TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ISSN: 1859-3100
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 9 (2018): 128-135

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 9 (2018): 128-135

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

QUY TẮC NHÂN TỬ LAGRANGE CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU NGẪU NHIÊN

***Nguyễn Xuân Hải*[1], *Nguyễn Văn Hưng*[2*]**

[1] *Trường Đại học Thủ Dầu Một*

[2] *Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông TP Hồ Chí Minh*

Ngày nhận bài: 17-7-2017; ngày nhận bài sửa: 08-12-2017; ngày duyệt đăng: 21-9-2018

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng công cụ đạo hàm Fréchet và dưới vi phân Michel-Penot, chúng tôi đã thiết lập được một kết quả mới về điều kiện cần tối ưu ở dạng quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên.

Từ khóa: hàm giá trị kì vọng, tối ưu ngẫu nhiên, điều kiện cần tối ưu, khả vi Fréchet, dưới vi phân Michel-Penot.

ABSTRACT

Lagrange multiplier rule for the stochastic optimization problem

In this paper, by using Fréchet derivative and Michel-Penot subdifferential, we establish a new Lagrange multiplier rule for the stochastic optimization problem

Keywords: Expected value function, stochastic programming, necessary optimality conditions, Fréchet differentiability, Michel-Penot subdifferential.

1. Các kiến thức cơ bản

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tối ưu ngẫu nhiên (SOP) như sau:

(SOP): min $\mathrm{E}\left[f\left(x,\omega\right)\right]$,

với $\mathrm{E}\left[f_i\left(x,\omega\right)\right]=0,\ \ i=1,\dots,m$,

$x\in\mathbb{R}^n$.

Ở đây, $\mathrm{E}\left[f\left(x,\omega\right)\right]$ và $\mathrm{E}\left[f_i\left(x,\omega\right)\right]$ là kì vọng của các đại lượng ngẫu nhiên $f, f_i:\mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{R}$ tương ứng với độ đo phân bố xác suất P trên không gian $\left(\Omega,\Sigma\right)$ xác định như sau

$$\mathrm{E}\left[f\left(x,\omega\right)\right]=\int_\Omega f\left(x,\omega\right)Pd\left(\omega\right),\ \mathrm{E}\left[f_i\left(x,\omega\right)\right]=\int_\Omega f_i\left(x,\omega\right)Pd\left(\omega\right).$$

Việc nghiên cứu quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu (không có tính ngẫu nhiên) đã được nghiên cứu rộng rãi với việc sử dụng rất nhiều loại đạo hàm hay dưới vi phân, các không gian nguồn và đích trong hàm mục tiêu và và hàm ràng buộc có thể là hữu

[*] Email: *nvhung@ptithcm.edu.vn*

hạn hoặc vô hạn chiều. Tuy nhiên, các kết quả cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên thì chưa nhiều. Theo hiểu biết của chúng tôi thì chủ yếu nghiên cứu trong trường hợp hữu hạn chiều, với việc sử dung một vài loại công cụ đạo hàm hoặc dưới vi phân như: đạo hàm Fréchet, dưới vi phân của hàm lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân epi… và chưa thấy các kết quả có sử dụng dưới vi phân Michel-Penot. Hơn nữa, trong lớp các hàm liên tục Lipschitz địa phương, chúng tôi nhận thấy, đến bây giờ, thì tập dưới vi phân Michel-Penot của lớp hàm này là nhỏ nhất; và do đó, các kết quả về điều kiện cần tối ưu (nếu có) khi sử dụng dưới vi phân này sẽ là mạnh nhất.

Bài báo này được cấu trúc như sau: Trong mục 1, chúng tôi sẽ cung cấp các kiến thức cơ bản dùng trong bài báo; Mục 2, sẽ trình bày một kết quả về quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu sử dụng hỗn hợp công cụ đạo hàm Fréchet và dưới vi phân Michel-Penot; Mục cuối, bằng cách sử dụng kết quả trong Mục 2 và một kết quả mới liên quan đến hàm kì vọng, chúng tôi đưa ra điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.1.

Cho E và F là các không gian Banach và hàm $f : E \to F$. Hàm f được gọi là khả vi Fréchet tại x nếu tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục $\varphi : E \to F$ sao cho:

$$f(x+h) = f(x) + \varphi(h) + 0(h),$$

với

$$0(h)/\|h\| \to 0 \text{ khi } h \to 0.$$

Và khi đó ta kí hiệu $\varphi := f'(x)$ hay $\varphi := \nabla f(x)$.

Định nghĩa 1.2.

Cho E là không gian Banach, E^* là không gian đối ngẫu của E và $f : E \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Đạo hàm Michel-Penot theo hướng của hàm f tại x theo hướng $v \in E$ là giá trị được xác định như sau

$$f^{\Diamond}(x;v) := \sup_{w \in E} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv+tw) - f(x+tw)}{t},$$

và dưới vi phân Michel-Penot của hàm f tại x là tập được xác định như sau

$$\partial^{\Diamond} f(x) := \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, v \rangle \le f^{\Diamond}(x^*;v) \ \forall v \in E \right\}.$$

Định nghĩa 1.3.

Cho E là không gian Banach và hàm số $f : E \to \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là liên tục Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ nếu tồn tại các số dương ε và λ sao cho

$$\left| f(x) - f(\bar{x}) \right| \le \lambda \left\| x - \bar{x} \right\| \quad \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon).$$

Mệnh đề 1.4.

(xem [1,2,3]) Nếu $f : E \to \mathbb{R}$ liên tục Lipschitz địa phương tại *x* thì:

(i) $f^{\Diamond}(x;.)$ là hữu hạn, thuần nhất dương và nửa cộng tính trên E;

(ii) $f^{\Diamond}(x;.)$ là hàm lồi trên *E*;

(iii) $\partial^{\Diamond} f(x)$ là một tập khác trống, lồi và compact yếu* của *E**;

(iv) $f^{\Diamond}(x;v) = \max\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial^{\Diamond} f(x)\}$ với mọi $v \in E$.

Định nghĩa 1.5.

Cho *X* là không gian Banach và $M \subset X$. Một vectơ $x \in X$ được gọi là tiếp xúc với tập *M* tại x_0 nếu tồn tại một $\varepsilon > 0$ và một ánh xạ $r : [0,\varepsilon] \to X$ sao cho $x_0 + tx + r(t) \in M \;\; \forall t \in [0,\varepsilon]$, $\|r(t)\|/t \to 0$ khi $t \to 0$. Tập tất cả các vectơ tiếp xúc với tập *M* tại x_0 được kí hiệu là $S_M(x_0)$.

Sau đây là một định lí quan trọng của Ljusternik.

Định lí 1.6.

(xem [4]) Cho *X* và *Y* là các không gian Banach, ánh xạ $f : X \to Y$ là khả vi Fréchet trong một lân cận của $x_0 \in X$. Giả sử $\mathrm{Im}\nabla f(x_0) = Y$ và ∇f liên tục tại x_0. Khi đó ta có

$$S_M(x_0) = \mathrm{Ker}\nabla f(x_0).$$

Lưu ý rằng hạt nhân và ảnh của ánh xạ được xác định bởi $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in X : f(x) = 0\}; \mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in Y : x \in X\}$.

Mệnh đề 1.7.

(xem [4]) Cho *X* và *Y* là các không gian Banach, $\varphi : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính sao cho $\mathrm{Im}\,\varphi = Y$. Khi đó ta có $(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}\,\varphi^*$, trong đó $(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$ là phần bù trực giao của hạt nhân của ánh xạ φ, $\mathrm{Im}\,\varphi^*$ là ảnh của toán tử liên hợp của φ.

2. Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu

Cho *X*, *Y* là các không gian Banach và các ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to Y$. Ta xét bài toán tối ưu (OP) sau

(OP) min *f(x)*,

với *g(x)* = 0,

$x \in X$.

Định lí 2.1.

Giả sử f Lipschitz địa phương tại x^*, g khả vi (Fréchet) liên tục tại x^* và Im $\nabla g\left(x^*\right)=Y$. Nếu x^* là nghiệm cực tiểu địa phương của (OP) thì tồn tại $\lambda\in Y^*$ để cho $0\in\partial^\lozenge f(x^*)+\left\langle\left(\nabla g\left(x^*\right)\right)^*,\lambda\right\rangle$.

Chứng minh. Đặt $Q=\left\{x\in X\,\middle|\,g(x)=0\right\}$. Ta sẽ chứng minh $f^\lozenge(x^*,v)\geq 0$ với mọi $v\in S_Q(x^*)$.

Thật vậy, nếu $v\in S_Q(x^*)$ thì tồn tại $u(t)\to 0$ khi $t\downarrow 0$, tồn tại $\tau>0$, với mọi $t\in[0,\tau]$,

$$x^*+tv+tu(t)\in Q.$$

Sử dụng tính Lipschitz địa phương của f và tính cực tiểu địa phương của x^* ta có

$$\begin{aligned}f^\lozenge(x^*;v)&=\sup_{w\in X}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x^*+tv+tw)-f(x^*+tw)}{t}\\&\geq\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x^*+tv)-f(x^*)}{t}\\&=\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x^*+tv+tu(t))-f(x^*)}{t}\geq 0.\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta chứng minh tồn tại $\xi_2\in\partial^\lozenge f\left(x^*\right):\langle\xi_2,v\rangle=0$ với mọi $v\in S_Q(x^*)$.

Theo định lí Ljusternik $S_Q(x^*)=\operatorname{Ker}\nabla g(x^*)$, do đó $S_Q(x^*)$ là một không gian con của X.

Ta đặt $\xi_1:S_Q(x^*)\to\mathbb{R}$ thỏa $\langle\xi_1,v\rangle=0$ với mọi $v\in S_Q(x^*)$. Như vậy ξ_1 tuyến tính và

$$\langle\xi_1,v\rangle\leq f^\lozenge\left(x^*;v\right)\ \forall v\in S_Q(x^*).$$

Vì $f^\lozenge\left(x^*,.\right)$ là nửa tuyến tính nên theo định lí Hahn-Banach, tồn tại ánh xạ tuyến tính $\xi_2:X\to\mathbb{R}$ thỏa

$$\langle\xi_2,v\rangle=0\ \forall v\in S_Q(x^*)$$

và

$$\langle\xi_2,v\rangle\leq f^\lozenge\left(x^*;v\right)\ \forall v\in X.$$

Do $f^\lozenge\left(x^*,.\right)$ bị chặn nên $\xi_2\in L(X,\mathbb{R})$ và do đó $\xi_2\in\partial^\lozenge f\left(x^*\right)$.

Cuối cùng, để kết thúc chứng minh ta cần chứng tỏ tồn tại $\lambda \in Y^*$ thỏa $\xi_2 = \left\langle \left(\nabla g\left(x^*\right)\right)^*, \lambda \right\rangle$. Thật vậy, $\xi_2 \in \left(\mathrm{Ker}\,\nabla g\left(x^*\right)\right)^{\perp}$. Áp dụng mệnh đề về không gian trực giao ta có $\left(\mathrm{Ker}\,\nabla g\left(x^*\right)\right)^{\perp} = \mathrm{Im}\left(\nabla g\left(x^*\right)\right)^*$, và từ $\xi_2 \in \mathrm{Im}\left(\nabla g\left(x^*\right)\right)^*$ dẫn đến điều phải chứng minh. □

3. Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên

Trong mục này ta luôn giả sử với mọi $x \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{E}\left[f\left(x,\omega\right)\right]$ và $\mathrm{E}\left[f_i\left(x,\omega\right)\right]$ hữu hạn, *i=1,...m.*

Định nghĩa 3.1.

(xem [6]) Kì vọng của tập ngẫu nhiên Γ là tập sau

$$\mathrm{E}\,\Gamma = \int_\Omega \Gamma(\omega) Pd(\omega) := \mathrm{cl}\left\{\int_\Omega u(\omega) Pd(\omega) \middle| u \text{ là lát cắt khả tích của } \Gamma\right\},$$

ở đây, cl là kí hiệu bao đóng của một tập (không có "cl" biểu thức trên chính là tích phân theo nghĩa Aumann).

Định nghĩa 3.2.

Hàm tựa của tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$s(h) := \sup_{z \in C} z^T h.$$

Ta có kết quả là: nếu *s1* và *s2* là các hàm tựa tương ứng với hai tập lồi, đóng *A* và *B* thì $s_1(h) \le s_2(h)\ \forall h \in \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

Ta có các kết quả trong [7] liên quan đến hàm kì vọng như sau

Mệnh đề 3.3.

Giả sử $f\left(.,\omega\right)$ liên tục đều hầu khắp nơi tại x_0, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một lân cận *V* của x_0 sao cho với mọi $y \in V$ thì

$$\left|f\left(x_0,\omega\right) - f\left(y,\omega\right)\right| < \varepsilon \text{ với hầu khắp } \omega \in \Omega.$$

Khi đó $\mathrm{E}\left[f\left(.,\omega\right)\right]$ liên tục tại x_0.

Mệnh đề 3.4.

Giả sử $f\left(.,\omega\right)$ khả vi hầu khắp nơi tại x_0 và tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương $C\left(\omega\right)$ thỏa $\mathrm{E}\left[C\left(\omega\right)\right] < +\infty$ và $\forall x_1, x_2$ thuộc lân cận nào đó của x_0 thì

$$\left|f\left(x_1,\omega\right) - f\left(x_2,\omega\right)\right| \le C\left(\omega\right)\left\|x_1 - x_2\right\| \text{ với hầu khắp } \omega \in \Omega.$$

Khi đó $\mathrm{E}\left[f\left(.,\omega\right)\right]$ khả vi tại x_0 và $\left(\mathrm{E}\,f\right)'(x_0) = \mathrm{E}\left[f_x'\left(x_0,\omega\right)\right]$.

Mệnh đề sau là một kết quả mới về dưới vi phân Michel – Penot của hàm kì vọng mà chúng tôi chứng minh được.

Mệnh đề 3.5.

Giả sử với $x, y \in \mathbb{R}^n$, ánh xạ $\omega \mapsto f_x^\Diamond(x,\omega,y)$ là đo được; tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương $C(\omega)$ thỏa $\mathrm{E}\left[C(\omega)\right] < +\infty$ và với mọi x_1, x_2 thuộc lân cận của *x* thì

$\left|f(x_1,\omega) - f(x_2,\omega)\right| \le C(\omega)\|x_1 - x_2\|$ với hầu khắp $\omega \in \Omega$.

Khi đó, $\partial^\Diamond(\mathrm{E}\, f)(x) \subset \mathrm{E}\left[\partial^\Diamond f(x,\omega)\right]$.

Chứng minh.

Ta có

$$f_x^\Diamond(x,\omega;y) = \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x+ty+tz,\omega) - f(x+tz,\omega)}{t}.$$

Đặt

$$H_{t,z}(\omega) = \frac{f(x+ty+tz,\omega) - f(x+tz,\omega)}{t}.$$

Ta thấy $\left|H_{t,z}(\omega)\right| \le t^{-1}C(\omega)\|ty\| \le C(\omega)\|y\|$. Do đó theo bổ đề Fatou ta được

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\limsup_{t\downarrow 0}\int_\Omega H_{t,z}(\omega) Pd(\omega) \le \int_\Omega \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\limsup_{t\downarrow 0} H_{t,z}(\omega)\, Pd(\omega),$$

nghĩa là

$$(\mathrm{E}\, f)^\Diamond(x;y) \le \mathrm{E}\left(f_x^\Diamond(x,\omega;y)\right). \quad (1)$$

Gọi s_1 và s_2 là các hàm tựa tương ứng với tập $\partial^\Diamond(\mathrm{E}\, f)(x)$ và $\mathrm{E}\left[\partial^\Diamond f(x,\omega)\right]$. Ta dễ dàng thấy hai tập trên là lồi và đóng. Để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chỉ ra rằng $s_1(v) \le s_2(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^n$. Thật vậy, từ (1) và (iv) của Mệnh đề 1.4 ta có

$$s_1(v) \le \mathrm{E}\left[f_x^\Diamond(x,\omega;y)\right]$$

và

$$f_x^\Diamond(x,\omega,y) = v^T g(\omega) \text{ với } g(\omega) \in \partial^\Diamond(x,\omega) \text{ nào đó.}$$

Vì vậy

$$\mathrm{E}\left[f_x^\Diamond(x,\omega;y)\right] = v^T\mathrm{E}\left[g(\omega)\right],$$

nghĩa là

$$\mathrm{E}\left[f_x^\Diamond(x,\omega;y)\right] = v^T\mathrm{E}\left[\partial^\Diamond f(x,\omega)\right].$$

Như vậy, $\mathrm{E}\left[f_x^\Diamond(x,\omega;y)\right] \le s_2(v)$, và do đó $s_1(v) \le s_2(v)$. □

Sau đây là kết quả về điều kiện cần cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên (SOP).

Định lí 3.6.

Giả sử

(i) với $x, y \in \mathbb{R}^n$, ánh xạ $\omega \mapsto f_x^{\Diamond}(x,\omega;y)$ là đo được; tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương $C(\omega)$ thỏa $\mathrm{E}\left[C(\omega)\right] < +\infty$ và với mọi x_1, x_2 thuộc lân cận của x^* thì

$\left| f(x_1,\omega) - f(x_2,\omega) \right| \le C(\omega)\|x_1 - x_2\|$ với hầu khắp $\omega \in \Omega$

(ii) với mọi *i=1,...,m*, $f_i(.,\omega)$ khả vi hầu khắp nơi trong một lân cận của x^* và $\nabla f_i(.,\omega)$ liên tục đều hầu khắp nơi tại x^*; hệ $\left\{\nabla \mathrm{E}\, f_i(x^*)\right\}_{i=1,\dots,m}$ độc lập tuyến tính;

(iii) với mỗi $i \in \{1,\dots,m\}$, tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương $C(\omega)$ thỏa $\mathrm{E}\left[C(\omega)\right] < +\infty$ và với mọi x_1, x_2 thuộc lân cận của x^* thì

$\left| f_i(x_1,\omega) - f_i(x_2,\omega) \right| \le C(\omega)\|x_1 - x_2\|$ với hầu khắp $\omega \in \Omega$.

Khi đó nếu x^* là nghiệm cực tiểu địa phương của (SOP) thì tồn tại các giá trị thực $\lambda_i, i = 1,\dots,m$ sao cho

$$0 \in \mathrm{E}\left[\partial^{\Diamond} f\left(x^*,\omega\right)\right] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{E}\left[\nabla_x f_i\left(x^*,\omega\right)\right].$$

Chứng minh.

Từ giả thiết (i), $\mathrm{E}\left[f(x,\omega)\right]$ liên tục Lipschitz địa phương tại x^*. Theo Mệnh đề 3.3, $\mathrm{E}\left[f_i(x,\omega)\right]$ khả vi liên tục tại x^*, *i=1,...,m*. Áp dụng Định lí 2.1 cho bài toán (SOP), tồn tại các giá trị thực λ_i sao cho

$$0 \in \partial^{\Diamond}\mathrm{E}\left[f\left(x^*,\omega\right)\right] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . \nabla \mathrm{E}\left[f_i\left(x^*,\omega\right)\right].$$

Sử dụng các kết quả có được từ Mệnh đề 3.2 và Mệnh đề 3.3 là $\nabla \mathrm{E}\left[f\left(x^*,\omega\right)\right] = \mathrm{E}\left[\nabla_x f\left(x^*,\omega\right)\right]$ và $\partial^{\Diamond}\left(\mathrm{E}\, f\right)\left(x^*\right) \subset \mathrm{E}\left[\partial^{\Diamond} f\left(x^*,\omega\right)\right]$, ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét

(i) Các tính chất của hàm kì vọng như ở dạng trong Mệnh đề 3.5 chỉ được nghiên cứu trong trường hợp sử dụng dưới vi phân của hàm lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân contingent, dưới vi phân epi… Chưa thấy có kết quả nào khi sử dụng dưới vi phân Michel-Penot.

(ii) Định lí 3.6 là hoàn toàn mới. Các kết quả tương tự cho bài toán này trong tài liệu [6,7] chỉ sử dụng các loại dưới vi phân của hàm lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân contingent, dưới vi phân epi.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W. Schirotzek, *Nonsmooth Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[2] J.Y. Jane, "Nondifferentiable multiplier rules for optimization and bilevel optimization problems," *SIAM J. Optim*, vol. 15, pp. 252-274, 2004.

[3] V. Laha, B. Al-Shamary and S.K. Mishra, "On nonsmooth V-invexity and vector variational-like inequalities in terms of the Michel–Penot subdifferentials," *Optimization Lett*, vol. 8, pp. 1675-1690, 2014.

[4] A.D. Ioffe, and V.M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*. NorthHolland, Amsterdam, pp. 45-57, 1979.

[5] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[6] R.J.-B. Wets, "Stochastic programming," in: *Handbook for Operations Research and Management Sciences*, vol. 1, G. Nemhauser and A. Rinnnooy Kan Eds, Elsevier Science Publishers, 1989, pp. 573-629.

[7] A. Ruszczynski, A. Shapiro, "Optimality and duality in stochastic programming," *Handbooks in OR & MS*, vol. 10, A. Ruszczynski and A. Shapiro Eds, Elsevier Science B.V. 2003.