TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 9 (2018): 120-127
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 9 (2018): 120-127

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

VÀNH CHIA ĐẠI SỐ TRÊN VÀNH CHIA CON

Võ Hoàng Minh Thư*

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM

Ngày nhận bài: 20-7-2018; ngày nhận bài sửa: 21-8-2018; ngày duyệt đăng: 21-9-2018

TÓM TẮT

Cho D là vành chia với tâm $F = Z(D)$ có phép đối hợp å và K là một vành chia con của D chứa F. Mục tiêu của bài báo nhằm chứng minh rằng nếu F là trường vô hạn không đếm được thì tập hợp $S = \{x \in D \mid x^{\text{å}} = x\}$ bao gồm tất cả các phần tử đối xứng của D là đại số phải trên K khi và chỉ khi D đại số phải trên K. Chúng tôi cũng xây dựng một vành chia D có vành chia con K sao cho D đại số phải nhưng không đại số trái trên K.

Từ khóa: vành chia, phép đối hợp, đại số phải.

ABSTRACT

Division rings that are algebraic over a division subring

Let D be a division ring with center $F = Z(D)$, let å be an involution of D and let K be a division subring of D containing F. The main purpose of this paper is to show that if F is uncountable, then the set $S = \{x \in D \mid x^{\text{å}} = x\}$ of symmetric elements of D is right algebraic over K if and only if D is right algebraic over K. We also construct a division ring D and its division subring K such that D is right algebraic but not left algebraic over K.

Keywords: division ring, involution, right algebraic.

1. Giới thiệu

Cho D là vành chia tâm F và K là vành chia con của D. Một phần tử $a \in D$ được gọi là *đại số phải* (tương ứng, *đại số trái*) trên K nếu có các phần tử $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ không đồng thời bằng 0 sao cho $a_0 + aa_1 + \cdots + a^n a_n = 0$ (tương ứng, $a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n = 0$). Nếu $K \subseteq F$ thì tính chất đại số phải và đại số trái là như nhau, và khi đó, phần tử a được gọi là *đại số* trên F. Vì vậy, khái niệm đại số phải (trái) trên vành chia con là sự tổng quát của khái niệm đại số trên F.

Khái niệm đại số trên vành chia con đã từng được đề cập trong ([1], Chương 7) nhằm nghiên cứu nghiệm của đa thức trên vành chia. Riêng lớp vành chia đại số trên vành chia con của nó cũng được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học lớn như I. N. Herstein và C. Faith (xem, chẳng hạn trong [2], [3]) và gần đây nó nhận được sự quan tâm nhiều hơn (xem [4]-[7]). Một trong những vấn đề mà ta quan tâm là khái niệm đại số phải và đại số trái có

* Email: *minhthuvohoang@gmail.com*

trùng nhau không? Trong [5], các tác giả đặt câu hỏi rằng nếu vành chia D đại số phải trên một trường con K thực sự không nằm trong tâm của nó thì liệu D có đại số trái trên K hay không? Hiện nay, đây vẫn đang còn là một câu hỏi mở. Trong Mục 2 của bài này, chúng tôi sẽ xây dựng một vành chia D chứa vành chia con K sao cho D đại số phải trên K nhưng không đại số trái trên K. Như vậy, kết quả của chúng tôi cho một câu trả lời phủ định cho một vấn đề được các tác giả đặt ra trong [5].

Trong Mục 3, chúng tôi sẽ trình bày sự mở rộng một kết quả của Susan Montegomery cho vành chia có phép đối hợp. Để tiện theo dõi, ta nhắc lại rằng, với R là vành, ánh xạ $\text{å}: R \to R, x \mapsto x^{\text{å}}$, được gọi là *phép đối hợp* nếu đối với mọi $x, y \in R$, ta có các tính chất sau:

(1) $(x+y)^{\text{å}} = x^{\text{å}} + y^{\text{å}}$;

(2) $(xy)^{\text{å}} = y^{\text{å}} x^{\text{å}}$;

(3) $(x^{\text{å}})^{\text{å}} = x$.

Phần tử $x \in R$ được gọi là phần tử *đối xứng* (tương ứng, *phản đối xứng*) nếu $x^{\text{å}} = x$ (tương ứng, $x^{\text{å}} = -x$). Đặt $S_R = \{x \in R \mid x^{\text{å}} = x\}$ là tập hợp tất cả các phần tử đối xứng của R. Năm 1972, Susan Montegomery chứng minh được rằng đối với một vành chia D có phép đối hợp với tâm F không đếm được, nếu S là tập hợp đại số trên F thì bản thân D sẽ đại số trên F (xem [8]). Ở đây, chúng tôi sẽ mở rộng kết quả này bằng cách xem xét tính đại số phải (hoặc trái) trên một vành chia con bất kì của D. Cụ thể, cũng với giả thiết D là vành chia có phép đối hợp với tâm F vô hạn không đếm được, nếu K là một vành chia con bất kì của D thì tập hợp các phần tử đối xứng S_D của D đại số phải (tương ứng, đại số trái) trên K khi và chỉ khi D đại số phải (tương ứng, đại số trái) trên K.

2. Vành chia các thương và ví dụ về đại số phải

Trong mục này, ta sẽ trình bày một số ví dụ để chứng tỏ khái niệm đại số phải và đại số trái trên một vành chia con là một mở rộng thực sự của khái niệm đại số trên tâm. Ta sẽ đưa ra ví dụ về một phần tử nằm trong một vành chia, đại số phải trên vành chia con nhưng không đại số trái trên vành chia con vừa nêu.

Để tiện theo dõi, chúng ta nhắc lại định nghĩa vành chia các thương. Giả sử S là miền, tức là S là vành (có thể không giao hoán) và không có ước của không. Đặt $S^* = S \setminus \{0\}$. Ta nói S là RPID[1] (tương ứng, LPID[2]) nếu mọi iđêan phải (tương ứng, trái) đều là iđêan chính. Nếu với mọi $a \in S, b \in S^*$, ta có $aS^* \cap bS \neq \varnothing$ thì S được gọi là thỏa *điều kiện Ore phải*. Điều kiện Ore trái được định nghĩa hoàn toàn tương tự. Ta sẽ chứng minh kết quả sau.

[1]viết tắt của từ tiếng Anh: right principal ideal domain
[2]viết tắt của từ tiếng Anh: left principal ideal domain

Bổ đề 2.1.

Mọi RPID (tương ứng, LPID) thỏa điều kiện Ore phải (tương ứng, Ore trái).

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp RPID, còn trường hợp LPID hoàn toàn tương tự. Giả sử S là một RPID. Xét $a \in S, b \in S^*$ và iđêan tổng $aS + bS$. Khi đó, vì S là RPID nên tồn tại $x \in S$ sao cho $aS + bS = xS$. Do $b \neq 0$ nên $x \neq 0$. Mặt khác, $x = as + bt$, $b = xb_1$ $a = xa_1$, với $s, t, a_1, b_1 \in S$, kéo theo $a = xa_1 = asa_1 + bta_1$. Từ đó suy ra, $a(1 - sa_1) = b(ta_1)$. Rõ ràng phần tử $b(ta_1)$ nằm trong tập hợp $aS \cap bS$. Nếu $b(ta_1) = 0$ thì $t = 0$ hoặc $a_1 = 0$ vì S là miền và $b \in S^*$. Trường hợp $a_1 = 0$ dẫn đến $a = 0$, kéo theo $0 \in aS^* \cap bS$. Nếu $t = 0$ thì $x = as$, kéo theo $b = xb_1 = asb_1 \in aS^* \cap bS$. Cả hai trường hợp đều dẫn đến $aS^* \cap bS \neq \varnothing$. Vậy, S thỏa điều kiện Ore phải.

Giả sử S là miền thỏa mãn điều kiện Ore phải. Nhắc lại rằng, vành chia các thương phải $Q_r(S)$ được xây dựng như sau:

Trên tích Descartes

$S \times S^* = \{(a,b) \mid a \in S, b \in S^*\}$,

với các phần tử $(a,b),(c,d) \in S \times S^*$, ta định nghĩa $(a,b) \equiv (c,d)$ khi và chỉ khi tồn tại $x, y \in S^*$ sao cho $ax = cy$ và $bx = dy$. Hiển nhiên, đây là một quan hệ tương đương trên tập $S \times S^*$. Kí hiệu ab^{-1} là lớp tương đương chứa phần tử đại diện $(a,b) \in S \times S^*$ và đặt $Q_r(S) = \{ab^{-1} \mid (a,b) \in S \times S^*\}$. Nhận xét rằng, với các phần tử $ab^{-1}, cd^{-1} \in Q_r(S)$, ta luôn tìm được các phần tử $x, y, u, v \in S^*$ sao cho $bx = dy$ và $bu = cv$. Trên tập $Q_r(S)$, định nghĩa hai phép toán cộng và nhân bởi $ab^{-1} + cd^{-1} = (ax + cy)(bx)^{-1}$ và $(ab^{-1})(cd^{-1}) = au(dv)^{-1}$. Khi đó, có thể kiểm tra được $Q_r(S)$ là vành chia. Hiển nhiên, tương ứng $a \mapsto a1^{-1}, a \in S$ xác định một đơn cấu vành từ S vào $Q_r(S)$. Do đó, ta có thể xem S như là vành con của $Q_r(S)$. Ta gọi $Q_r(S)$ là *vành chia các thương phải* của miền S. *Vành chia các thương trái* được định nghĩa hoàn toàn tương tự trong trường hợp S là miền thỏa điều kiện Ore trái. Các định nghĩa và chứng minh chi tiết có thể tham khảo trong [9].

Giả sử D là vành chia và K là vành chia con của nó. Khi đó, phần tử $x \in D$ đại số phải trên K nếu và chỉ nếu x là phần tử đại số trái của vành chia đối D^{op} trên vành chia con K^{op}. Đây là lí do, vì sao trong xây dựng vành chia các thương, ta chỉ tập trung vào việc xây dựng vành chia các thương phải. Cũng vì lí do đó, từ đây, để đơn giản, ta sẽ dùng kí hiệu $Q(S)$ thay cho kí hiệu $Q_r(S)$.

Ví dụ mà chúng tôi xây dựng trong mục này là vành chia các thương của mở rộng Ore. Cho R là vành và $\sigma : R \to R$ là tự đồng cấu. Tự đồng cấu cộng $\delta : R \to R$ được gọi là $\sigma -$ *vi phân* nếu $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$, với mọi $a,b\in R$. Với vành R, tự đồng cấu σ và σ-vi phân δ, ta có thể xây dựng vành đa thức $R[t,\sigma,\delta]$ như sau:

$$R[t,\sigma,\delta]=\{t^n c_n+t^{n-1}c_{n-1}+\cdots+tc_1+c_0 : c_i\in R\}$$

là tập hợp các đa thức theo biến t với hệ số lấy trong R và được viết về bên phải của biến. Trên $R[t,\sigma,\delta]$, định nghĩa phép cộng theo cách cộng hai đa thức thông thường và phép nhân là mở rộng của phép nhân theo quy tắc $ct=t\sigma(c)+\delta(c),$ với $c\in R$. Với hai phép toán trên, $R[t,\sigma,\delta]$ là một vành và nó được gọi là *mở rộng Ore* của R ứng với σ và δ. Nếu R là trường thì $R[t,\sigma,\delta]$ là miền. Hơn thế nữa, ta có kết quả dưới đây.

Bổ đề 2.2.

Nếu R là trường thì $R[t,\sigma,\delta]$ là RPID.

Chứng minh. Đây được xem như là một hệ quả của ([9], Pro 2.1.1).

Dựa vào Bổ đề 2.2, ta sẽ xây dựng vành chia D chứa vành chia con K sao cho D đại số phải trên K nhưng không đại số trái trên K. Cho F là một trường và $\{a,b_0,b_1,\ldots\}$ là tập hợp vô hạn đếm được các biến giao hoán. Khi đó, trường $E=F(a,b_0,b_1,\ldots)$ được gọi là trường các thương của vành đa thức $F[a,b_0,b_1,\ldots]$. Xét tự đồng cấu $\sigma : E\to E$ được sinh ra bởi $\sigma(a)=-a$ và $\sigma(b_i)=b_{i+1}$, với $i\geq 0$. Khi đó, tự đồng cấu cộng $\delta : E\to E$ được xác định bởi $\delta(x)=xa-a\sigma(x)$, với mọi $x\in E$. Khi đó, ánh xạ δ là một σ-vi phân.

Mệnh đề 2.3.

Cho E, σ và δ được định nghĩa ở trên. Khi đó, tồn tại vành chia $D=Q(S)$ là vành chia các thương (phải) của $S=E[t,\sigma,\delta]$. Đặt K là vành chia con của D được sinh bởi t^2 trên E. Khi đó, ta có những tính chất sau:

1. *D là không gian véc-tơ phải có số chiều là 2 trên K. Nói riêng, mọi phần tử của D đều đại số phải bậc ≤ 2 trên K;*
2. *Phần tử $\alpha=t+b_0$ không đại số trái trên K. Nói riêng, D không đại số trái trên K.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2, mở rộng Ore $E[t,\sigma,\delta]$ là RPID. Như vậy, vành đa thức $E[t,\sigma,\delta]$ thỏa điều kiện Ore phải, theo Bổ đề 2.1. Vì vậy, vành chia D xác định và chứa $E[t,\sigma,\delta]$ như là một vành con của nó. Với $x\in E$, ta có

$$\begin{aligned}(\sigma\delta+\delta\sigma)(x) &= \sigma\delta(x)+\delta\sigma(x)\\ &= \sigma(xa-a\sigma(x))+\delta(\sigma(x))\\ &= \sigma(x)\sigma(a)-\sigma(a)\sigma^2(x)+\sigma(x)a-a\sigma^2(x)\\ &= -\sigma(x)a+a\sigma^2(x)+\sigma(x)a-a\sigma^2(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Do đó, áp dụng ([10], Bổ đề 5.1), (1) đã được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh tập $\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$ là độc lập tuyến tính trái trên K. Giả sử ngược lại, ta có

$$f_n(t^2)\alpha^n + f_{n-1}(t^2)\alpha^{n-1} + \cdots + f_1(t^2)\alpha + f_0(t^2) = 0,$$

trong đó $f_i(t^2) \in K$ với mọi i và $f_n(t^2) \neq 0$. Trong đẳng thức trên, số hạng α^n có duy nhất một hạng tử tb_0^{n-1}, đồng thời, với $0 \le i \le n-1$, trong các số hạng α^i không xuất hiện hạng tử ty_0^{n-1}. Vì vậy, $f_n(t^2)b^{n-1} = 0$, suy ra $f_n(t^2) = 0$, là điều mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, tập $\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$ độc lập tuyến tính trái trên K, kéo theo α không đại số trái trên K. Vậy ta đã chứng minh được phần (2).

3. Vành chia có các phần tử đối xứng đại số

Bổ đề 3.1.

Cho D là vành chia có tâm F và K là vành chia con chứa F. Giả sử có phần tử $a \in D$ và n phần tử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện $a - \alpha_i \neq 0$ với mọi $1 \le i \le n$. Khi đó, phần tử a đại số phải (hay trái) trên K hoặc $\{(a-\alpha_1)^{-1}, (a-\alpha_2)^{-1}, \ldots, (a-\alpha_n)^{-1}\}$ là một tập độc lập tuyến tính phải (hay trái) trên K.

Chứng minh. Ở đây, ta sẽ chứng minh cho trường hợp đại số phải, còn đối với trường hợp đại số trái thì hoàn toàn tương tự. Giả sử a là phần tử không đại số phải trên K.

Xét

$$(a-\alpha_1)^{-1}\beta_1 + (a-\alpha_2)^{-1}\beta_2 + \cdots + (a-\alpha_n)^{-1}\beta_n = 0,$$

với $\beta_i \in K$ Ta sẽ chứng minh $\beta_i = 0$ với mọi $1 \le i \le n$. Đặt

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) \in F[x] \subseteq K[x]$$

và

$$f_i(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_i)} = f(x)(x-\alpha_i)^{-1}.$$

Ta có

$$f(a)\left[(a-\alpha_1)^{-1}\beta_1 + (a-\alpha_2)^{-1}\beta_2 + \ldots + (a-\alpha_n)^{-1}\beta_n\right] = 0.$$

Do đó,

$$f_1(a)\beta_1 + f_2(a)\beta_2 + \cdots + f(a)\beta_n = 0,$$

suy ra, a là nghiệm của đa thức $g(x) = f_1(x)\beta_1 + f_2(x)\beta_2 + \cdots + f_n(x)\beta_n \in K[x]$. Nhưng do theo giả thiết ban đầu a không đại số phải trên K nên $g(x) \equiv 0$, từ đó suy ra $g(d) = 0$ với mọi $d \in D$. Vì vậy,

$$\begin{aligned} 0 = g(\alpha_1) &= f_1(\alpha_1)\beta_1 + f_2(\alpha_1)\beta_2 + \cdots + f_n(\alpha_1)\beta_n \\ &= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\beta_1. \end{aligned}$$

Ngoài ra, vì các phần tử $\alpha_1-\alpha_i\neq 0$, với mọi $i\neq 1$ nên $\beta_1=0$. Một cách tương tự, ta chứng minh được $\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_n=0$. Vậy tập hợp $\{(a-\alpha_1)^{-1},(a-\alpha_2)^{-1},\ldots,(a-\alpha_n)^{-1}\}$ là một tập độc lập tuyến tính phải trên K.

Bổ đề 3.2.

Cho D là vành chia tâm F với phép đối hợp å và K là vành chia con của D chứa F. Đặt $A=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & s\end{pmatrix}\in M_2(D)$, trong đó $s=x^{\text{å}}+x$ và $p=-xx^{\text{å}}$, với $x\in D$. Nếu A đại số phải trên $I_2K=\{I_2a\,/\,a\in K\}$ thì x đại số phải trên K.

Chứng minh. Trước hết, ta có $A^2=As+I_2p$, với $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Từ đó suy ra

$$A^3=A(As+I_2p)=A^2s+Ap=(As+I_2\,\text{p})\text{s}+Ap=A(s^2+p)+I_2ps=As_1+I_2p_1.$$

Một cách tương tự, với mọi $n\geq 2$, ma trận $A^n=As_{n-2}A+I_2p_{n-2}$, trong đó $s_{n-2},p_{n-2}\in D$. Do $x^2=xs+p$ nên $x^n=xs_{n-2}+p_{n-2}$, với mọi $n\geq 2$. Nếu A đại số phải trên K thì tồn tại một đa thức $p(t)\in K[t]$ sao cho $p(A)=0$. Ta sẽ chứng minh $p(x)=0$. Thật vậy, với $p(t)=t^n+t^{n-1}a_{n-1}+\cdots+ta_1+a_0\in K[t]$, ta có

$$\begin{aligned}0 &= p(A)\\ &= (As_{n-2}+I_2p_{n-2})+\cdots+(As+I_2p)a_2+Aa_1+I_2a_0\\ &= A(s_{n-2}+s_{n-3}a_{n-1}+\cdots+a_1)+I_2(p_{n-2}+p_{n-3}a_{n-1}+\cdots+a_0)\\ &= Ab+I_2b'\end{aligned}$$

với $b,b'\in D$. Vì $0=Ab+I_2b'=\begin{pmatrix}0 & pb\\ b & sb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b' & 0\\ 0 & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b' & pb\\ b & sb+b'\end{pmatrix}$ nên $b=b'=0$. Vì $x^i=xs_{i-2}+p_{i-2}$, với mọi $i>2$ nên $p(x)=xb+b'=0$, do đó x đại số phải trên K.

Trước khi chứng minh định lí chính của mục này, ta cần nhắc lại các bổ đề sau.

Bổ đề 3.3.

([11], Theorem 16.4) *Cho D là vành chia với $f(t)$ là đa thức bậc n của $D[t]$. Khi đó, các nghiệm của đa thức $f(t)$ nằm trong nhiều nhất n lớp liên hợp trong D. Nếu $f(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$, với $a_1,a_2,\ldots,a_n\in D$ thì nghiệm của f đều là liên hợp của a_i với $1\leq i\leq n$.*

Bổ đề 3.4.

Cho D là vành chia có tâm không đếm được F với phép đối hợp å. Đặt $L=\{\alpha\in F\,|\,\alpha^{\text{å}}=\alpha\}$. Khi đó, với mọi s,p bất kì thuộc D, tồn tại không đếm được các phần tử $\alpha\in L$ sao cho $a_\alpha=\alpha^2-\alpha s-p$ khả nghịch trong D.

Chứng minh. Đặt $g(t)=t^2-ts-p\in D[t]$. Theo Bổ đề 3.3, đa thức $g(t)$ có nhiều nhất hai nghiệm trong F, suy ra $g(t)$ có nhiều nhất hai nghiệm trong L. Vì $L=S\cap F$ nên $[F:L]\le 2$, mà F không đếm được, dẫn tới L cũng không đếm được. Vì vậy, tồn tại vô hạn các phần tử α sao cho $\alpha^2-\alpha s-p\neq 0$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh kết quả chính sau.

Định lí 3.5.

Cho D là vành chia với tâm vô hạn không đếm được F và có phép đối hợp $\circledast$ và giả sử K là vành chia con của D chứa F. Khi đó, $S=S_D$ đại số phải trên K nếu và chỉ nếu D đại số phải trên K.

Chứng minh. Đặt $L=\{\alpha\in F\mid \alpha^{\circledast}=\alpha\}$. Với $x\in D$, đặt $s=x+x^{\circledast}$ và $p=-xx^{\circledast}$. Hiển nhiên, hai phần tử $s,p\in S$. Với mọi $0\neq\alpha\in L$ thỏa điều kiện $\alpha^2-\alpha s-p\neq 0$, đặt $a_\alpha=\alpha^2-\alpha s-p$. Vì $a_\alpha^{\circledast}=a_\alpha$ nên $a_\alpha\in S$, suy ra a_α đại số phải trên K, nghĩa là tồn tại $c_0,c_1,\dots,c_m\in K$ sao cho $c_0+a_\alpha c_1+\cdots+a_\alpha^m c_m=0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c_0\neq 0$. Khi đó, $c_0=-a_\alpha c_1-a_\alpha^2c_2-\cdots-a_\alpha^m c_m$, suy ra $1=a_\alpha\left[-c_1-c_2a_\alpha-\cdots-c_ma_\alpha^{m-1}\right]c_0^{-1}$. Vì vậy, a_α khả nghịch và $a_\alpha^{-1}=\left[-c_1-c_2a_\alpha-\cdots-c_ma_\alpha^{m-1}\right]c_0^{-1}$. Gọi $V=\langle x_1\dots x_t\mid x_i\in\{s,p\}\rangle_K$ là không gian véc-tơ phải sinh bởi s,p trên K của D. Ta có $a_\alpha^{-1}\in V$. Đặt $A=\begin{pmatrix}0&p\\1&s\end{pmatrix}$. Ta có $A-\alpha I_2=\begin{pmatrix}-\alpha&p\\1&s-\alpha\end{pmatrix}$. Do a_α khả nghịch nên $\left(A-\alpha I_2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}s-\alpha&-p\\-1&-\alpha\end{pmatrix}a_\alpha^{-1}$. Vậy $\left(A-\alpha I_2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}(s-\alpha)a_\alpha^{-1}&-pa_\alpha^{-1}\\-a_\alpha^{-1}&-\alpha a_\alpha^{-1}\end{pmatrix}\in M_2(V)$.

Mặt khác, tập $\{\left(A-\alpha I_2\right)^{-1}\mid\alpha\in L, a_\alpha=\alpha^2-\alpha s-p\neq 0\}$ là một tập không đếm được của $M_2(V)$. Vì $\dim_K M_2(V)=4.\dim_K V<\infty$ nên tồn tại $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sao cho $\{\left(A-\alpha_1I_2\right)^{-1},\left(A-\alpha_2I_2\right)^{-1},\dots,\left(A-\alpha_nI_2\right)^{-1}\}$ phụ thuộc tuyến tính phải trên I_2K. Theo Bổ đề 3.1, do tập nêu trên là phụ thuộc tuyến tính phải nên A đại số phải trên I_2K. Theo Bổ đề 3.2 dẫn đến x đại số phải trên K.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Jacobson, *Structure of rings*. American Mathematical Soc., 1964.

[2] C. Faith, "Algebraic division ring extensions," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, pp.43-53, 1960.

[3] I. N. Herstein, C. Procesi and M. Schacher, "Algebraic valued functions on noncommutative rings," *J. Algebra*, 36, pp.128-150, 1975.

[4] M. Aaghabali, S. Akbari and M. H. Bien, "Division Algebras with Left Algebraic Commutators," *Algebr. Represent. Theor.* 21, pp.807-816, 2018.

[5] J. P. Bell, V. Drensky, and Y. Sharifi, "Shirshov's theorem and division rings that are left algebraic over a subfield," *J. Pure Appl. Algebra*, 217, pp.1605-1610, 2013.

[6] J. P. Bell, and D. Rogalski, "Free subalgebras of division algebras over uncountable fields," *Math. Z.*, 227, pp.591-609, 2014.

[7] T. T. Deo, M. H. Bien and B. X. Hai, "On weakly locally finite division rings," *Acta. Math. Vietnam.*, accepted, 2018.

[8] S. Montgomery, "Algebraic algebra with involution," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31, pp.368-372, 1972.

[9] P. M. Cohn, *Skew fields*. Cambridge University Press, 1995.

[10] P. M. Cohn, "Quadratic extensions of skew field," *Proc. London Math. Soc.*, 11, pp.531-56, 1961.

[11] T.Y. Lam, "A first course in noncommutative rings," in: *Grad. Texts in Math.*, 131, Springer-Vetlag, Berlin, 1991.