TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ISSN: 1859-3100
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 14, Số 6 (2017): 172-180

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 14, No. 6 (2017): 172-180

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

CÁC TÍNH CHẤT $p-$ CHUẨN TẮC CỦA KHÔNG GIAN TÔPÔ

Bùi Quang Thịnh[1*], Nguyễn Hà Thanh[2]
[1]*Trường Đại học Tiền Giang*
[2]*Khoa Toán - Tin học – Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*
Ngày Tòa soạn nhận được bài: 08-5-2017; ngày phản biện đánh giá: 25-5-2017; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2017

TÓM TẮT

Bài viết nghiên cứu các tính chất $p-$ chuẩn tắc một cách có hệ thống với những đặc điểm tương tự như tính chất chuẩn tắc. Tính chất đặc trưng và sự di truyền đối với không gian con của các tính chất $p-$ chuẩn tắc chính là mối quan tâm chính của bài báo.

Từ khóa: $p-$ chuẩn tắc, hầu $p-$ chuẩn tắc, $\pi p-$ chuẩn tắc, $p-$ chuẩn tắc nhẹ, tựa $p-$ chuẩn tắc.

ABSTRACT

Some $p-$ Normal Properties of Topological Space

The aim of this paper is to study some $p-$ normal properties systematically, which is similar with the normal properties on characterization and hereditary property.

Keywords: $p-$ normal, almost $p-$ normal, $\pi p-$ normal, mildly $p-$ normal, quasi $p-$ normal.

1. Đặt vấn đề

Nhìn chung, tính chuẩn tắc của không gian tôpô tích không được kế thừa từ các không gian tôpô thành phần. Các phản ví dụ nổi tiếng minh chứng khẳng định này đã được đưa ra bởi các nhà Toán học, có thể kể đến J. Dieudonné năm 1939 và Sorgenfrey năm 1947. Với mong muốn không gian tích có thể kế thừa tính chuẩn tắc từ các không gian thành phần, thông thường có hai hướng nghiên cứu được đặt ra hoặc là bổ sung thêm điều kiện đối với các không gian thành phần hoặc là xây dựng một lớp các không gian mới có tính chất yếu hơn chuẩn tắc. Theo hướng hình thành nên các lớp không gian mới, các tính chất dưới chuẩn tắc như hầu chuẩn tắc, chuẩn tắc nhẹ, tựa chuẩn tắc, $\pi-$ chuẩn tắc lần lượt được định nghĩa và kết nối với nhau theo sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow] & & \text{Hầu chuẩn tắc} \arrow[dr] & \\ \text{Chuẩn tắc} \arrow[r] & \pi - \text{chuẩn tắc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Chuẩn tắc nhẹ} \\ & & \text{Tựa chuẩn tắc} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Hình 1. *Mối quan hệ giữa các tính chất chuẩn tắc*

[*] Email: *buiquangthinh@tgu.edu*

Năm 1989, T. M. Nour [1] đã sử dụng khái niệm $p-$ mở để định nghĩa một tính chất dưới chuẩn tắc là $p-$ chuẩn tắc. Việc định nghĩa tính $p-$ chuẩn tắc đã mở đường cho hàng loạt các khái niệm mới ra đời như hầu $p-$ chuẩn tắc, $p-$ chuẩn tắc nhẹ, tựa $p-$ chuẩn tắc và gần đây là $\pi p-$ chuẩn tắc.

Vì các khái niệm giữa tính chuẩn tắc và tính $p-$ chuẩn tắc có sự tương ứng nhất định nên những đặc điểm tương đồng nếu có giữa các tính chất $p-$ chuẩn tắc và chuẩn tắc là một vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu. Bài viết này sẽ nghiên cứu các tính chất $p-$ chuẩn tắc một cách có hệ thống với những đặc điểm tương tự như các tính chất chuẩn tắc ở hai phương diện tính chất đặc trưng và sự di truyền đối với không gian con.

Trong suốt bài viết, thuật ngữ không gian được hiểu là không gian tôpô thuần túy, chưa thỏa mãn bất kì một tiên đề tách nào và các kí hiệu được sử dụng đều là các kí hiệu cơ bản của Tôpô đại cương, có thể tra cứu theo R. Engelking [2].

2. Các tính chất $p-$ chuẩn tắc

Gọi A là một tập con bất kì của không gian tôpô X. Khi đó,

- Các kí hiệu $\mathrm{int}_X(A)$ và $\overline{A}^X$ theo thứ tự là phần trong và bao đóng của tập con A trong X.
- Tập con A được gọi là *mở chính quy* nếu $A=\mathrm{int}\left(\overline{A}\right)$.
- Tập con A được gọi là *đóng chính quy* nếu $X\setminus A$ là một tập mở chính quy. Nói cách khác, A là tập đóng chính quy nếu $A=\overline{\mathrm{int}(A)}$.
- Tập con A được gọi là $p-$*mở* nếu $A\subset\mathrm{int}\left(\overline{A}\right)$.
- Tập con A được gọi là $p-$*đóng* nếu $X\setminus A$ là một tập $p-$ mở. Nói cách khác, A là tập $p-$ đóng nếu $\overline{\mathrm{int}(A)}\subset A$.
- Tập con $p-$ đóng nhỏ nhất chứa tập con A được gọi là $p-$ *bao đóng* của A và được kí hiệu là $p-\mathrm{cl}(A)$. Nói cách khác, $p-$ *bao đóng* của tập con A chính là giao của tất cả các tập con $p-$ đóng chứa A.
- Tập con A được gọi là $\pi-$ *đóng* nếu A là giao hữu hạn của các tập đóng chính quy.
- Tập con A được gọi là $\pi-$ *mở* nếu $X\setminus A$ là một tập $\pi-$ đóng. Nói cách khác, A là tập $\pi-$ mở nếu A là hợp hữu hạn của các tập mở chính quy.

Năm 1989, T. M. Nour [1] đưa ra khái niệm $p-$ chuẩn tắc thông qua việc kết hợp hai khái niệm chuẩn tắc và $p-$ mở.

Định nghĩa 1.

Một không gian X được gọi là $p-$ *chuẩn tắc* nếu với mọi cặp tập đóng F_1 và F_2 rời nhau, luôn tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1\subset U$ và $F_2\subset V$.

Sau đó, năm 2000, G. B. Navalagi [3] mở rộng khái niệm $p-$ chuẩn tắc thành hầu $p-$ chuẩn tắc và $p-$ chuẩn tắc nhẹ.

Định nghĩa 2.

Một không gian X được gọi là *hầu $p-$ chuẩn tắc* nếu với mọi tập đóng F_1 và mọi tập đóng chính quy F_2 rời nhau, luôn tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1 \subset U$ và $F_2 \subset V$.

Định nghĩa 3.

Một không gian X được gọi là *$p-$ chuẩn tắc nhẹ* nếu với mọi cặp tập đóng chính quy F_1 và F_2 rời nhau, luôn tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1 \subset U$ và $F_2 \subset V$.

Năm 2012, S. A. S. Thabit và H. Kamarulhaili [4] định nghĩa khái niệm $\pi p-$ chuẩn tắc bằng cách phát triển các khái niệm $p-$ chuẩn tắc và $\pi-$ chuẩn tắc, trong đó khái niệm $\pi-$ chuẩn tắc được đưa ra bởi L. Kalantan vào năm 2008.

Định nghĩa 4.

Một không gian X được gọi là *$\pi p-$ chuẩn tắc* nếu với mọi tập đóng F_1 và mọi tập $\pi-$ đóng F_2 rời nhau, luôn tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1 \subset U$ và $F_2 \subset V$.

Từ các định nghĩa vừa nêu, chúng ta có chuỗi quan hệ thứ nhất như sau:

Chuẩn tắc $\Rightarrow p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow \pi p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow$ Hầu $p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow p-$ chuẩn tắc nhẹ

Cũng trong năm 2012, S. A. S. Thabit và H. Kamarulhaili [5] định nghĩa thêm khái niệm tựa $p-$ chuẩn tắc, một tính chất nằm giữa $\pi p-$ chuẩn tắc và $p-$ chuẩn tắc nhẹ.

Định nghĩa 5.

Một không gian X được gọi là *tựa $p-$ chuẩn tắc* nếu với mọi cặp tập $\pi-$ đóng F_1 và F_2 rời nhau, luôn tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1 \subset U$ và $F_2 \subset V$.

Theo S. A. S. Thabit và H. Kamarulhaili [5], khái niệm tựa $p-$ chuẩn tắc độc lập với các khái niệm trong chuỗi quan hệ thứ nhất giữa các tính chất $p-$ chuẩn tắc. Hai tác giả đã minh chứng cụ thể lập luận này thông qua một phản ví dụ khẳng định không gian Tôpô Dãy Hữu Tỷ là một không gian hầu $p-$ chuẩn tắc và không tựa $p-$ chuẩn tắc. Do đó, chúng ta cũng có chuỗi quan hệ thứ hai như sau:

Chuẩn tắc $\Rightarrow p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow \pi p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow$ Tựa $p-$ chuẩn tắc $\Rightarrow p-$ chuẩn tắc nhẹ

Kết hợp hai chuỗi quan hệ thứ nhất và thứ hai, chúng ta có sơ đồ quan hệ giữa các tính chất $p-$chuẩn tắc như sau:

$$\begin{tikzcd} & \text{Hầu } p-\text{chuẩn tắc} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{Chuẩn tắc} \Rightarrow p-\text{chuẩn tắc} \Rightarrow \pi p-\text{chuẩn tắc} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & p-\text{chuẩn tắc nhẹ} \\ & \text{Tựa } p-\text{chuẩn tắc} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Hình 2. *Mối quan hệ giữa các tính chất $p-$ chuẩn tắc*

3. Đặc trưng của các tính chất $p-$ chuẩn tắc

Bằng cách thay đổi vai trò của các tập hợp tương ứng với khái niệm, các tính chất $p-$ chuẩn tắc có đặc trưng hoàn toàn tương tự như các tính chất chuẩn tắc. Việc chứng minh các tính chất đặc trưng này không quá khó, khá giống với cách chứng minh tính chất đặc trưng của không gian chuẩn tắc và có thể tìm thấy trong các bài viết của G. B. Navalagi [3] và S. A. S. Thabit, H. Kamarulhaili [4], [5].

Mệnh đề 1.

Cho X là một không gian. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương nhau:

(a) X là một không gian $p-$ chuẩn tắc;

(b) Với mọi cặp tập mở A và B thỏa mãn $A\cup B=X$, luôn tồn tại các tập $p-$ đóng U và V sao cho $U\subset A$, $V\subset B$ và $U\cup V=X$;

(c) Với mọi tập đóng F và mọi tập mở G chứa F, luôn tồn tại một tập $p-$ mở U sao cho $F\subset U\subset p-\mathrm{cl}(U)\subset G$.

Chứng minh.

$(a)\Rightarrow(b)$: Với mọi cặp tập mở A và B thỏa mãn $A\cup B=X$, $X\setminus A$ và $X\setminus B$ là các tập đóng rời nhau. Do X là một không gian $p-$ chuẩn tắc nên tồn tại các tập $p-$ mở V_1 và V_2 rời nhau thỏa mãn $X\setminus A\subset V_1$ và $X\setminus B\subset V_2$. Đặt $U=X\setminus V_1$ và $V=X\setminus V_2$. Khi đó, U và V là các tập $p-$ đóng thỏa mãn $U\subset A$, $V\subset B$ và $U\cup V=X$.

$(b)\Rightarrow(c)$: Với mọi tập đóng F và mọi tập mở G chứa F, $X\setminus F$ và G là các tập mở thỏa mãn $(X\setminus F)\cup G=X$. Theo (b), tồn tại các tập $p-$ đóng W_1 và W_2 thỏa mãn $W_1\subset X\setminus F$, $W_2\subset G$ và $W_1\cup W_2=X$. Suy ra, $F\subset X\setminus W_1$ và $X\setminus W_1\subset W_2$. Đặt $U=X\setminus W_1$. Khi đó, U là một tập $p-$ mở thỏa mãn $F\subset U\subset W_2\subset G$. Vì W_2 là một tập $p-$ đóng nên $p-\mathrm{cl}(U)\subset W_2$ và $F\subset U\subset p-\mathrm{cl}(U)\subset G$.

$(c)\Rightarrow(a)$: Với mọi cặp tập đóng F_1 và F_2 rời nhau, $G=X\setminus F_2$ là một tập mở chứa F_1 vì F_1 là một tập đóng và $F_1\cap F_2=\varnothing$. Theo (c), tồn tại một tập $p-$ mở U sao cho $F_1\subset U\subset p-\mathrm{cl}(U)\subset G$. Vì $p-\mathrm{cl}(U)\subset G=X\setminus F_2$ nên $F_2\subset X\setminus p-\mathrm{cl}(U)$. Hiển nhiên, $V=X\setminus p-\mathrm{cl}(U)$ là một tập $p-$ mở và $U\cap V=\varnothing$. Do đó, tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau thỏa mãn $F_1\subset U$ và $F_2\subset V$ hay X là một không gian $p-$ chuẩn tắc.

Bằng cách lập luận tương tự kết hợp với việc thay đổi tính chất của các tập hợp, chúng ta sẽ chứng minh được các tính chất đặc trưng sau đối với các không gian hầu $p-$ chuẩn tắc, $p-$ chuẩn tắc nhẹ, $\pi p-$ chuẩn tắc và tựa $p-$ chuẩn tắc.

Mệnh đề 2.

Cho X là một không gian. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương nhau:

(a) X là một không gian hầu $p-$ chuẩn tắc;

(b)Với mọi tập mở $.A.$ *và mọi tập mở chính quy* B *thỏa mãn* $A \cup B = X$ *, luôn tồn tại các tập* $p-$ *đóng* U *và* V *sao cho* $U \subset A, V \subset B$ *và* $U \cup V = X$ *;*

(c)Với mọi tập đóng F *và mọi tập mở chính quy* G *chứa* F *, luôn tồn tại một tập* $p-$ *mở* U *sao cho* $F \subset U \subset p-\mathrm{cl}(U) \subset G$.

Mệnh đề 3.

Cho X *là một không gian. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương nhau:*

(a) X *là một không gian* $p-$ *chuẩn tắc nhẹ;*

(b)Với mọi cặp tập mở chính quy A *và* B *thỏa mãn* $A \cup B = X$ *, luôn tồn tại các tập* $p-$ *đóng* U *và* V *sao cho* $U \subset A, V \subset B$ *và* $U \cup V = X$ *;*

(c)Với mọi tập đóng chính quy F *và mọi tập mở chính quy* G *chứa* F *, luôn tồn tại một tập* $p-$ *mở* U *sao cho* $F \subset U \subset p-\mathrm{cl}(U) \subset G$.

Mệnh đề 4.

Cho X *là một không gian. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương nhau:*

(a) X *là một không gian* $\pi p-$ *chuẩn tắc;*

(b)Với mọi tập mở A *và mọi tập* $\pi-$ *mở* B *thỏa mãn* $A \cup B = X$ *, luôn tồn tại các tập* $p-$ *đóng* U *và* V *sao cho* $U \subset A, V \subset B$ *và* $U \cup V = X$ *;*

(c)Với mọi tập đóng F *và mọi tập* $\pi-$ *mở* G *chứa* F *, luôn tồn tại một tập* $p-$ *mở* U *sao cho* $F \subset U \subset p-\mathrm{cl}(U) \subset G$.

Mệnh đề 5.

Cho X *là một không gian. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương nhau:*

(a) X *là một không gian tựa* $p-$ *chuẩn tắc;*

(b)Với mọi cặp tập $\pi-$ *mở* A *và* B *thỏa mãn* $A \cup B = X$ *, luôn tồn tại các tập* $p-$ *đóng* U *và* V *sao cho* $U \subset A, V \subset B$ *và* $U \cup V = X$ *;*

(c)Với mọi tập $\pi-$ *đóng* F *và mọi tập* $\pi-$ *mở* G *chứa* F *, luôn tồn tại một tập* $p-$ *mở* U *sao cho* $F \subset U \subset p-\mathrm{cl}(U) \subset G$.

4. Sự di truyền của các tính chất $p-$ chuẩn tắc

Nếu các tính chất chuẩn tắc di truyền đối với các không gian con đóng thì các tính chất $p-$ chuẩn tắc di truyền đối với các không gian con đóng chính quy. Năm 2000, G. B. Navalagi [3] đã chứng minh sự di truyền của một số tính chất $p-$ chuẩn tắc dựa vào một mệnh đề được các tác giả S. N. El-Deeb, I. A. Hasanein, A. S. Mashhour, T. Noiri đề cập đến trong [6] năm 1983. Bài viết này sẽ chứng minh sự di truyền của các tính chất $p-$ chuẩn tắc bằng một cách khác thông qua những tính chất của tập đóng chính quy trong mối tương quan với các tập trù mật, $p-$ mở, $p-$ đóng, $\pi-$ mở, $\pi-$ đóng.

Mệnh đề 6.

(a)*Không gian con đóng chính quy của một không gian $p-$chuẩn tắc là một không gian $p-$chuẩn tắc.*

(b)*Không gian con đóng chính quy của một không gian hầu $p-$chuẩn tắc là một không gian hầu $p-$chuẩn tắc.*

(c)*Không gian con đóng chính quy của một không gian $p-$chuẩn tắc nhẹ là một không gian $p-$chuẩn tắc nhẹ.*

(d)*Không gian con đóng chính quy của một không gian $\pi p-$chuẩn tắc là một không gian $\pi p-$chuẩn tắc*

(e)*Không gian con đóng chính quy của một không gian tựa $p-$chuẩn tắc là một không gian tựa $p-$chuẩn tắc.*

Chứng minh. Để chứng minh các mệnh đề này, chúng ta cần chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1.

(1)*Nếu M là một không gian con của không gian X và $A\subset M$ thì* $\operatorname{int}_X(A)=\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)$;

(2)*Nếu D là một tập trù mật và U là một tập mở trong không gian X thì* $U\subset\overline{U\cap D}$;

(3)*Nếu M là một không gian con đóng chính quy của không gian X và $A\subset M$ thì* $\overline{\operatorname{int}_M(A)}^M=\overline{\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)}^M$.

Chứng minh.

(1) Lấy bất kì x thuộc $\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)$, x thuộc $\operatorname{int}_M(A)$ và x thuộc $\operatorname{int}_X(M)$. Do x thuộc $\operatorname{int}_M(A)$ nên tồn tại U mở trong X sao cho $x\in U\cap M\subset A$. Mặt khác, vì x cũng thuộc $\operatorname{int}_X(M)$ nên tồn tại V mở trong X sao cho $x\in V\subset A$. Đặt $G=U\cap V$. Khi đó, G là một tập mở trong X thỏa mãn $x\in G\subset A$. Do đó, $x\in\operatorname{int}_X(A)$ hay

$$\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)\subset\operatorname{int}_X(A).$$

Ngược lại, lấy bất kì x thuộc $\operatorname{int}_X(A)$, suy ra x thuộc $\operatorname{int}_X(M)$ do $A\subset M$. Do x thuộc $\operatorname{int}_X(A)$ nên tồn tại U mở trong X sao cho $x\in U\subset A$. Khi đó, $U\cap M$ là một tập mở trong M thỏa mãn $x\in U\cap M\subset A$. Do đó, $x\in\operatorname{int}_M(A)$ hay $\operatorname{int}_X(A)\subset\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)$.

(2) Lấy bất kì x thuộc U. Với mọi V mở chứa x, $V\cap U$ là một tập mở chứa x. Do D là một tập trù mật hay $X=\overline{D}$ nên $(U\cap V)\cap D\neq\varnothing$ hay $V\cap(U\cap D)\neq\varnothing$. Do đó, $x\in\overline{U\cap D}$ hay $U\subset\overline{U\cap D}$.

(3) Hiển nhiên, $\overline{\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)}^M \subset \overline{\operatorname{int}_M(A)}^M$. Do M là một không gian con đóng chính quy nên $\overline{\operatorname{int}_X(M)}^M = \overline{\operatorname{int}_X(M)}^X \cap M = M$. Suy ra, $\operatorname{int}_X(M)$ là một tập trù mật trong M. Mặt khác, $\operatorname{int}_M(A)$ là một tập mở trong M. Theo (2), $\operatorname{int}_M(A)\subset\overline{\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)}^M$. Do đó,

$$\overline{\operatorname{int}_M(A)}^M \subset \overline{\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)}^M .$$

Bổ đề 2.

(1)Gọi M là một không gian con đóng chính quy của không gian X. Nếu A là một tập $p-$ đóng trong X thì $A\cap M$ là một tập $p-$ đóng trong M.

(2)Gọi M là một không gian con đóng chính quy của không gian X. Nếu A là một tập $p-$ mở trong X thì $A\cap M$ là một tập $p-$ mở trong M.

Chứng minh.

(1) Theo Bổ đề 1,

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{int}_M(A\cap M)}^M = \overline{\operatorname{int}_M(A\cap M)\cap\operatorname{int}_X(M)}^M &= \overline{\operatorname{int}_X(A\cap M)}^M\\ &= \overline{\operatorname{int}_X(A\cap M)}^X\cap M\\ &\subset \overline{\operatorname{int}_X(A)}^X\cap M\\ &\subset A\cap M.\end{aligned}$$

Do đó, $A\cap M$ là một tập $p-$ đóng trong M.

(2) Do A là một tập $p-$ mở trong X nên $X\setminus A$ là một tập $p-$ đóng trong X. Theo (1), $G=(X\setminus A)\cap M$ là một tập $p-$ đóng trong M hay $M\setminus G$ là một tập $p-$ mở trong M. Mặt khác, $M\setminus G=A\cap M$. Do đó, $A\cap M$ là một tập $p-$ mở trong M.

Bổ đề 3.

Nếu M là một không gian con đóng chính quy của không gian X và A là một tập đóng chính quy trong M thì A là một tập đóng chính quy trong X.

Chứng minh.

Do M là một không gian con đóng chính quy của không gian tôpô X và A là một tập đóng chính quy trong M nên $\overline{\operatorname{int}_X(M)}^X = M$ và $\overline{\operatorname{int}_M(A)}^M = A$.

Theo Bổ đề 1,

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{int}_X(A)}^X = \overline{\operatorname{int}_M(A)\cap\operatorname{int}_X(M)}^X &= \overline{\operatorname{int}_M(A)}^X\cap\overline{\operatorname{int}_X(M)}^X\\ &= \overline{\operatorname{int}_M(A)}^X\cap M = \overline{\operatorname{int}_M(A)}^M = A.\end{aligned}$$

Do đó, A là một tập đóng chính quy trong X.

Bổ đề 4.

Nếu M là một không gian con đóng chính quy của không gian X và A là một tập $\pi-$ đóng trong M thì A là một tập $\pi-$ đóng trong X.

Chứng minh.

Do A là một tập $\pi-$ đóng trong M nên tồn tại hữu hạn các tập A_i với $i=1,2,3,\ldots,n$ đóng chính quy trong M sao cho $A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$. Theo Bổ đề 3, tất cả các tập A_i với $i=1,2,3,\ldots,n$ đều đóng chính quy trong X. Do đó, A là một tập $\pi-$ đóng trong X.

(a) Gọi Y là không gian con đóng chính quy của không gian $p-$ chuẩn tắc X. Lấy bất kì một cặp tập đóng F_1 và F_2 rời nhau của không gian Y. Do Y là không gian đóng chính quy nên Y là một tập đóng của không gian X. Do đó, F_1 và F_2 là các tập đóng của không gian X.

Do X là một không gian $p-$ chuẩn tắc nên tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau của không gian X thỏa mãn $F_1\subset U$ và $F_2\subset V$. Theo Bổ đề 2, $U\cap Y$ và $V\cap Y$ là các tập $p-$ mở rời nhau của không gian Y thỏa mãn $F_1\subset U\cap Y$ và $F_2\subset V\cap Y$. Vì vậy, Y là một không gian $p-$ chuẩn tắc.

(b) Gọi Y là không gian con đóng chính quy của không gian hầu $p-$ chuẩn tắc X. Lấy bất kì một tập đóng F_1 và một tập đóng chính quy F_2 rời nhau của không gian Y. Theo Bổ đề 3, F_2 là một tập đóng chính quy của không gian X. Mặt khác, do Y là không gian đóng chính quy nên Y là một tập đóng của không gian X. Do đó, F_1 là một tập đóng của không gian X.

Do X là một không gian hầu $p-$ chuẩn tắc nên tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau của không gian X thỏa mãn $F_1\subset U$ và $F_2\subset V$. Theo Bổ đề 2, $U\cap Y$ và $V\cap Y$ là các tập $p-$ mở rời nhau của không gian Y thỏa mãn $F_1\subset U\cap Y$ và $F_2\subset V\cap Y$. Vì vậy, M là một không gian hầu $p-$ chuẩn tắc.

(c) Lập luận tương tự cách chứng minh ở Mệnh đề (b).

(d) Gọi Y là không gian con đóng chính quy của không gian $\pi p-$ chuẩn tắc X. Lấy bất kì một tập đóng F_1 và một tập $\pi-$ đóng F_2 rời nhau của không gian Y. Theo Bổ đề 4, F_2 là một tập $\pi-$ đóng của không gian X. Mặt khác, do Y là không gian đóng chính quy nên Y là một tập đóng của không gian X. Do đó, F_1 là một tập đóng của không gian X.

Do X là một không gian $\pi p-$ chuẩn tắc nên tồn tại các tập $p-$ mở U và V rời nhau của không gian X thỏa mãn $F_1\subset U$ và $F_2\subset V$. Theo Bổ đề 2, $U\cap Y$ và $V\cap Y$ là các tập $p-$ mở rời nhau của không gian Y thỏa mãn $F_1 \subset U \cap Y$ và $F_2 \subset V \cap Y$. Vì vậy, Y là một không gian $\pi p-$ chuẩn tắc.

(e) Lập luận tương tự cách chứng minh ở Mệnh đề (d).

5. Kết luận

Như vậy, các tính chất $p-$ chuẩn tắc đã được nghiên cứu một cách có hệ thống và rõ ràng trong bài viết. Bên cạnh đó, các đặc điểm tương tự như tính chất chuẩn tắc của các tính chất này ở hai phương diện tính chất đặc trưng và sự di truyền đối với không gian con cũng được chứng minh. Do việc mô tả các tập $p-$ mở của một không gian tôpô khá phức tạp nên nhiều vấn đề mở đối với các tính chất $p-$ chuẩn tắc vẫn đang được các nhà toán học quan tâm. Trong các định hướng sắp tới, chúng tôi sẽ cố gắng tập trung vào các hướng nghiên cứu sau nhằm làm rõ hơn về các tính chất $p-$ chuẩn tắc của một không gian tôpô:

1. Mối quan hệ nếu có giữa không gian tựa $p-$ chuẩn tắc và hầu $p-$ chuẩn tắc;
2. Bổ đề Urysohn đối với các tính chất $p-$ chuẩn tắc;
3. Bài toán về sự kế thừa trên không gian tôpô tích từ các không gian tôpô thành phần đối với các tính chất $p-$ chuẩn tắc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T. M. Nour, *Contributions to the theory of bitopological spaces*. PhD thesis, India: Delhi University, 1989.

[2] R. Engelking, *General Topology*. Berlin: Heldermann, 1989.

[3] G. B. Navalagi. (April 29th, 2000). $p-$ Normal, Almost $p-$ Normal and Mildly $p-$ Normal Spaces, *Topology Atlas Preprint #427*, Available: http://at.yorku.ca/i/d/e/b/71.htm.

[4] S. A. S. Thabit and H. Kamarulhaili, "$\pi p-$ Normal Topological Spaces," *Int. Journal of Math. Analysis*, vol. 6, no. 21, pp. 1023-1033, 2012.

[5] S. A. S. Thabit and H. Kamarulhaili, "On Quasi $p-$ Normal Spaces," *Int. Journal of Math. Analysis*, vol. 6, no. 27, pp. 1301 – 1311, 2012.

[6] S. N. El-Deeb, I. A. Hasanein, A. S. Mashhour and T. Noiri, "On $p-$ Regular Spaces," *Bull. Math. Soc. Sci. R.S.R*, TOME 27 (75), no. 4, pp. 311-315, 1983.

[7] J. H. Park, "Almost $p-$ Normal, Mildly $p-$ Normal Spaces and Some Functions," *Chaos, Solitions and Fractals, no.* 18, pp. 267-274, 2003.