toàn mới các đại số Lie giải được 9 chiều.

2. Phân loại các đại số Lie toàn phương giải được đến 7-chiều

Định nghĩa 2.1. [5]

Cho một đại số Lie hữu hạn chiều $\mathcal{G}$ trên trường $\mathbb{F}$. Một dạng song tuyến tính $B:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathbb{F}$ được gọi là:

1. Đối xứng nếu $B(X,Y)=B(Y,X), \forall X,Y\in\mathcal{G}$.
2. Không suy biến nếu $B(X,Y)=0, \forall Y\in\mathcal{G}$ thì $X=0$.
3. Bất biến (hay kết hợp) nếu $B([X,Y],Z)=B(X,[Y,Z]), \forall X,Y,Z\in\mathcal{G}$.

Khi đó, $(\mathcal{G},B)$ được gọi là *đại số Lie toàn phương*.

Ta kiểm tra được nếu I là iđêan của $\mathcal{G}$ thì $I^{\perp}$ (tức là, $I^{\perp}=\{X\in\mathcal{G} \mid B(X,Y)=0, \forall Y\in I\}$) cũng là iđêan của $\mathcal{G}$. Hơn nữa, nếu I không suy biến (tức là, $B|_{I\times I}$ không suy biến) thì $I^{\perp}$ cũng không suy biến và $\mathcal{G}=I\oplus I^{\perp}$. Trong trường hợp này, ta kí hiệu $\mathcal{G}=I\overset{\perp}{\oplus} I^{\perp}$. Nhớ lại rằng, một đại số Lie toàn phương $\mathcal{G}$ được gọi là bất khả phân nếu nó không chứa bất kì một iđêan thực sự không suy biến nào. Ngược lại, chúng ta gọi $\mathcal{G}$ là khả phân. Rõ ràng, nếu $X\in Z(\mathcal{G})$, $B(X,X)\neq 0$ thì $\mathcal{G}$ là khả phân.

Định nghĩa 2.2. [5]

Cho $(\mathfrak{h},[.,.]_{\mathfrak{h}},B)$ là một đại số Lie toàn phương và D là đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{h}$ (tức là, D thỏa mãn $B(D(X),Y)=-B(X,D(Y)), \forall X,Y\in\mathfrak{h}$). Chúng ta định nghĩa trên không gian véctơ $\mathcal{G}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{F}e\oplus\mathbb{F}f$ tích:

$[X,Y]=[X,Y]_{\mathfrak{h}}+B(D(X),Y)f$, $[e,X]=D(X)$, $\forall X, Y\in\mathfrak{h}$, $[f,\mathcal{G}]=0$.

Khi đó G được gọi là một đại số Lie toàn phương với dạng song tuyến tính bất biến B_{G} được xác định bởi:

$B_{\mathrm{G}}(e,e) = B_{\mathrm{G}}(f,f) = B_{\mathrm{G}}(e,\mathrm{h}) = B_{\mathrm{G}}(f,\mathrm{h}) = 0,\ B_{\mathrm{G}}(X,Y) = B(X,Y),\ B(e,f) = 1, \forall X,Y \in \mathrm{G}.$
Chúng ta gọi G là mở rộng kép của h bởi D hoặc là mở rộng kép một chiều của h. Kí hiệu $(\mathrm{G}, B_{\mathrm{G}}, D)$.

Mở rộng kép là phương pháp hữu ích và được sử dụng thường xuyên trong bài toán phân loại. Trong định nghĩa trên, nếu h là aben và $D \neq 0$ thì $\mathrm{G}^2 = \{0\}$ hoặc $\dim \mathrm{G}^2 = 1$ (với $\mathrm{G}^2 = \left[[\mathrm{G},\mathrm{G}],[\mathrm{G},\mathrm{G}]\right]$) và G là mở rộng kép một bước.

Mệnh đề 2.3. [5]

Cho G là đại số Lie toàn phương và D_1, D_2 là các đạo hàm phản xứng của G. Nếu $D_1 - D_2 = ad(X),\ X \in \mathrm{G}$ thì các mở rộng kép của G bởi D_1, D_2 là đẳng cấu.

Mệnh đề 2.4. [5]

Cho (G, B) là đại số Lie toàn phương giải được, $\dim \mathrm{G} = n,\ (n \leq 6)$.

1. Nếu $n \leq 3$ thì G là aben.
2. Nếu $n = 4$ thì G đẳng cấu đẳng cự với F^4 hoặc $\mathrm{G}_4 = \mathrm{span}\{X,P,Q,Z\}$, trong đó $B(X,Z) = B(P,Q) = 1,\ [X,P] = P,\ [X,Q] = -Q,\ [P,Q] = Z.$
3. Nếu $n = 5$ thì G đẳng cấu đẳng cự với $\mathrm{F}^5,\ \mathrm{G}_4 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}$ hoặc $\mathrm{G}_5 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, T, Z_1, Z_2\}$ sao cho $B(X_1,Z_1) = B(X_2,Z_2) = B(T,T) = 1$, và $[X_1,X_2] = T,\ [X_1,T] = -Z_2,\ [X_2,T] = Z_1.$
4. Nếu $n = 6$ thì G đẳng cấu đẳng cự với $\mathrm{F}^6,\ \mathrm{G}_4 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^2,\ \mathrm{G}_5 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}$ hoặc $\mathrm{G}_6 = \mathrm{span}\{X_1,X_2,X_3,Z_1,Z_2,Z_3\}$, trong đó $B(X_1,Z_1) = B(X_2,Z_2) = B(X_3,Z_3) = 1$ và G đẳng cấu đẳng cự với mỗi đại số Lie sau:

(i) $\mathrm{G}_{6,1} : [X_1,X_2] = Z_3,\ [X_2,X_3] = Z_1,\ [X_3,X_1] = Z_2.$

(ii) $\mathrm{G}_{6,2(\lambda)} : [X_3,X_1] = X_1,\ [X_3,X_2] = \lambda X_2,\ [X_3,Z_1] = -Z_1,\ [X_3,Z_2] = -\lambda Z_2, [X_1,Z_1]$
$= Z_3,\ [X_2,Z_2] = \lambda Z_3.$

(iii) $\mathrm{G}_{6,3}$: $[X_3,X_1] = X_1,\ [X_3,X_2] = X_1 + X_2,\ [X_3,Z_1] = -Z_1 - Z_2,\ [X_3,Z_2] = -Z_2,$
$[X_1,Z_1] = Z_3,\ [X_2,Z_2] = Z_3,\ [X_2,Z_1] = Z_3.$

Mệnh đề 2.5. [4]

Cho (G, B) là đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều.

1. Nếu G là khả phân thì G đẳng cấu đẳng cự với $\mathrm{G}_6 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}$, trong đó G_6 là đại số Lie toàn phương giải được 6 chiều trong Mệnh đề 2.4.

2. Nếu G là bất khả phân thì tồn tại một cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, T, Z_1, Z_2, Z_3\}$ của G sao cho dạng song tuyến tính B được xác định $B(X_1, Z_1) = B(X_2, Z_2) = B(X_3, Z_3) = B(T, T) = 1$ và G đẳng cấu đẳng cự với các đại số Lie sau:

(i) $G_{7,1}: [X_3, X_2] = X_1, [X_3, T] = X_2, [X_3, Z_1] = -Z_2, [X_3, Z_2] = -T, [X_2, Z_1] = Z_3,$ $[T, Z_2] = Z_3.$

(ii) $G_{7,2}: [X_3, X_1] = X_1, [X_3, T] = X_2, [X_3, Z_1] = -Z_1, [X_3, Z_2] = -T, [X_1, Z_1] = Z_3,$ $[T, Z_2] = Z_3.$

(iii) $G_{7,3}: [X_3, X_1] = X_1, [X_3, X_2] = -X_2, [X_3, Z_1] = -Z_1, [X_3, Z_2] = -Z_2, [X_1, Z_1] =$ $Z_3, [X_2, Z_2] = -Z_3, [X_1, X_2] = T, [X_1, T] = -Z_2, [X_2, T] = Z_1.$

Với kết quả của Mệnh đề 2.5, chúng tôi đã nghỉ đến việc giải quyết bài toán phân loại đại số Lie toàn phương giải được 9 chiều bằng phương pháp mở rộng kép các đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều. Dưới đây là một vài kết quả ban đầu mà chúng tôi thu được:

3. Một lớp mở rộng kép của một vài đại số Lie toàn phương giải được 7 chiều trong Mệnh đề 2.5

Định lí 3.1.

Gọi D là một đạo hàm phản xứng của đại số Lie toàn phương $G_{6,1} \overset{\perp}{\oplus} F$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3, Y\}$ được xác định như sau:

$$D = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_1 & -z_2 & x_1 + y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & -(x_1 + y_2) & t_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_i, y_i, z_i, t_i \in F,\ i = 1, 2, 3.$$

Nếu các $t_i = 0,\ i = 1, 2, 3$ thì mở rộng kép của $G_{6,1} \overset{\perp}{\oplus} F$ bởi D là:

1. $G_{9,1}: [X_1, X_2] = Z_3, [X_2, X_3] = Z_1, [X_3, X_1] = Z_2.$

2. $G_{9,2}: [e, X_2] = X_1, [e, Z_1] = -Z_2, [X_1, X_2] = Z_3, [X_2, X_3] = Z_1, [X_2, Z_1] = f, [X_3, X_1] = Z_2.$

3. $G_{9,3}: [e, X_2] = X_1, [e, X_3] = X_2, [e, Z_1] = -Z_2, [e, Z_2] = -Z_3, [X_1, X_2] = Z_3, [X_2, X_3]$ $= Z_1, [X_2, Z_1] = f, [X_3, X_1] = Z_2, [X_3, Z_2] = f.$

4. $G_{9,4}: [e, X_2] = X_2, [e, X_3] = -X_3, [e, Z_2] = -Z_2, [e, Z_3] = Z_3, [X_1, X_2] = Z_3, [X_2, X_3]$ $= Z_1, [X_2, Z_2] = f, [X_3, X_1] = Z_2, [X_3, Z_3] = -f.$

5. $\mathrm{G}_{9,5}:[e,X_1]=X_1,[e,X_2]=X_1+X_2,[e,X_3]=-2X_3,[e,Z_1]=-Z_1-Z_2,[e,Z_2]=-Z_2,$
$[e,Z_3]=2Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_2,X_3]=Z_1,[X_2,Z_1]=f$,
$[X_2,Z_2]=f$, $[X_3,Z_3]=-2f$.

6. $\mathrm{G}_{9,6}:[e,X_1]=X_1,[e,X_2]=\alpha X_2,[e,X_3]=(-1-\alpha)X_3$, $[e,Z_1]=-Z_1$, $[e,Z_2]=-\alpha Z_2$,
$[e,Z_3]=(1+\alpha)Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_2,X_3]=Z_1,[X_2,Z_2]=\alpha f$,
$[X_3,Z_3]=(-1-\alpha)f$.

Chứng minh.

Giả sử $\mathfrak{h}=\mathrm{G}_{6,1}\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}=\mathrm{span}\{X_1,X_2,X_3,Z_1,Z_2,Z_3,Y\}$, với móc Lie $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_3,X_1]=Z_2$ và dạng song tuyến tính $B(X_1,Z_1)=B(X_2,Z_2)=B(X_3,Z_3)=B(X,X)=1$. Nếu D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{h}$ đối với cơ sở đã chọn. Ta tính được ma trận biểu diễn của D:

$$D=\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -z_1 & -z_2 & x_1+y_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -b_1 & -c_1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1\\ b_1 & 0 & -c_2 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2\\ c_1 & c_2 & 0 & x_3 & y_3 & -(x_1+y_2) & t_3\\ -t_1 & -t_2 & -t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_i,y_i,z_i,t_i,b_1,c_1,c_2\in\mathbb{F},\ i=1,2,3.$$

Theo Mệnh đề 2.3 ta chọn $b_1=c_1=c_2=0$. Khi đó ta xét ma trận D như sau:

$$D=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & -A^t & B\\ -B^t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

với $A=\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3\\ -y_1 & -y_2 & -y_3\\ -z_1 & -z_2 & x_1+y_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3\end{pmatrix}$. Đặt $\mathrm{G}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{F}e\oplus\mathbb{F}f$.

Xét đẳng cấu $P:\mathrm{G}_{6,1}\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}\to\mathrm{G}_{6,1}\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}$ sao cho $P=Q\otimes id$ với Q là đẳng cấu của $\mathrm{G}_{6,1}$ và id là ánh xạ đồng nhất của $\mathbb{F}$. Nếu chọn $B=0$ và vết của A bằng 0 thì chúng ta xét các trường hợp sau của ma trận A:

1. $A=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_2,X_3]=Z_1$,
$[X_3,X_1]=Z_2$.

2. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_2]=X_1$, $[e,Z_1]=-Z_2$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_2,Z_1]=f$, $[X_3,X_1]=Z_2$.

3. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_2]=X_1$, $[e,X_3]=X_2$, $[e,Z_1]=-Z_2$, $[e,Z_2]=-Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_2,Z_1]=f$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_3,Z_2]=f$.

4. $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_2]=X_2$, $[e,X_3]=-X_3$, $[e,Z_2]=-Z_2$, $[e,Z_3]=Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_2,Z_2]=f$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_3,Z_3]=-f$.

5. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_1]=X_1$, $[e,X_2]=X_1+X_2$, $[e,X_3]=-2X_3$, $[e,Z_1]=-Z_1-Z_2$, $[e,Z_2]=-Z_2$, $[e,Z_3]=2Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_2,Z_1]=f$, $[X_2,Z_2]=f$, $[X_3,Z_3]=-2f$.

6. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&-1-\alpha\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_1]=X_1$, $[e,X_2]=\alpha X_2$, $[e,X_3]=(-1-\alpha)X_3$, $[e,Z_1]=-Z_1$, $[e,Z_2]=-\alpha Z_2$, $[e,Z_3]=(1+\alpha)Z_3$, $[X_1,X_2]=Z_3$, $[X_3,X_1]=Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_2,X_3]=Z_1$, $[X_2,Z_2]=\alpha f$, $[X_3,Z_3]=(-1-\alpha)f$.

Nhận xét 3.2. Ta có các mở rộng kép của $\mathrm{G}_{6,1}\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{F}$ trong Định lí 3.1 là khả phân, vì $X\in Z(\mathrm{G})$ và $B(X,X)\neq 0$.

Định lí 3.3.

Gọi D là một đạo hàm phản xứng của đại số Lie $\mathrm{G}_5\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{F}^2$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{X_1,X_2,T,Z_1,Z_2,Y_1,Y_2\}$ được xác định bởi:

$$D=\begin{pmatrix} -x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & A \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & -x_1 & B \\ -A^t & -B^t & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

với $A=(x_3\ y_3),\ B=(x_4\ y_4),\ C\in\mathfrak{o}(2),\ x_i,\ y_i\in\mathbb{F},\ i=1,2,3,4.$ Nếu $x_3=y_3=y_4=0,\ x_4=1$ thì mở rộng kép của $\mathfrak{G}_5\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}^2$ bởi D là:

1. $\mathfrak{G}_{9,7}:[e,X_1]=-Y_2,\ [e,Y_2]=Z_1,\ [X_1,X_2]=T,\ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_1,Y_2]=-f,\ [X_2,T]=Z_1.$
2. $\mathfrak{G}_{9,8}:[e,X_1]=-Y_2,\ [e,X_2]=X_1,\ [e,Z_1]=-Z_2,\ [e,Y_2]=Z_1,\ [X_1,X_2]=T, [X_1,T]=-Z_2,$ $[X_1,Y_2]=-f,\ [X_2,T]=Z_1,\ [X_2,Z_1]=f.$
3. $\mathfrak{G}_{9,9}:[e,X_1]=X_1-Y_2,\ [e,X_2]=-X_2, [e,Z_1]=-Z_1, [e,Z_2]=Z_2,\ [e,Y_2]=Z_1,\ [X_1,X_2]$ $=T,\ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_1,Z_1]=f,\ [X_1,Y_2]=-f,\ [X_2,T]=Z_1,\ [X_2,Z_2]=-f.$
4. $\mathfrak{G}_{9,10}:[e,X_1]=-Y_2,\ [e,Y_1]=Y_2,\ [e,Y_2]=Z_1-Y_1,\ [X_1,X_2]=T,\ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_1,Y_2]$ $=-f,\ [X_2,T]=Z_1,\ [Y_1,Y_2]=f.$
5. $\mathfrak{G}_{9,11}:[e,X_1]=-Y_2,\ [e,X_2]=X_1,\ [e,Z_1]=-Z_2,\ [e,Y_1]=Y_2,\ [e,Y_2]=Z_1-Y_1,\ [X_1,X_2]$ $=T,\ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_1,Y_2]=-f,\ [X_2,T]=Z_1,\ [X_2,Z_1]=[Y_1,Y_2]=f.$
6. $\mathfrak{G}_{9,12}:[e,X_1]=X_1-Y_2,\ [e,X_2]=-X_2,\ [e,Z_1]=-Z_1,\ [e,Z_2]=Z_2,\ [e,Y_1]=Y_2,\ [e,Y_2]$ $=Z_1-Y_1,\ [X_1,X_2]=T,\ \ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_1,Z_1]=f,\ \ [X_1,Y_2]=-f,\ [X_2,T]=Z_1,$ $[X_2,Z_2]=-f,\ [Y_1,Y_2]=f.$

Chứng minh.

Giả sử $\mathfrak{h}=\mathfrak{G}_5\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}^2$, chọn cơ sở $\{X_1,X_2,T,Z_1,Z_2\}$ của $\mathfrak{G}_5$ sao cho $[X_1,X_2]=T,\ [X_1,T]=-Z_2,\ [X_2,T]=Z_1,\ B(X_1,Z_1)=B(X_2,Z_2)=B(T,T)=1$ và cơ sở trực giao $\{Y_1,Y_2\}$ của $\mathbb{F}^2$. Gọi D là một đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{G}$ đối với cơ sở $\{X_1,X_2,T,Z_1,Z_2,Y_1,Y_2\}$. Ta tính được ma trận biểu diễn của D như sau:

$$D=\begin{pmatrix} -x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & -a_1 & x_1 & x_2 & A \\ c_1 & 0 & -a_2 & y_1 & -x_1 & B \\ -A^t & -B^t & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

với $A=(x_3\ x_4),\ B=(y_3\ y_4),\ C\in\mathfrak{o}(2), x_i, y_i, a_1, a_2, c_1\in\mathbb{F},\ i=1,2,3,4.$ Theo Mệnh đề 2.3, ta có thể chọn $a_1=a_2=c_1=0.$ Khi đó

$$D=\begin{pmatrix} -x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & A\\ 0 & 0 & 0 & y_1 & -x_1 & B\\ -A^t & -B^t & 0 & 0 & 0 & C\end{pmatrix}.$$

Đặt $\mathcal{G}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{F}e\oplus\mathbb{F}f$. Nếu đẳng cấu $P:\mathcal{G}_5\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}^2\to\mathcal{G}_5\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{F}^2$ sao cho $P=Q\otimes id$ với Q là đẳng cấu của $\mathcal{G}_5$ và id là ánh xạ đồng nhất của $\mathbb{F}^2$. Vì $C\in\mathfrak{o}(2)$ nên $C\in\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $F=\begin{pmatrix}-x_1&-y_1\\-x_2&x_1\end{pmatrix}$ đồng dạng với một ma trận dạng Jordan và F có vết bằng 0 nên $F\in\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$. Đặt $E=\begin{pmatrix}x_3&x_4\\y_3&y_4\end{pmatrix}$. Nếu $E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ thì ta xét các trường hợp sau:

1. $F=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của $\mathcal{G}$ được xác định bởi: $[e,X_1]=-Y_2$, $[e,Y_2]=Z_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$.

2. $F=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của $\mathcal{G}$ được xác định bởi: $[e,X_1]=-Y_2$, $[e,X_2]=X_1$, $[e,Z_1]=-Z_2$, $[e,Y_2]=Z_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$, $[X_2,Z_1]=f$.

3. $F=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của $\mathcal{G}$ được xác định bởi: $[e,X_1]=X_1-Y_2$, $[e,X_2]=-X_2$, $[e,Z_1]=-Z_1$, $[e,Z_2]=Z_2$, $[e,Y_2]=Z_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$, $[X_2,Z_2]=-f$.

4. $F=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của $\mathcal{G}$ được xác định bởi: $[e,X_1]=-Y_2$, $[e,Y_1]=Y_2$, $[e,Y_2]=Z_1-Y_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$, $[Y_1,Y_2]=f$.

5. $F=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_1]=-Y_2$, $[e,X_2]=X_1$, $[e,Z_1]=-Z_2$, $[e,Y_1]=Y_2$, $[e,Y_2]=Z_1-Y_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$, $[X_2,Z_1]=[Y_1,Y_2]=f$.

6. $F=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ thì móc Lie của G được xác định bởi: $[e,X_1]=X_1-Y_2$, $[e,X_2]=-X_2$, $[e,Z_1]=-Z_1$, $[e,Z_2]=Z_2$, $[e,Y_1]=Y_2$, $[e,Y_2]=Z_1-Y_1$, $[X_1,X_2]=T$, $[X_1,T]=-Z_2$, $[X_1,Z_1]=f$, $[X_1,Y_2]=-f$, $[X_2,T]=Z_1$, $[X_2,Z_2]=-f$, $[Y_1,Y_2]=f$.

Nhận xét 3.4. Ta thấy $G_{9,7}, G_{9,8}, G_{9,9}$ là khả phân, vì có $Y_1\in Z(G)$, $B(Y_1,Y_1)\neq 0$, $G_{9,10}, G_{9,11}$ là mở rộng kép một bước, $G_{9,12}$ là bất khả phân.

Định lí 3.5.

Gọi D là một đạo hàm phản xứng của đại số Lie $G_{7,1}$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{X_1,X_2,X_3,T,Z_1,Z_2,Z_3\}$ được xác định bởi:

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-b_4&y_1\\0&0&0&0&b_4&0&0\\0&0&0&0&-y_1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-x_2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\x_2&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, x_2,y_1,b_4\in \mathrm{F}.$$

Nếu $x_2=y_1=b_4=0$ thì mở rộng kép của $G_{7,1}$ bởi D là $G_{9,13}$ với móc Lie $[X_2,X_3]=-X_1$, $[X_2,Z_1]=Z_3$, $[X_3,T]=X_2$, $[X_3,Z_1]=-Z_2$, $[X_3,Z_2]=-T$, $[T,Z_2]=Z_3$.

Chứng minh.

Chọn một cơ sở chính tắc $\{X_1,X_2,X_3,T,Z_1,Z_2,Z_3\}$ của $G_{7,1}$ sao cho các móc Lie $[X_3,X_2]=X_1$, $[X_3,T]=X_2$, $[X_3,Z_1]=-Z_2$, $[X_3,Z_2]=-T$, $[X_2,Z_1]=Z_3$, $[T,Z_2]=Z_3$ và dạng song tuyến tính $B(X_1,Z_1)=B(X_2,Z_2)=B(X_3,Z_3)=B(T,T)=1$. Gọi D là một đạo hàm phản xứng của $G_{7,1}$. Ta tính được ma trận biểu diễn của D :

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -e_4 & -f_4 & 0 & 0 & -b_4 & y_1 \\ 0 & 0 & -f_5 & -e_4 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ x_2 & -e_2 & 0 & -t_2 & f_4 & f_5 & 0 \end{pmatrix}, e_2, e_4, f_4, f_5, t_2, x_2, y_1, b_4 \in \mathrm{F}.$$

Theo Mệnh đề 2.3 ta có thể chọn $f_4 = e_4 = f_5 = e_2 = t_2 = 0$. Ta được ma trận D:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_4 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2, y_1, b_4 \in \mathrm{F}.$$

Đặt $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{7,1} \oplus \mathrm{F}e \oplus \mathrm{F}f$. Nếu $x_2 = y_1 = b_4 = 0$ thì móc Lie của G xác định bởi: $[X_2, X_3] = -X_1$, $[X_2, Z_1] = Z_3$, $[X_3, T] = X_2$, $[X_3, Z_1] = -Z_2$, $[X_3, Z_2] = -T$, $[T, Z_2] = Z_3$.

Nhận xét 3.6. Ta thấy $\mathrm{G}_{9,13}$ là mở rộng kép một bước của

$\mathrm{h} = \operatorname{span}\{e, X_1, X_2, T, Z_1, Z_2, f\}$.

4. Kết luận

Bài báo đã nêu lại định lí phân loại các đại số Lie toàn phương giải được chiều bé hơn hoặc bằng 7 trong [4], [5]. Hơn nữa, bài báo còn đưa ra được một lớp mở rộng kép của các đại số Lie toàn phương giải được $\mathrm{G}_{6,1} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}$, $\mathrm{G}_5 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^2$ và $\mathrm{G}_{7,1}$. Với kết quả này, chúng tôi hi vọng trong thời gian ngắn sắp tới sẽ hoàn thành bài toán phân loại các đại số Lie toàn phương giải được 9 chiều bằng phương pháp mở rộng kép.

Lời cảm ơn: *Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài mã số CS2015.01.37.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G. Favre and L. J. Santharoubane, “Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra,” *J. Algebra* ***105***, pp.451-464, 1987.

[2] H. Baum and I. Kath, “Doubly extended Lie groups – curvature, holonomy and parallel spinors,” *Differential Geom. Appl.* ***19***, no. 3, pp.253–280, 2003.

[3] I. Kath, “Nilpotent metric Lie algebras of small dimension,” *J. Lie Theory* ***17***, no. 1, pp.41-61, 2007.

[4] M. T. Duong (2014, Jul), Solvable quadratic Lie algebras of dimension at most 8, Arxiv:1407.6775v1.

[5] M. T. Duong, G. Pinczon and R. Ushirobira, “A new invariant of quadratic Lie algebras,” *Algebra. Represent. Theory* ***15***, pp.1163-1203, 2012.

[6] R. Campoamor-Stursberg, “Quasi-classical Lie algebras and their contractions,” *Int. J. Theor. Phys.* ***47***, no. 2, pp.583–598, 2008.

[7] S. Benayadi and A. Elduque (2014, Apr), Classification of quadratic Lie algebras of low dimensio, arXiv: 1404.5174v1 [math.RA].

[8] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, New York, 1985.