



ISSN:
1859-3100

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC

KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 14, Số 10 (2017): 39-50

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

EDUCATION SCIENCE
Vol. 14, No. 10 (2017): 39-50

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM: SỰ BIẾN ĐỔI CỦA CÁC KIỂU NHIỆM VỤ LIÊN QUAN ĐẾN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

Nguyễn Thị Nga^{1*}, Trương Thị Oanh²

¹ Khoa Toán - Tin học – Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh

² Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Ninh Thuận

Ngày nhận bài: 08-8-2017; ngày nhận bài sửa: 18-9-2017; ngày duyệt đăng: 18-10-2017

TÓM TẮT

Bài báo trình bày một số kết quả nghiên cứu về sự thay đổi nội dung, cách phát biểu các kiểu nhiệm vụ (KNV) liên quan đến khái niệm tích phân và kỹ thuật giải quyết chúng khi các KNV này được trình bày bằng hình thức trắc nghiệm trong đề thi môn toán trung học phổ thông (THPT) quốc gia 2017 so với chúng được trình bày bằng hình thức tự luận như trước đây.

Từ khóa: tích phân, trắc nghiệm, kiểu nhiệm vụ.

ABSTRACT

Test with redaction and multiple-choice questions:

Variables of the types of tasks related to the concept of integration

This article presents some results of the research on change of content, the expression of types of tasks related to the concept of integration and the technique of solving them when they are presented in the multiple-choices for the National High School mathematics test in 2017 is compared to that presented in the another way in the past.

Keywords: integration, multiple-choices, types of tasks.

1. Mở đầu

Năm học 2016 - 2017, Bộ Giáo dục và Đào tạo (Bộ GD-ĐT) đột ngột thay đổi phương án thi THPT quốc gia, lần đầu tiên môn Toán được tổ chức thi bằng hình thức trắc nghiệm khách quan, mỗi câu có 4 đáp án và chỉ có 1 đáp án đúng. Với hình thức thi trắc nghiệm, nội dung đề thi sẽ rộng hơn, không còn bó hẹp trong một số dạng toán quen thuộc như trước đây. Trong khi đó, tích phân là nội dung bắt buộc trong đề thi. Máy tính cầm tay (MTCT) lại có chức năng tính tích phân nên câu hỏi tính tích phân với đầy đủ cận và hàm số sẽ nhanh chóng được MTCT tìm ra đáp án mà người sử dụng không cần biết đến các kiến thức về tích phân. Những điều trên khiến cho các KNV liên quan đến khái niệm tích phân trong đề trắc nghiệm thay đổi so với đề tự luận như thế nào? Chúng tôi tiến hành phân tích chương trình, sách giáo khoa Giải tích 12 (SGK12) và các đề thi thuộc các kì thi tốt nghiệp THPT, cao đẳng, đại học¹ (kể từ năm 2015 gộp chung thành một kì thi THPT

* Email: ngant@hcmup.edu.vn

¹ Đề thuận tiện khi đề cập, chúng tôi gọi chung là đề thi THPT Quốc gia.

quốc gia) của Bộ GD-ĐT từ năm 2009 đến 2017, đặc biệt là các đề minh họa² và đề thi chính thức năm 2017 để làm rõ điều đó.

2. Các kiểu nhiệm vụ liên quan đến khái niệm tích phân

2.1. Các KNV xuất hiện trong Sách giáo khoa Giải tích 12

SGK12 trình bày các ví dụ và bài tập chủ yếu bằng hình thức tự luận, cuối chương có một số bài tập bằng hình thức trắc nghiệm. Đa số các bài tập trắc nghiệm lại có cách phát biểu tương tự như tự luận và thêm 4 đáp án để lựa chọn.

Có thể chia các KNV liên quan đến khái niệm tích phân thành hai nhóm chính:

❖ **Nhóm 1: Các KNV liên quan thuần túy đến tính toán tích phân (hầu như chỉ cần nhập công thức vào MTCT là có thể tìm ra đáp án đúng)**

- **Kiểu nhiệm vụ T_{TTP} : Tính tích phân từ a đến b của hàm số $y = f(x)$.**

Ví dụ: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$. [Trích ví dụ 6 SGK12 Cơ bản; tr.109]

Để giải quyết các bài tập thuộc KNV này, tùy theo đề bài, có thể sử dụng một trong các kỹ thuật sau hoặc phối hợp các kỹ thuật này.

➤ **Kỹ thuật τ_{TTP}^{DN} : Tính tích phân bằng định nghĩa**

+ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$.

+ Tính hiệu số $F(b) - F(a)$.

+ Tích phân cần tính là $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

➤ **Kỹ thuật τ_{TTP}^{TC} : Vận dụng các tính chất tích phân**

+ $\tau_{TTP}^{TC\alpha}$: Áp dụng các tính chất cơ bản của tích phân để biến đổi tích phân cần tính về dạng tổng của các tích phân có thể tìm được nguyên hàm dựa vào bảng nguyên hàm thường gặp.

+ $\tau_{TTP}^{TC\beta}$: Biến đổi tích phân cần tính thành tổng của các tích phân đã biết kết quả mà đề bài cho. (chỉ xuất hiện một số bài ở SGK12 nâng cao)

Ví dụ: Cho biết $\int_1^2 f(x) dx = -4$, $\int_1^5 f(x) dx = 6$. Tính $\int_2^5 f(x) dx$. [Bài 11 SGK12 Nâng

cao; tr.152]

Lời giải: $\int_2^5 f(x) dx = \int_2^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = -\int_1^2 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = 4 + 6 = 10$

² Đề giáo viên (GV) và học sinh (HS) làm quen với hình thức thi mới, Bộ GD-ĐT lần lượt giới thiệu 3 đề thi: Đề minh họa (5/10/2016), Đề thi thử nghiệm (20/1/2017), Đề tham khảo (14/5/2017). Để thuận tiện, chúng tôi sẽ gọi chung là Đề minh họa và thêm số 1, 2, 3 để chỉ thứ tự đề được giới thiệu.

➤ Kỹ thuật τ_{TTP}^{DB} : Phương pháp đổi biến số

τ_{TTP}^{DB1} : Phương pháp đổi biến số loại 1

+ Đặt $u = u(x)$, tính $du = u'(x)dx$.

+ Đổi cận theo biến u .

+ Thay vào công thức tích phân và tiến hành tính: $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

τ_{TTP}^{DB2} : Phương pháp đổi biến số loại 2

+ Đặt $x = x(t)$ ($t \in K$), tính $dx = x'(t)dt$.

+ Đổi cận: tìm $\alpha, \beta \in K$ thỏa mãn $a = x(\alpha), b = x(\beta)$.

+ Thay vào công thức tích phân và tiến hành tính: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)dt$.

➤ Kỹ thuật τ_{TTP}^{TPh} : Phương pháp tích phân từng phần

+ Đặt u, dv hợp lí rồi thay vào công thức

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Thông thường:

+ Nếu $f(x) = P(x)e^{ax+b}$, $f(x) = P(x)\sin(ax+b)$, $f(x) = P(x)\cos(ax+b)$ thì đặt $u = P(x)$, $dv = v' dx$ với v' là nhân tử còn lại.

+ Nếu $f(x) = P(x)\ln(ax+b)$ thì phải đặt $u = \ln(ax+b)$, $dv = P(x)dx$.

➤ Kỹ thuật τ_{TTP}^{DT} : Áp dụng công thức tính diện tích các hình phẳng cơ bản đã biết.

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

+ Quan sát hình phẳng tạo thành tương ứng với hình nào (tam giác, hình thang vuông, hình tròn,...) để áp dụng công thức diện tích đã biết trước đó.

Các bài tập áp dụng kỹ thuật τ_{TTP}^{DT} chỉ xuất hiện ít ỏi trong SGK12 nâng cao.

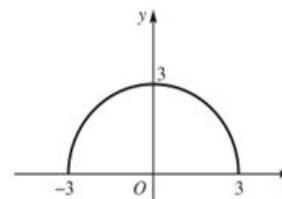
Ví dụ: Không tìm nguyên hàm, hãy tính các tích phân sau:

c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$. [Trích bài 10 SGK12 Nâng cao; tr.152]

Hướng dẫn giải của sách giáo viên Giải tích 12 nâng cao, trang 192:

c) Tích phân bằng diện tích nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ (h. 3.3). Đây là đường tròn tâm là gốc tọa độ bán kính là 3. Do

đó diện tích nửa đường tròn là $9 \cdot \frac{\pi}{2} = 4,5\pi$.



Hình 3.3

❖ **Nhóm 2: Các KNV liên quan đến ứng dụng của tích phân (cần phải nhớ mối liên hệ của tích phân với các ứng dụng để lập công thức tính rồi mới có thể dùng MTCT tìm đáp án)**

• **Kiểu nhiệm vụ $T_{QĐ}$: Tính quãng đường đi được của một vật từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ biết hàm vận tốc $v = f(t)$.**

Ví dụ: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$. [Trích bài 14 SGK12 Nâng cao; tr.153]

➤ **Kỹ thuật $\tau_{QĐ}$:**

+ Xác định công thức tính vận tốc theo thời gian của chuyển động $v = f(t)$ (thường đề bài cho sẵn, nếu cho gia tốc $a(t)$ thì $v = \int a(t)dt$).

+ Xác định các thời điểm $t = a$ và $t = b$ ($a < b$).

+ Công thức tính quãng đường đi được là $S = \int_a^b f(t)dt$.

+ Áp dụng kỹ thuật tính tích phân phù hợp để tính.

• **Kiểu nhiệm vụ T_{DT} : Tính diện tích hình phẳng**

Ví dụ: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$. [Trích Ví dụ 3 SGK12 nâng cao; tr.165]

Các bài tập thuộc KNV này đa số đều có thể đưa về việc *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ với kỹ thuật giải quyết là:*

➤ **Kỹ thuật τ_{DT} :**

+ Giải phương trình hoành độ giao điểm $f_1(x) - f_2(x) = 0$ để tìm a, b (nếu cần).

+ Áp dụng công thức: $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$.

+ Tính tích phân chứa giá trị tuyệt đối S .

Có 3 kỹ thuật giải quyết KNV con “Tính tích phân chứa giá trị tuyệt đối S ” được Nguyễn Hoàng Vũ (2012) trình bày là:

α : Xét dấu.

β : Đưa dấu giá trị tuyệt đối ra ngoài tích phân.

γ : Dùng đồ thị.

• **Kiểu nhiệm vụ T_{TT} : Tính thể tích vật thể**

Ví dụ: Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = 0, x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành. [Bài 31 SGK12 Nâng cao; tr.172]

Tùy theo từng trường hợp giả thiết đề bài cho, có 3 kỹ thuật được sử dụng là (trong đó từ công nghệ của kỹ thuật τ_{TT}^{TD} ta có thể chứng minh công nghệ của các kỹ thuật τ_{TT}^{Ox} , τ_{TT}^{Oy}):

➤ *Kỹ thuật τ_{TT}^{TD} : Tính thể tích phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ a và b khi biết thiết diện tại điểm có hoành độ $x(a \leq x \leq b)$.*

+ Tìm diện tích thiết diện $S(x)$ của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(a \leq x \leq b)$.

+ Viết công thức tính thể tích vật thể: $V = \int_a^b S(x)dx$.

+ Áp dụng các kỹ thuật tính tích phân phù hợp để tính.

➤ *Kỹ thuật τ_{TT}^{Ox} : Tính thể tích vật thể được tạo thành do quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b(a < b)$ xung quanh trục Ox.*

+ Viết công thức tính thể tích vật thể: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

+ Áp dụng các kỹ thuật tính tích phân phù hợp để tính.

➤ *Kỹ thuật τ_{TT}^{Oy} : Tính thể tích vật thể được tạo thành do quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng xung quanh trục Oy (chỉ xuất hiện trong chương trình Nâng cao)*

+ Viết công thức tính thể tích vật thể: $V = \pi \int_a^b g^2(x)dx$.

+ Áp dụng các kỹ thuật tính tích phân phù hợp để tính.

Trong đó KNV T_{TTP} chiếm đa số (165/317 bài tập), KNV $T_{QĐ}$ chỉ xuất hiện trong chương trình Nâng cao. Các KNV đều có cách phát biểu thuần túy toán học tương tự như các ví dụ nêu trên, riêng $T_{QĐ}$ có nội dung vật lí. SGK12 Nâng cao có bài tập đa dạng hơn, xuất hiện một số ít bài tập có cách phát biểu mới lạ.

2.2. Các KNV trong các đề thi THPT quốc gia từ năm 2009 đến 2016, các đề minh họa và đề chính thức năm 2017 của Bộ GD-ĐT

a) Đề thi từ năm 2009 đến 2016

Hầu hết các câu tích phân trong các đề thi từ năm 2009 đến 2016 (đề thi tự luận) đều thuộc KNV T_{TTP} với cách phát biểu quen thuộc, chỉ có duy nhất đề thi đại học khối A, A1

năm 2014 câu hỏi thuộc KNV T_{DT} . Kỹ thuật giải chủ yếu là kỹ thuật đổi biến số loại 1 hoặc tích phân từng phần hoặc phối hợp hai kỹ thuật này với các kỹ thuật tính tích phân khác. Các bài tập này đều có thể dùng MTCT tìm nhanh đáp số.

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$ [Trích đề tuyển sinh đại học khối A, A1

năm 2012]

Lời giải: Đặt $u = 1 + \ln(x+1)$, $dv = \frac{dx}{x^2}$ suy ra $du = \frac{dx}{x+1}$, $v = -\frac{1}{x}$

Khi đó $I = -\frac{1 + \ln(x+1)}{x} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{2 + \ln 2}{3} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$

Điều này chứng tỏ, đối với tích phân, đề thi chỉ mong muốn đánh giá khả năng HS nắm những kỹ thuật tính tích phân cơ bản, việc hiểu khái niệm và vận dụng không được xem trọng.

b) Các đề minh họa năm 2017

Trước kì thi chính thức năm 2017, Bộ GD-ĐT đã lần lượt giới thiệu 3 đề minh họa (dạng trắc nghiệm) để GV và HS tham khảo. Cả ba đề đều có 7 câu về nội dung chương 4 Giải tích 12, trong đó có 1 câu về nguyên hàm và 6 câu liên quan đến khái niệm tích phân. Đề minh họa 1 và Đề minh họa 2 đều sắp xếp nội dung theo từng chương kiến thức của SGK, Đề minh họa 3 sắp xếp theo mức độ từ dễ đến khó, gần với đề thi chính thức nhất.

Điểm chung của các đề là nội dung câu hỏi phong phú, trải đều các nội dung lí thuyết. Cách phát biểu Đề minh họa 1 so với SGK chưa có điểm mới và do đó hầu như MTCT đều có thể tìm nhanh đáp án (tính tích phân cụ thể). Đề minh họa 2 và 3 giữ lại sự đa dạng các KNV nhưng cách hỏi có nhiều đổi mới, đòi hỏi khả năng hiểu và vận dụng kiến thức của HS, hạn chế sự can thiệp của MTCT. Cụ thể chúng ta có thể quan sát cách trình bày câu hỏi của hai KNV xuất hiện nhiều nhất trong các đề thi là T_{TTP} và T_{DT} :

❖ KNV T_{TTP} : Tính tích phân từ a đến b của hàm số $y = f(x)$

Hàm số dưới dấu tích phân không được cho cụ thể, HS phải có sự phân tích tìm kĩ thuật biến đổi hợp lí để có thể tính tích phân thông qua tích phân đề bài cho.

Câu 25. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$.

A. $I = 32$.

B. $I = 8$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

[Trích Đề minh họa 2]

Bình luận: Sử dụng kỹ thuật τ_{TTP}^{DB1} để giải. Cần suy luận được cùng loại hàm số mà khác biến thì đổi biến (nắm được công nghệ của kỹ thuật đổi biến số) và biết tính chất “giá trị tích phân chỉ phụ thuộc cận và hàm số chứ không phụ thuộc biến số”. Từ đó dùng phương pháp đổi biến số để tính tích phân cần tính thông qua tích phân đề bài cho.

Sử dụng MTCT: Cần suy luận được đề bài cho đối với hàm số $f(x)$ bất kì thỏa mãn điều kiện $\int_0^4 f(x)dx = 16$ nên có thể tìm một hàm số cụ thể thỏa mãn điều kiện trên và tính tích phân đề bài yêu cầu đối với trường hợp hàm số cụ thể vừa tìm được (công nghệ sử dụng vẫn là đổi biến số. Tìm hàm số cụ thể giúp cho việc tính toán nhanh chóng hơn bằng MTCT). Ví dụ dùng MTCT tính $\int_0^4 f(x)dx$ với $f(x)$ là một hàm đơn giản (ru tiên đa thức bậc nhất) và nhận thấy $\int_0^4 2x dx = 16$, khi đó dùng MTCT tính được $\int_0^2 4x dx = 8$. Tuy nhiên, HS phải có kiến thức tích phân vững mới nhận xét được và việc tìm hàm số cụ thể cũng không dễ dàng với tất cả HS và không phải khi nào cũng tìm được.

Xuất hiện các bài toán mà nhiệm vụ tính tích phân là mấu chốt tìm lời giải nhưng đề bài hỏi về một thành phần nào đó trong công thức tích phân hoặc trong kết quả tích phân.

Câu 26. Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính

$$S = a + b + c.$$

A. $S = 6$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

[Trích Đề minh họa 2]

Bình luận: Đề bài hỏi về các hệ số trong kết quả tích phân. Vì chỉ lập được hai phương trình mà có đến 3 ẩn nên ở câu này MTCT không tìm ngay đáp án được. HS phải sử dụng kỹ thuật τ_{TP}^{TC} kết hợp với kỹ năng tính tích phân hàm số hữu tỉ và tính chất của hàm số logarit, trình bày chi tiết các bước tính tích phân và rút gọn kết quả mới tìm được đáp án đúng.

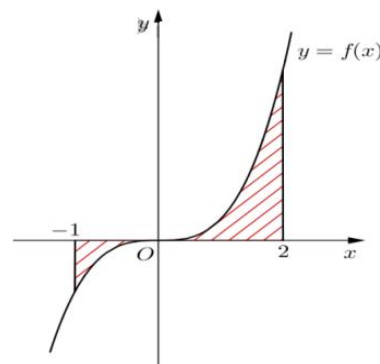
Như vậy đề bài không chế các đối tượng hàm số dưới dấu tích phân, cần lấy tích phân, kết quả tích phân, yêu cầu tính toán để buộc HS phải nắm vững kiến thức mới giải được, không thể chỉ sử dụng MTCT.

❖ KNV T_{DT} : Tính diện tích hình phẳng

Bên cạnh những cách phát biểu quen thuộc trước đây, kỹ thuật dùng đồ thị trong tính diện tích hình phẳng được Đề minh họa 2 và 3 khai thác.

Câu 21. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt

$$a = \int_{-1}^0 f(x)dx, b = \int_0^2 f(x)dx, \text{ mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$



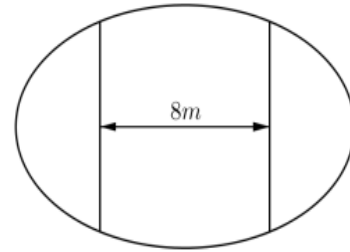
- A. $S = b - a$. B. $S = b + a$.
 C. $S = -b + a$. D. $S = -b - a$.

[Trích Đề minh họa 3]

Bình luận và lời giải: Bài này không khó nhưng lại dễ làm sai bởi HS quen với phép tính đại số nên chọn đáp án B. Việc nắm vững công thức tính diện tích, cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối và kỹ năng đọc đồ thị đóng vai trò quan trọng. Trong trường hợp này công thức tính diện tích là $S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$. Kết hợp quan sát đồ thị ta thấy: Diện tích cần tính được chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành thuộc đoạn $[0; 2]$ mang dấu dương nên bỏ trị tuyệt đối là chính nó, phần phía dưới trục hoành thuộc đoạn $[0; 1]$ mang dấu âm nên bỏ trị tuyệt đối là số đối của nó, do đó đáp án đúng là A. $S = b - a$. Câu hỏi này MTCT không giúp được gì và đồ thị là một thành phần quan trọng trong câu dẫn.

Đặc biệt có sự xuất hiện của bài toán liên hệ thực tế, đòi hỏi khả năng mô hình hóa và vận dụng tốt kiến thức phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Câu 28. Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là $100.000 \text{ đồng}/m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



- A. 7.867.000 đồng B. 7.653.000 đồng C. 7.128.000 đồng D. 7.826.000 đồng

[Trích Đề minh họa 2]

Bình luận và lời giải: Đây là một câu gây nhiều khó khăn cho HS vì đòi hỏi khả năng mô hình hóa. Bài toán có cách phát biểu lạ lắm chưa từng xuất hiện trong SGK12 và các đề thi trước đó của Bộ GD – ĐT. Xác định được cần sử dụng kỹ thuật τ_{DT} chỉ mang tính định hướng cho bước giải, quá trình lập công thức tính không hề đơn giản. Để lập được hàm số dưới dấu tích phân, HS cần phải nhớ dạng phương trình chính tắc của elip đã học từ lớp 10 và biết gắn elip vào hệ trục tọa độ.

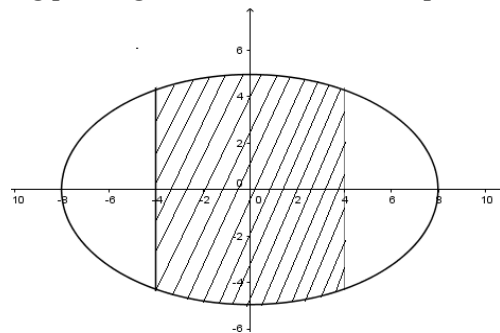
Phương trình chính tắc của elip có

$$\text{dạng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Theo đề bài ta có:

$$2a = 16, 2b = 10 \Rightarrow a = 8, b = 5$$

Suy ra phương trình chính tắc của elip



$$\text{là: } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow y = \pm 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}$$

Khi đó phần cần tính diện tích được biểu diễn như hình vẽ bên.

Diện tích S của vườn hoa được tính theo công thức sau:

$$S = 4 \int_0^4 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} dx = 20 \int_0^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} dx.$$

Lúc này có thể giải chi tiết hoặc dùng MTCT để tính kết quả.

Có thể thấy rằng, ứng dụng hình học của tích phân đã được quan tâm nhiều hơn theo hướng tăng tính trực giác hình học và vận dụng vào thực tiễn.

c) Đề thi chính thức ngày 22/06/2017

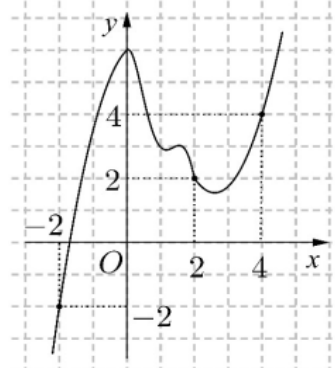
Đề thi chính thức có 24 mã đề thi (từ 101 đến 124) được biên soạn từ 4 đề gốc. Dạng các câu hỏi thuộc chương 4 – **Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng** – được ra tương tự giữa các đề, đa số chỉ là thay đổi hàm số, giữ nguyên cách hỏi. Nội dung câu hỏi trải đều tất cả nội dung lí thuyết trong SGK: sử dụng kĩ thuật tính tích phân (nguyên hàm) bằng định nghĩa, tính chất, đổi biến số, từng phần; ứng dụng tích phân trong hình học và vật lí. Về hình thức, các câu trong đề chính thức đều có cách phát biểu tương tự như Đề minh họa 2 và 3 và xuất hiện những cách hỏi mới, yếu tố đồ thị được khai thác hiệu quả không những trong các bài toán ứng dụng hình học mà còn ở ứng dụng vật lí. Về số lượng, đề chính thức cũng có 7 câu thuộc chương 4 nhưng số lượng câu hỏi về nguyên hàm tăng từ 1 lên 2 – 3 câu.

Đặc biệt, xuất hiện câu đòi hỏi khả năng vận dụng kiến thức tổng hợp: HS phải nắm vững ý nghĩa hình học – tích phân là diện tích hình phẳng, kết hợp với định nghĩa tích phân theo nguyên hàm và các kiến thức về hàm số, đồ thị, đạo hàm mới giải được. Ví dụ như câu 49 mã đề 101.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

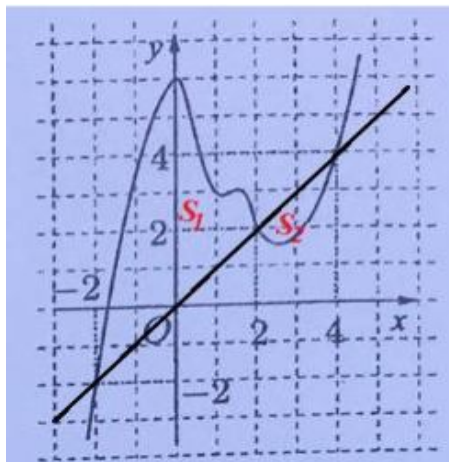
Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
- B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
- C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
- D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.



[Trích mã đề 101]

Lời giải của Trần Nam Dũng³ đăng trên bigschool.vn:



Ta có: $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2(f'(x) - x)$.

Quan sát hình vẽ ta thấy với $x \in (2; 4)$, $f'(x) < x \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h(2) > h(4)$.

Ta có: $\int_{-2}^4 (2f'(x) - 2x) dx = \int_{-2}^4 h'(x) dx = h(x) \Big|_{-2}^4 = h(4) - h(-2)$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (2f'(x) - 2x) dx &= \int_{-2}^2 (2f'(x) - 2x) dx + \int_2^4 (2f'(x) - 2x) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2f'(x) - 2x) dx - \int_2^4 (2x - 2f'(x)) dx = 2(S_1 - S_2) > 0 \Rightarrow h(4) > h(-2). \end{aligned}$$

Vậy $h(2) > h(4) > h(-2)$. Chọn C.

Đây là một câu phân loại để tìm kiếm HS giỏi, việc xác định dùng kiến thức tích phân là trọng tâm để giải quyết bài toán không hề đơn giản. Việc quan sát đồ thị và sử dụng hiệu quả nó đóng vai trò quan trọng. Trần Nam Dũng nhận xét: “*Đây là câu hỏi hay nhất đề thi. Bởi nó không sa vào tính toán như một số câu hỏi khác mà phải vận dụng các kiến thức xung quanh hàm số, đạo hàm, đồ thị, tích phân*” [Theo báo Thanh Niên].

Như vậy, Đề chính thức một lần nữa cho ta thấy được sự đa dạng và phong phú trong việc ra đề thi trắc nghiệm liên quan đến khái niệm tích phân không những trong cách phát biểu mà còn là nội dung kiến thức cần sử dụng của các KNV. Yếu tố đồ thị được khai thác hiệu quả. HS không thể ỷ lại vào MTCT mà phải thực học, nắm vững và vận dụng tốt khái niệm tích phân và hàm số. Kiến thức tích phân nhờ đó có thể không còn khô khan, hình thức đối với HS.

³ Giảng viên Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM

3. Kết luận

Trước đây, trong SGK12 và trong các đề thi tự luận, các KNV liên quan đến khái niệm tích phân tập trung ở đòi hỏi HS nhận dạng để biến đổi phù hợp, đưa tích phân cần tính về dạng các tích phân có thể dùng các kỹ thuật tính tích phân cơ bản. KNV liên quan đến ứng dụng hình học cũng phát biểu thuần túy theo ngôn ngữ giải tích và dễ dàng lập được công thức tích phân, yêu cầu cuối cùng cũng là trình bày được các bước giải để tính được đáp số. Điều này không còn phù hợp đối với hình thức thi trắc nghiệm vì việc trả lời chỉ thể hiện ở việc chọn đáp án, trong khi đó MTCT lại có thể tìm nhanh đáp số hầu hết các tích phân. Những thay đổi của các KNV liên quan đến khái niệm tích phân đã được Bộ GD-ĐT thể hiện trong các Đề minh họa 2, 3 và tái khẳng định trong Đề thi chính thức: Đa dạng trong cách phát biểu các KNV cũng như cách trả lời, tập trung nhiều ở khả năng hiểu và vận dụng kiến thức, hạn chế việc tính toán máy móc. Cụ thể một số thay đổi nổi bật:

Nhóm 1: Kiểu nhiệm vụ T_{TTP} - Tính tích phân từ a đến b của hàm số $y = f(x)$.

- Nếu yêu cầu tính một tích phân I thì hàm số dưới dấu tích phân hoặc cận không được cho cụ thể, buộc HS phải vận dụng kiến thức tích phân tìm đầy đủ các thành phần của I hoặc tính I thông qua tích phân giả thiết cho.
- Đề bài hỏi về các thành phần trong công thức tích phân (cận, hàm số dưới dấu tích phân, hệ số của kết quả tích phân chứa logarit) mà việc phải trình bày chi tiết các bước tính tích phân mới tìm được đáp án đúng.
- Việc nhận dạng sử dụng kỹ thuật tính tích phân nào đòi hỏi HS ở việc nắm vững công nghệ của kỹ thuật đó mới có thể suy luận việc sử dụng kỹ thuật phù hợp chứ không thể luôn dựa vào dạng cụ thể của hàm số dưới dấu tích phân.

Nhóm 2: Các KNV liên quan đến ứng dụng của tích phân

- Yếu tố đồ thị được tăng cường và là một phần quan trọng trong giả thiết.
- Khả năng mô hình hóa, vận dụng vào thực tế được đề cao.
- Đề bài tập trung ở việc HS phải vận dụng kiến thức để phân tích và suy luận nhằm thiết lập công thức tính.

Những thay đổi trên, ngoài việc đạt được mục đích hạn chế sử dụng MTCT mà không hiểu kiến thức còn giúp HS rèn luyện khả năng suy luận, phân tích và giải quyết các bài toán thực tiễn, làm cho việc học khái niệm tích phân không hình thức mà thực sự có ý nghĩa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, Annie Bessot, Claude Comiti. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*. TP Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.
- Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất. (2008). *Giải tích 12*. NXB Giáo dục.
- Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất. (2013). *Sách giáo viên Giải tích 12*, NXB Giáo dục.
- Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng. (2008). *Giải tích nâng cao 12*. NXB Giáo dục.
- Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng. (2013). *Sách giáo viên Giải tích nâng cao 12*. NXB Giáo dục.
- Nguyễn Hoàng Vũ. (2012), *Nghiên cứu thực hành của GV trong dạy học tính diện tích hình phẳng ở lớp 12*. Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.