TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 16, Số 11 (2019): 731-744

Vol. 16, No. 11 (2019): 731-744

ISSN:
1859-3100

Website: http://journal.hcmue.edu.vn

Bài báo nghiên cứu

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN VỀ KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Nguyễn Ái Quốc

Trường Đại học Sài Gòn

Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Ngày nhận bài: 25-5-2019; ngày nhận bài sửa: 04-6-2019; ngày duyệt đăng: 27-9-2019

TÓM TẮT

Tích phân suy rộng là sự khái quát hóa tích phân xác định trên một miền không giới hạn hay hàm số dưới dấu tích phân có một gián đoạn vô cực trong miền lấy tích phân. Tích phân suy rộng không thể tính bằng cách sử dụng tích phân Riemann thông thường. Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận lịch sử về sự phát triển và hình thành khái niệm tích phân suy rộng, từ đó xác định các đặc trưng tri thức luận của tích phân suy rộng và một số chướng ngại đối với sinh viên khi nghiên cứu về tri thức này.

Từ khóa: phân tích tri thức luận; đặc trưng khoa học luận; tích phân suy rộng; giới hạn; chướng ngại

1. Đặt vấn đề

1.1. Sự cần thiết nghiên cứu khái niệm tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng được ứng dụng nhiều trong nhiều lĩnh vực như toán học, vật lí và kinh tế.

Trong vật lí, tích phân suy rộng được áp dụng để nghiên cứu điện thế, trọng lực, hay động năng. Chẳng hạn, công cần thiết để nâng một vật có khối lượng *m* kg từ bề mặt Trái Đất lên khoảng cách vô cùng được tính bởi công thức: $W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{k}{r^2} dr$, trong đó r_0 là bán kính Trái Đất và $k = 9{,}8 m {r_0}^2$.

Trong kinh tế, tích phân suy rộng được áp dụng để tính giá trị tư bản của một dòng thu nhập liên tục: Giá trị Tư bản = $\int_0^{\infty} f(t) e^{-rt} dt$, trong đó $f(t)$ là lưu lượng dòng thu nhập hàng năm tại thời điểm *t*, và *r* là lãi suất kép liên tục hàng năm.

Trong toán học, tích phân suy rộng được áp dụng trong Xác suất và Thống kê, Chuẩn hàm, Giải phương trình vi phân, Biến đổi Fourier, Biến đổi Laplace, các hàm số đặc biệt như Beta và Gamma.

Sự xuất hiện của tích phân suy rộng trong nhiều lĩnh vực khoa học nói trên mang đến nhiều trở ngại cho sinh viên (SV) đại học.

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc (2019). An epistemological analysis of the concept of improper integral. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 16*(11), 731-744.

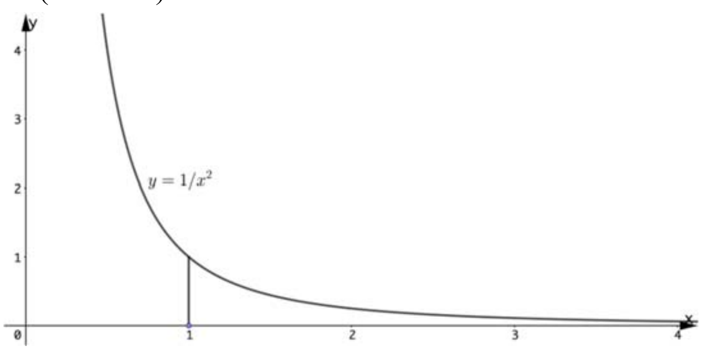
1.2. Tồn tại các khó khăn của sinh viên khi tiếp cận khái niệm tích phân suy rộng

Tháng 4/2019 một thực nghiệm khảo sát được thực hiện trên 31 SV Trường Đại học Sài Gòn và Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh về khái niệm tích phân suy rộng. Các sinh viên này đã kết thúc học phần Giải tích hàm một biến bao gồm phần Tích phân suy rộng trong học kì I từ tháng 9 đến tháng 12. Nội dung thực nghiệm bao gồm một câu hỏi và một bài tập liên quan đến Tích phân suy rộng:

Câu 1. Anh/chị hãy cho biết trong các tích phân sau, tích phân nào là tích phân suy rộng, vì sao?

a/ $I = \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx$ b/ $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ c/ $K = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$.

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1/x^2$, đường thẳng $x = 1$ và trục hoành (với $x \geq 1$).



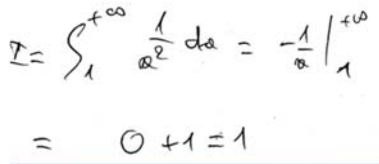
Mục tiêu của Câu hỏi 1 là nhằm tìm hiểu xem sinh viên có nhận dạng được Tích phân suy rộng hay không. Câu trả lời đúng là *I*, *J* và *K* là ba tích phân suy rộng, trong đó *I* thuộc loại 2, *J* và *K* thuộc loại 1.

Mục tiêu của Câu 2 là nhằm kiểm tra xem sinh viên có thể vận dụng định nghĩa tích phân suy rộng để tính diện tích của miền phẳng được chỉ ra.

Kết quả thực nghiệm có 13/31 sinh viên chọn trả lời "Có" cho câu hỏi 1a, trong đó có hai sinh viên giải thích sai bằng cách đưa ra nguyên hàm của $x/(x\text{-}1)$ là $x + ln|x - 1|$ mà không quan tâm đến sự không liên tục của hàm số tại điểm biên của miền lấy tích phân. Có 18/31 sinh viên chọn trả lời "Không", trong đó 7 giải thích rằng tích phân suy rộng chỉ chứa cận hữu hạn và không chứa cận vô cực.

Đối với Câu 1*b* và 1*c*, mỗi câu đều có tất cả 31 sinh viên chọn câu trả lời "Có", trong đó có 20 giải thích đúng và 4 giải thích không đúng vì cho rằng tích phân có dạng "vô định", hay *K* là tích phân suy rộng loại 2. Cuối cùng có 7 trả lời nhưng không giải thích.

Đối với Câu 2, có 21/31 sinh viên đã sử dụng tích phân suy rộng để tính diện tích miền phẳng, trong đó có 14 trả lời chính xác và 7 sinh viên đã xem cận vô cực như một cận hữu hạn của tích phân xác định khi tính tính phân (Hình 1). Còn lại 10 sinh viên trả lời không thể tính được diện tích hình phẳng vì miền phẳng kéo dài vô hạn.



Hình 1. *Cận vô cực như cận hữu hạn*

Kết quả thực nghiệm cho thấy tồn tại quan niệm ở sinh viên về tích phân suy rộng là tích phân xác định phải có cận là vô cực mà không quan tâm đến tích phân có miền lấy tích phân chứa điểm tại đó hàm số không liên tục. Một số sinh viên bị ảnh hưởng bởi cận hữu hạn của tích phân xác định trong việc tính tích phân suy rộng. Đặc biệt, có một số sinh viên bị ảnh hưởng bởi yếu tố phản trực quan là một miền không giới hạn không thể có diện tích hữu hạn.

1.3. Sự cần thiết của phân tích tri thức luận

Việc xác định các loại sai lầm của sinh viên trong học Toán và nguồn gốc của chúng luôn là nhiệm vụ đầu tiên đặt ra đối với các nhà nghiên cứu Didactic Toán trước khi đưa ra các giải pháp để giúp sinh viên loại bỏ các sai lầm đó. Theo Brousseau (1983, p.171):

- Nghĩa của tri thức, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết;
- Những quan niệm có thể gắn liền với tri thức.

2. Khái niệm tích phân suy rộng

Theo James Steward (2016), Định nghĩa tích phân suy rộng loại 1:

(a) Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại và với mọi $t \geq a$, thì $\int_a^\infty f(x)dx = lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ nếu giới hạn này tồn tại (là một số hữu hạn).

(b) $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại và với mọi $t \leq b$, thì $\int_{-\infty}^b f(x)dx = lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ nếu giới hạn này tồn tại (là một số hữu hạn).

Tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu các giới hạn tương ứng tồn tại và phân kì nếu các giới hạn không tồn tại.

(c) Nếu cả hai $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ hội tụ, thì ta định nghĩa $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$." (p.568)

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 2:

(a) Nếu f liên tục trên [*a*, *b*) và không liên tục tại *b*, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

nếu giới hạn này tồn tại (là một số hữu hạn).

(b) Nếu f liên tục trên (*a*, *b*] và không liên tục tại *a*, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

nếu giới hạn này tồn tại (là một số hữu hạn).

Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu giới hạn tương ứng tồn tại và phân kì nếu giới hạn không tồn tại.

(c) Nếu f không liên tục tại *c*, trong đó $a < c < b$, và cả hai $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ hội tụ, thì ta định nghĩa

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$." (p. 571)

3. Phân tích tri thức luận lịch sử khái niệm tích phân suy rộng

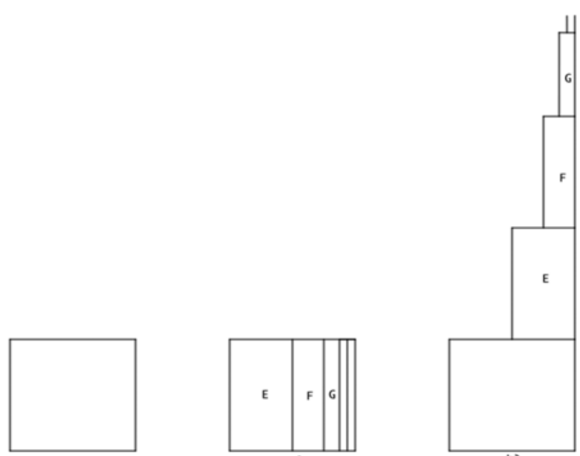
3.1. Sự ra đời khái niệm tích phân suy rộng

- *Các hình thể không giới hạn của Oresme*

Khái niệm tích phân suy rộng, mặc dù chưa có tên chính thức, hình thành đầu tiên trong tác phẩm "Tractatus de configuationibus qualitatum et motuum" (1353) (Chuyên luận về hình thể của đại lượng và chuyển động), của Nicole Oreme (1323-1382). Ông là một triết gia kinh viện, nhà thiên văn học, nhà toán học, vật lí gia và giảng dạy tại Đại học Paris khi trường này vừa thành lập.

Trong chương III của tác phẩm nói trên, về cơ bản ông định nghĩa tích phân Riemann và đánh giá tích phân của một số hàm số bao gồm tích phân suy rộng có đồ thị tiến đến vô cùng hay miền lấy tích phân kéo dài đến vô cùng. Kết quả quan trọng nhất của ông về tích phân là diện tích miền nằm dưới đồ thị tuyến tính bằng tích của chiều dài đáy với chiều cao của đồ thị tại trung điểm của đáy. Cũng trong chương III, ông trình bày một kết quả quan trọng khác là phần mặt phẳng không bị chặn có diện tích hữu hạn.

Ông xét hai hình vuông có cạnh bằng 1 feet, do đó có tổng diện tích là 2 feet vuông. Sau đó, chọn hình vuông thứ hai và thực hiện phép chia hình vuông đó theo cạnh nằm ngang của nó theo cách như sau:



Hình 2. *Hình kéo dài vô hạn của Oresme*

Chia đôi cạnh, rồi chia đôi nửa cạnh nằm bên phải, rồi chia đôi một phần tư cạnh nằm bên phải, và tiếp tục phép chia vô hạn lần. (Hình 2*a*)

Luận chứng của Oresme tiếp tục bằng sự sắp xếp lại các phần của hình vuông mà không làm thay đổi tổng diện tích của hai hình vuông ban đầu: Đặt nửa hình vuông thứ hai (phần *E*) lên đầu hình vuông thứ nhất về phía bên phải; đặt tiếp theo một phần tư hình vuông thứ hai (phần *F*) lên đầu của *E* về phía bên phải; rồi đặt một phần tám hình vuông thứ hai (phần *G*) lên đầu *F* về phía bên phải; và tiếp tục như thế (Hình 2*b*). Ta sẽ nhận được một hình phẳng cao vô hạn, nhưng tổng diện tích 2 feet không thay đổi.

- *Lập thể dài vô hạn của Torricelli*

Các kết quả của Oresme đều được xem xét trong không gian 2D. Kết quả đầu tiên xét trong không gian 3D là cái mà ngày nay gọi là tích phân suy rộng hội tụ do Evangelista Torricelli (1608-1647), nhà toán học người Ý, khám phá vào khoảng năm 1643. Kết quả này được gọi là Còi của Gabriel (Gabriel's Trumpet)[1] và được trình bày trong bài báo "De Solido Hyperbolico Acuto" (Khối Hyperbolic nhọn).

Năm 1642, Torricelli tuyên bố rằng một lập thể có chiều dài vô hạn có thể có một thể tích hữu hạn (Mancosu, 1996, p.130). Trong thuật ngữ hiện đại, nếu quay một đoạn của đồ thị hàm số $y = 1/x$ xung quanh trục *Ox* và cắt lập thể thu được với mặt phẳng song song với trục *Oy*, người ta thu được lập thể có chiều dài vô hạn nhưng có thể tích hữu hạn. Torricelli chứng minh điều này bằng hai cách: Trước tiên sử dụng *phương pháp không chia tách được*[2] (*method of Indivisibles*), và sau đó bằng *phương pháp vét cạn*[3] (*method of exhaustion*).

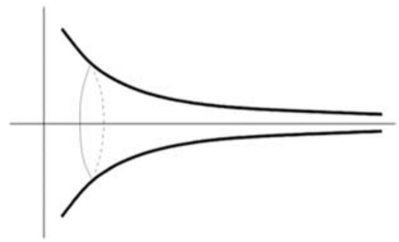
[1] Tên này đề cập đến truyền thống để chỉ Tổng lãnh thiên thần Gabriel là thiên thần thổi còi để tuyên bố Ngày phán xét, liên kết thiêng liêng, hoặc vô hạn, với sự hữu hạn.

[2] Trong Hình học, *phương pháp không thể chia tách được*, hay còn gọi là *nguyên lí Cavalier*, là một phương pháp tính diện tích và thể tích. Nguyên lí Cavalier được phát biểu như sau:

> "Nếu hai hình phẳng (hay khối lập thể) có cùng chiều cao, và nếu các thiết diện tạo bởi các đường thẳng (hay mặt phẳng) song song với các đáy và có cùng khoảng cách đến các đáy luôn có cùng tỉ số, thì các hình phẳng (hay khối lập thể) cũng có cùng tỉ số này." (Boyer, 1968, p.362)

Phương pháp "không thể chia tách được" bắt nguồn từ thời Cổ đại. Nhà khoa học Hi Lạp Democritus (khoảng 460-380 B.C.) dường như coi lập thể là "tổng" của một số lượng lớn các nguyên tử "không thể chia cắt" cực kì nhỏ; Archimedes (287-212 trước Công nguyên) tìm thấy diện tích và thể tích của nhiều hình bằng cách kết hợp các nguyên tắc của lí thuyết về đòn bẩy của ông với ý tưởng rằng một hình phẳng bao gồm vô số các đoạn thẳng song song và một hình hình học bao gồm vô số nhiều mặt cắt phẳng song song. Tuy nhiên, trong thời đại của họ, những ý tưởng và phương pháp như vậy đã bị phê phán nghiêm trọng. Ví dụ, Archimedes cho rằng cần phải cung cấp một bằng chứng thứ hai của các kết quả thu được bằng phương pháp "không thể chia tách được", dựa trên phương pháp vét cạn. Những ý tưởng của phương pháp "không thể chia tách được" đã được hồi sinh trong nghiên cứu toán học vào đầu thế kỉ XVI đến thế kỉ XVII của J. Kepler và đặc biệt là B. Cavalieri, mà phương pháp này thường được liên kết với tên ông nhiều nhất. Phiên bản phương pháp của Cavalieri sau đó đã được chuyển đổi đáng kể và phục vụ như một giai đoạn trong việc tạo ra phép tính tích phân. (Katz, 2009)

[3] Trong Toán học, phương pháp vét cạn là kĩ thuật được phát minh bởi người Hi Lạp cổ để chứng minh các mệnh đề liên quan đến diện tích và thể tích của các hình hình học. Mặc dù là tiền thân của phép tính tích phân, phương pháp vét cạn không sử dụng giới hạn cũng như luận chứng về các đại lượng vô cùng bé. Thay vào đó,



Hình 3. *Còi Gabriel*

Lập thể thu được gọi là “lập thể dài vô hạn của Torricelli” (Hình 3). Các kĩ thuật nền tảng cho sự xác định “lập thể dài vô hạn của Torricelli” được cung cấp bởi *phương pháp không thể chia tách được* của nhà toán học người Ý Evangelista Cavalieri (1598-1647) từ những năm 1630 (Mancosu, 1996, p.131). Tuy nhiên, điểm khác biệt là Torricelli sử dụng các đường cong không chia tách được trên các lập thể có chiều dài vô hạn. Trong (Mancosu, 1996, p.131), do tính chất phản trực quan, khối tròn xoay của Torricelli đã có một tác động lớn đến cộng đồng khoa học thế kỉ XVII. Tại Anh, nhà toán học John Wallis (1616-1703) và nhà triết học Thomas Hobbes (1588-1679) đã tham gia vào một cuộc tranh cãi kéo dài xung quanh một số chủ đề toán học, trong đó có khối tròn xoay của Torricelli.

Hobbes đã từ chối sự tồn tại của các vật thể vô hạn, chẳng hạn “lập thể dài vô hạn của Torricelli”, vì “… chúng ta chỉ có thể biết về những gì chúng ta cảm nhận được hoặc về những gì chúng ta có thể tạo ra từ những ý tưởng mà mình cảm nhận” (Mancosu, 1996, p. 145146). Ông nhấn mạnh rằng mọi vật thể đều phải tồn tại trong vũ trụ và được nhận thức bởi ánh sáng tự nhiên”. Mancosu (1996) chỉ ra rằng nhiều nhà triết học thế kỉ XVII cho rằng Hình học cung cấp cho chúng ta kiến thức không thể chối cãi và tất cả các kiến thức đều liên quan đến một tập hợp các sự thật hiển nhiên được biết đến bởi “ánh sáng tự nhiên” (Mancosu, 1996, p.137-138).

Hobbes nhấn mạnh rằng, khi các nhà toán học nói về “một đường dài vô hạn”, thì điều này sẽ được hiểu là một đường có thể được mở rộng nhiều như người ta mong muốn. Ông lập luận rằng các vật thể vô hạn không có cơ sở vật chất và do đó không thể cảm nhận được bằng “ánh sáng tự nhiên”. Theo Hobbes, không thể nói về một “đường dài vô hạn” như một

đây là một quy trình logic chặt chẽ, dựa trên tiên đề rằng một đại lượng cho trước có thể được tạo ra nhỏ hơn một đại lượng cho trước khác bằng cách giảm nó đi một nửa liên tiếp (một số lần hữu hạn). Phương pháp vét cạn tính diện tích của một hình bằng cách nội tiếp bên trong nó một dãy đa giác có diện tích hội tụ về diện tích của hình ban đầu. Nếu dãy đa giác được dựng chính xác thì hiệu diện tích giữa đa giác *n* cạnh và hình ban đầu sẽ nhỏ tùy ý khi *n* trở nên lớn. Khi hiệu diện tích nhỏ tùy ý, các giá trị có thể cho diện tích của hình “được vét cạn” một cách có hệ thống bởi các diện tích bị chặn dưới được thiết lập liên tiếp bởi các số hạng của dãy. Ý tưởng của phương pháp vét cạn nảy sinh vào cuối thế kỉ thứ V trước Công nguyên do Antiphon đưa ra mặc dù ông không hiểu rõ hoàn toàn về nó. Lí thuyết này được Eudoxus của xứ Cnidus thực hiện nghiêm ngặt một vài thế kỉ sau khi ông tính diện tích và thể tích. Phương pháp vét cạn lại được phát minh tại Trung Quốc vào thế kỉ thứ 3 bởi Liu Hiu để tính diện tích một hình tròn. Thuật ngữ Phương pháp vét cạn được Gregory của vùng Saint Vincent đưa ra đầu tiên trong tác phẩm Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum. (Katz, 2009) thứ gì đó được cho trước. Điều tương tự cũng có giá trị đối với các lập thể có chiều dài vô hạn nhưng với thể tích hữu hạn.

Trong khi đó, đối với Wallis, "lập thể dài vô hạn của Torricelli" không phải là vấn đề miễn là nó được coi là một đối tượng toán học. Ông trả lời cho Hobbes:

> Một bề mặt, hay một lập thể, có thể giả sử được cấu tạo dài vô hạn, nhưng lớn hữu hạn… và không có trọng tâm. Chẳng hạn như khối hyperbolic nhọn của Torricelli; và vô số những thứ khác, được Tiến sĩ Wallis, Ngài Fermat, và nhiều người khác khám phá. Nhưng để xác định điều này cần nhiều Hình học và Logic hơn mà ngài Hobbes không có"
>
> (Mancosu, 1996, p. 146)

Không đồng ý với Wallis, Hobbes trả lời:

> Tôi không nhớ điều này của Torricelli, và tôi nghĩ Tiến sĩ Wallis sai và ngài Fermat cũng vậy. Bởi vì, để hiểu được điều này, một người không cần thiết phải là một nhà hình học hay là một nhà logic, nhưng người đó phải bị điên." (Mancosu, 1996, p.146-147)

Theo Mancosu, Wallis đồng ý với quan điểm của Leibniz rằng khi nói về "lập thể dài vô hạn của Torricelli" thì không có gì ngoạn mục hơn là chuỗi vô hạn $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$ bằng 1.

Nếu phương pháp mới dẫn đến kết quả là các lập thể vô hạn có thể có thể tích hữu hạn, thì những lập thể này tồn tại trong một bối cảnh toán học. Khác với Hobbes, có vẻ như Wallis (và Leibniz) đã tạo ra sự khác biệt giữa các đối tượng toán học và "các đối tượng khác". Có lẽ người ta cũng có thể nói rằng Wallis và Leibniz đã khái quát hóa khái niệm thể tích không chỉ là phép đo trên các lập thể hữu hạn, mà còn là phép đo trên các lập thể có chiều dài vô hạn.

Một vấn đề tương tự (nhưng hiện đại hơn) là chỉ ra rằng số phần tử trong tập hợp tất cả các số tự nhiên, xét về mặt số lượng, bằng số phần tử trong tập hợp tất cả các số chẵn dương. Điều này được thực hiện bằng cách chỉ ra rằng tồn tại một sự tương ứng một – một giữa các phần tử của hai tập hợp $\{0,1,2,3,\ldots\}$ và $\{2,4,6,8,\ldots\}$.

Trong trường hợp này, khái niệm về "số" được khái quát hóa. Nó tương đối dễ dàng để xác định xem số lượng phần tử trong hai tập hữu hạn có bằng nhau hay không. Người ta chỉ đơn giản là phải đếm các phần tử trong hai tập tương ứng. Nó cũng tương đối dễ dàng để thiết lập một sự tương ứng một – một giữa các phần tử trong trường hợp đó.

Tuy nhiên, để xác định xem các phần tử trong hai tập hợp vô hạn có bằng nhau là điều không dễ dàng. Trong trường hợp như vậy, người ta phải sử dụng một phương pháp nào đó để thiết lập sự tương ứng một – một giữa các phần tử trong hai tập hợp.

Điều quan trọng cần lưu ý rằng "lập thể dài vô hạn của Torricelli" cũng như ví dụ so sánh số lượng các phần tử trong hai tập hợp vô hạn trái ngược với "tình huống hàng ngày" bởi vì chúng ta nhận được "các nghịch lí".

Trong ví dụ sau cùng, tập hợp các số chẵn dương chứa trong tập hợp các số tự nhiên (mặc dù các tập hợp này có cùng số lượng) và trong ví dụ trước, chúng ta thu được một lập thể có thể tích hữu hạn nhưng có chiều dài vô hạn.

- *Phép cầu phương của Fermat trên hyperbol và parabol bậc cao*

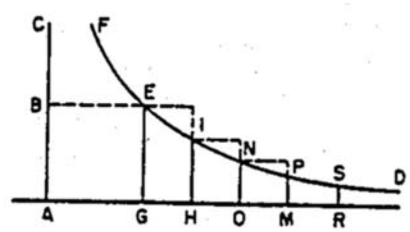
Torricelli cũng đã chứng tỏ rằng diện tích miền nằm dưới một đường cong $y = x^n$ nằm giữa $x = a$ và $x = b$ bằng $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ với mọi số tự nhiên n. Pierre Fermat (1601-1665) đã chứng minh rằng hệ thức này cũng đúng với mọi số hữu tỉ khác -1.

Lời giải của Fermat cho bài toán cầu phương vừa tận dụng vừa mở rộng các nỗ lực trước đó của Archimedes, Cavalieri, Kepler, Oresme, và Wallis. Những đóng góp độc đáo của ông là người đầu tiên thực hiện phép cầu phương của các hình phi tuyến tính trên một miền vô hạn và được xem là sự hình thành đầu tiên của khái niệm tích phân suy rộng.

Fermat nhận xét rằng Archimedes chỉ sử dụng cấp số nhân cho phép cầu phương của parabol, và khi so sánh các đại lượng không đồng nhất, ông tự giới hạn mình với cấp số cộng. Fermat đặt vấn đề có phải vì Archimedes thấy rằng cấp số nhân không phù hợp cho phép cầu phương? Có phải bởi vì kĩ thuật đặc biệt mà Archimedes đã sử dụng để thực hiện phép cầu phương cho parabola đầu tiên với cấp số nhân rất khó áp dụng cho các đường khác?

Fermat nhận ra rằng cấp số nhân khá hiệu quả cho phép cầu phương cho cả parabol và hyperbol bằng một phương pháp hoàn toàn giống nhau và ông muốn truyền đạt phát minh này cho cộng đồng các nhà hình học hiện đại.

Fermat bắt đầu bằng cách xem xét hyperbol tổng quát *DSEF* (Hình 4) giới hạn bởi các tiệm cận *AR* và *AC* và hình như sau:



Hình 4. *Phép cầu phương của Hyperbol*

Sau khi chọn các điểm *G*, *H*, *O*… trên trục *Ox*, Fermat dựng các đường thẳng theo thứ tự *EG*, *IH*, *NO*… song song với tiệm cận AC, tất cả được thực hiện theo hai tiêu chí:

+ Các đoạn thẳng *AG*, *AH*, *AO*... tạo thành một cấp số nhân tăng vô hạn sao cho $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \cdots$.

+ Các đoạn thẳng *AG*, *AH*, *AO*... là "đủ gần với nhau" sao cho các hình chữ nhật bị giới hạn được xấp xỉ với hình thang, tức là hình chữ nhật đường chéo *EH* xấp xỉ hình thang *EGHI*.

Đường cong hyperbol được xác định bởi hệ thức tỉ lệ $\frac{AH^n}{AG^n} = \frac{EG^m}{HI^m}$, mà trong kí hiệu hiện đại là $x^n y^m = k$. Trong phần tiếp theo, Fermat xem xét tỉ lệ cụ thể $\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG^1}{HI^1}$, biểu thị phương trình $y = \frac{k}{x^2}$. Mục đích của Fermat là xác định diện tích của miền vô hạn *DEGR*.

Ông xét cấp số nhân giảm có các số hạng lần lượt là *AG*, *AH*, *AO*… và giả sử rằng các số hạng này đủ gần nhau sao cho có thể đánh đồng (ad-equate) chúng theo phương pháp của Archimedes, hay đánh đồng bằng cách xấp xỉ hình bình hành *GE*×*GH* với tứ giác cong *GHIE*. Ông cũng giả sử thêm rằng các khoảng đầu tiên *GH*, *HO*, *OM*… của các số hạng cấp số bằng nhau để dễ dàng sử dụng phương pháp vét cạn của Archimedes làm nhỏ đến mức không thể bằng phương pháp hình chữ nhật ngoại tiếp và nội tiếp[4]. Ông thiết lập một số tỉ lệ:

$\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \cdots$, $\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{AO}{AG}$, và tập trung vào tỉ số diện tích của hai hình chữ nhật đầu tiên và chứng tỏ rằng: $\frac{EG\times GH}{HI\times HO} = \frac{AO}{AH}$.

Bằng cách xác định mối quan hệ tỉ lệ cho các đoạn thẳng *AG*, *AH* và *AO* là $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO}$, từ đó suy ra: $\frac{EG\times GH}{HI\times HO} = \frac{AO}{AH} = \frac{AH}{AG}$. Sau đó, Fermat lưu ý rằng ông có thể chứng minh tương tự rằng $\frac{HI\times HO}{NO\times MO} = \frac{AO}{AH} = \frac{AH}{AG}$, từ đó suy ra rằng: "nhiều vô hạn hình chữ nhật *EG*×*GH*, *HI*×*HO*, *NO*×*OM*... sẽ tạo thành một cấp số nhân, mà tỉ số của chúng bằng *AH*/*AG*.

Ở giai đoạn này trong chứng minh, Fermat tạo ra hai "bước nhảy" lớn:

Thứ nhất, ông sử dụng một tính chất nổi tiếng của cấp số nhân, Mệnh đề 35 của Euclid (Quyển IX) trong tác phẩm "Cơ sở", cụ thể là định lí sau: *Cho một cấp số nhân có các số hạng giảm vô hạn, tỉ số giữa hiệu của hai số hạng liên tiếp của cấp số này với số nhỏ nhất trong hai số đó bằng tỉ số của số lớn nhất trong tất cả các số hạng của cấp số với tổng tất cả các số khác đến vô cùng*.

Ví dụ: Tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ ngoại trừ 3 là $1\frac{1}{2}$. Tỉ số của 3 với $1\frac{1}{2}$ bằng tỉ số của 2 với 1. Tương tự, đối với hai số hạng liên tiếp $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{9}$, thì hiệu của chúng là $\frac{2}{9}$, có tỉ số với số nhỏ hơn $\frac{1}{9}$ cũng bằng tỉ số của 2 với 1.

Thứ hai, ông sử dụng phương pháp "đánh đồng" được Archimedes và Diophantus phát triển, theo đó người ta có thể "đánh đồng" một số và sự xấp xỉ của nó qua một tiến trình giới hạn.

Theo mệnh đề của Euclid, Fermat lập luận rằng tỉ số *GH* (tức là hiệu của hai số hạng đầu tiên *AG* và *AH*) với số hạng nhỏ hơn *AG* bằng tỉ số của *GE* × *GH* (hình chữ nhật đầu tiên) so với tổng của tất cả các hình chữ nhật khác "với số lượng vô hạn". Sử dụng sự đánh đồng và nhận xét rằng chiều rộng của hình chữ nhật là rất nhỏ, Fermat kết luận rằng " tổng là hình vô hạn bị giới hạn bởi *HI*, tiệm cận *HR*, và đường cong được mở rộng vô hạn *IND*.

[4] Để tính diện tích miền dưới một đường cong, ta làm xấp xỉ bằng cách sử dụng hình chữ nhật nội tiếp trong đường cong và ngoại tiếp trên đường cong. Tổng diện tích các hình chữ nhật nội tiếp là tổng dưới, và tổng các hình chữ nhật ngoại tiếp là tổng trên. Bằng cách lấy nhiều hình chữ nhật hơn, ta sẽ có xấp xỉ tốt hơn. Trong giới hạn, khi số hình chữ nhật tăng đến cô cùng thì các tổng trên và tổng dưới hội tụ về cùng một giá trị mà chính là diện tích của miền nằm dưới đường cong. (Katz, 2009)

Đó là $\frac{GH}{AG} = \frac{GE \times GH}{dt(DIHR)}$. Sau đó, Fernmat sử dụng tỉ lệ này để chứng minh rằng diện tích hình chữ nhật (*AG*×*EG*) bằng diện tích miền *DIHR*.

Fermat kết thúc chứng minh của ông với dòng chữ sau: Do đó hình chữ nhật *GE*×*GH* bằng với hình đã nêu ở trên; nếu chúng ta thêm hình chữ nhật *EG*×*GH* vào hai bên, bằng cách tuân theo các phép chia liên tục vô thời hạn, thì nó sẽ biến mất và sẽ giảm đến không, thì chúng ta đi đến sự thật này mà sẽ được dễ dàng khẳng định bằng một chứng minh dài hơn, được thực hiện theo phong cách của Archimedes: trong loại hyperbol này, hình bình hành *AE* tương đương với hình được giới hạn bởi đáy *GE*, tiệm cận *GR* và đường cong *ED* kéo dài vô tận.

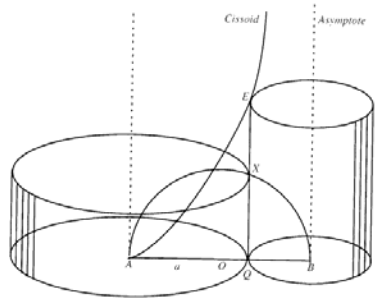
- *Đường Cissoid[5] của René Francois de Sluse và Christiaan Huygens*

Sluse và Huygens bắt đầu nghiên cứu đường cissoid trong bài giảng từ năm 1658. Sluse (1622-1685), người Bỉ, là nhà toán học và giáo sĩ của Liège và Christiaan Huygens (1629-1695), người Hà Lan, là nhà toán học, thiên văn học và vật lí học.

Nền tảng nghiên cứu đường cissoid gồm hai phần. Trong phần thứ nhất, nó phù hợp trong một chương trình rộng lớn hơn có mục tiêu rút ra phép cầu phương của đường tròn từ phép cầu phương của các đường cong liên quan đến đường tròn, và đường cissoid là một trong những đường cong như thế. Trong phần thứ hai, Sluse và Huygens cũng như các đồng nghiệp, đã khá bối rối trước khám phá "Tích phân suy rộng" của Torricelli. Sluse và Huygens cố gắng tìm kiếm một kết quả tương tự cho các đường cong khác có chiều dài vô hạn, và đường cissoid là một ứng cử viên.

Trong bức thư gửi cho Huygens ngày 14 tháng 3 năm 1568 (Huygens, 1889, p.150-152), Sluse đã trình bày việc tính thể tích lập thể vô hạn sinh ra khi quay cissoid xung quanh tiệm cận của nó bằng cách chứng minh rằng thể tích của nó là hữu hạn. Chứng minh của ông sử dụng vỏ hình trụ như không thể chia tách được (Hình 5) dựa trên tính chất thứ hai của cissoid: $EQ: AQ = AQ: XQ = XQ: BQ$. Bằng cách nhân chéo các phần tử bên ngoài, thu được: $EQ \times BQ = AQ \times XQ$ và $2\pi \times BQ \times EQ = 2\pi \times AQ \times XQ$ hay diện tích bề mặt hình trụ bên trái = diện tích bề mặt hình trụ bên phải. Hơn nữa, các vỏ hình trụ có cùng khoảng cách đến tiệm cận. Vì thế thể tích lập thể tròn xoay của cissoid quanh tiệm cận của nó bằng thể tích lập thể tròn xoay khi xoay nửa đường tròn xung quanh tiếp tuyến với nó tại điểm A. Thể tích của lập thể tròn xoay trông giống một quả táo, được Kepler tính toán trong tác phẩm *New solid geometry of wine barrels* (Hình học lập thể mới của các thùng rượu).

[5] Trong hình học, đường cissoid của Diocles là một đường cong phẳng đáng lưu ý bởi tính chất là nó có thể được sử dụng để dựng hai tỉ lệ trung bình cho một tỉ lệ cho trước. Đặc biệt, nó có thể được sử dụng để gấp đôi một khối lập phương (một trong ba bài toán lớn của Hi Lạp cổ đại). Nó có thể được định nghĩa là đường cissoid của một đường tròn và một đường thẳng tiếp tuyến với nó so với một điểm của đường tròn đối tâm với tiếp điểm. Từ "cissoid" xuất phát từ tiếng Hi Lạp "κισσοειδής kissoeidēs" (hình cây Thường xuân) từ κισσός kissos (cây thường xuân) và -οειδής -oeidēs (có sự giống nhau của). Đường cong được đặt tên theo Diocles, người nghiên cứu nó ở thế kỉ thứ hai trước Công nguyên. (Katz, 2009)



Hình 5. *Đường cissoid của Sluse và Huygens (Jahnke, 2016)*

3.2. Các quan niệm về sự hình thành tích phân suy rộng

Kết quả phân tích lịch sử hình thành Tích phân suy rộng cho thấy quá trình hình thành tri thức này chịu ảnh hưởng của các quan niệm sau:

- Quan niệm *hình học*: Tích phân suy rộng gắn liền với việc xem xét diện tích của một miền 2D không giới hạn hay thể tích của một lập thể dài vô hạn với các phương pháp hình học: phương pháp vét cạn, phương pháp không thể chia tách được, phương pháp cầu phương, phương pháp đánh đồng.
- Quan niệm *đại số*: Tích phân suy rộng gắn liền với việc sử dụng cấp số nhân trong phép cầu phương của Fermat.
- Quan niệm *xấp xỉ*: được thể hiện trong phương pháp đánh đồng của Archimedes và Diophantus.

3.3. Các đặc trưng tri thức luận của khái niệm tích phân suy rộng

Từ việc phân tích quá trình lịch sử hình thành khái niệm tích phân suy rộng dựa trên các tài liệu tham khảo: Babb (2005), Mancosu (1996); Paradís, Pla, & Viader (2004); Katz (2009), Jahnke (2016), rút ra được các đặc trưng tri thức luận của khái niệm tích phân suy rộng như sau:

- Đặc trưng *hữu hạn, vô hạn*: Một hình phẳng không bị giới hạn có diện tích hữu hạn, một vật thể hình học có chiều dài vô hạn có thể tích hữu hạn.
- Đặc trưng *giới hạn*: Rút ra từ định nghĩa Tích phân suy rộng là kết quả giới hạn tại vô cực của một "tích phân xác định" khi một cận tiến đến vô cùng, hay giới hạn một bên của một "tích phân xác định" tại điểm mà hàm số dưới dấu tích phân không xác định.
- Đặc trưng *không bị giới hạn*: Tích phân suy rộng gắn liền với các hình không bị giới hạn.
- Đặc trưng *diện tích và thể tích*: Khái niệm tích phân suy rộng khởi nguồn từ việc xem xét diện tích các hình phẳng và thể tích một lập thể tròn xoay.
- Đặc trưng *chuỗi vô hạn*: Lập thể dài vô hạn của Torricelli gắn liền với sự hội tụ của chuỗi vô hạn theo quan điểm của Wallis và Leibniz.
- Đặc trưng *tiền toán học*: Khái niệm tích phân suy rộng được nghiên cứu nhưng không có tên trong các nghiên cứu của Oreme, Torricelli và Fermat.

- Đặc trưng *đa tiếp cận*: Tiếp cận qua việc tính diện tích miền dưới đường tuyến tính, đường phi tuyến tính; qua tính thể tích lập thể tròn xoay sinh ra khi quay một đường hyperbol, cissoid xung quanh tiệm cận của chúng.

3.4. Chướng ngại tri thức luận được nhận dạng

Những tranh cãi trong lịch sử về một số đối tượng hình học không bị giới hạn cho thấy người học khó có thể hiểu được các đối tượng này. Vì thế, sinh viên học Giải tích có thể sẽ gặp khó khăn để tưởng tượng và chấp nhận những đối tượng hình học này.

Từ kết quả phân tích lịch sử hình thành tích phân suy rộng, chúng tôi xác định được một chướng ngại tri thức luận của tích phân suy rộng là:

- Chướng ngại *phản trực quan*: Một hình phẳng và một lập thể không bị giới hạn nhưng có diện tích và thể tích hữu hạn.
- Chướng ngại *tính hữu hạn của tích phân xác định*: Tích phân suy rộng là sự khái quát hóa tích phân xác định trên miền không giới hạn.

3.5. Giả thuyết nghiên cứu

Với hai khó khăn xác định được của sinh viên trong thực nghiệm khảo sát ban đầu:

- Quan niệm tích phân suy rộng chỉ là tích phân xác định phải có cận vô cực;
- Bị ảnh hưởng của cận hữu hạn của miền lấy tích phân trong tích phân xác định trong việc tính tích phân suy rộng;
- Quan niệm miền không giới hạn không thể có diện tích hữu hạn, và từ kết quả phân tích tri thức luận ở Mục 3.2 và 3.3, chúng tôi xây dựng giả thuyết H sau đây về các khó khăn khi sinh viên lần đầu tiếp cận Tích phân suy rộng:

H. *Thuộc tính hữu hạn của các đối tượng hình học quen thuộc là một chướng ngại đối với sinh viên khoa Toán khi tiếp cận khái niệm Tích phân suy rộng.*

4. Kết luận

Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử Tích phân suy rộng cho thấy nghĩa của tri thức này là hình phẳng không giới hạn có diện tích hữu hạn hay lập thể dài vô hạn có thể tích hữu hạn. Sự hình thành của tri thức này chịu ảnh hưởng mạnh mẽ của các quan niệm Hình học vào thế kỉ XVII với các phương pháp vét cạn, phương pháp đánh đồng, phương pháp không thể chia tách được, phương pháp cầu phương. Cũng chính vào thế kỉ này, đã có hai bước nhảy lớn cho sự hình thành khái niệm tích phân suy rộng, đó là sử dụng công cụ cấp số nhân của đại số và phương pháp đánh đồng của Fermat trong việc cầu phương đường hyperbol.

Mặt khác, tri thức này có mối liên hệ chặt chẽ với diện tích hình phẳng, hay thể tích lập thể, và chuỗi vô hạn. Tính tồn tại Tích phân suy rộng gắn liền việc xem xét tính hội tụ của hàm số tại vô cực.

Để kiểm chứng giả thuyết nghiên cứu nêu ra ở mục 3.5 và ba khó khăn của sinh viên khi tiếp cận Tích phân suy rộng, trong nghiên cứu tiếp theo chúng tôi sẽ tiến hành một thực nghiệm tại hai Trường: Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Sài Gòn, và các kết quả nghiên cứu sẽ được trình bày trong một bài viết khác.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

BABB, J. (2005). Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme: Using the History of Calculus to Teach Mathematics. *Science & Education,* (14), 443-456.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*, NewYork.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 141-163.

Jahnke, H. N. (2016). A History of Analysis. *History Of Mathematics*, *24*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, 60-61.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics – An Introduction*. 3rd Edition, Pearson Education, Inc.

Le, V. T. (2003). A new perspective on the process of teaching the concept of mathematics [Cách nhìn mới về tiến trình dạy học khái niệm toán học]. *Journal of Education*, *64*, Hanoi.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York and Oxford: Oxford University Press.

Nguyen Dinh Phu, Nguyen Cong Tam, Dinh Ngoc Thanh, & Dặng Duc Trong (2012). *Syllabus of Analysis of functions of a single variable [Giao trinh Giai tich Ham mot bien]*. Viet Nam National University Ho Chi Minh City Press.

Paradís, J., Pla, J., &Viader, P. (2004). Fermat and the Quadrature of the Folium of Descartes. *The American Mathematical Monthly*, *111*(3), 216-229.

Pham Hoang Quan, Dinh Ngoc Thanh, & Dang Duc Trong (2011). *Analysis of functions of a single variable, Part 2 – Integral – Number Series – function sequences – function series [Giai tich ham mot bien Phan 2 – Tich phan – Chuoi so – Day ham – Chuoi ham]*. Viet Nam National University Ho Chi Minh City Press.

Stewart, J. (2016). *Calculus*. Eighth Ed. Boston: Cengage Learning, 568-571.

Tran Luong Cong Khanh (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée: une étude comparative entre la France et le Vietnam.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sài Gòn trong đề tài mã số CS2019-27.*

AN EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF THE CONCEPT OF IMPROPER INTEGRAL

Nguyen Ai Quoc

Saigon University

Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Received: May 25, 2019; Revised: June 04, 2019; Accepted: September 27, 2019

ABSTRACT

An improper integral is the generalization of a definite integral on an unlimited domain or the integrand that approaches infinity at one or more points in the range of integration. Improper integrals cannot be computed using a normal Riemann integral. This paper presents an epistemological analysis of the history of developing and forming the concept of improper integral, which helps determine the epistemological characteristics of an improper integral and some challenges students may face when learning the improper integral.

Keywords: epistemological analysis; epistemological characteristics; improper integral; limit; challenges for students