TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 17, Số 2 (2020): 197-210

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 17, No. 2 (2020): 197-210

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN TÍNH COMPACT TRONG GIẢI TÍCH VÀ TÔPÔ HỌC

Nguyễn Ái Quốc
Trường Đại học Sài Gòn
Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: nguyenaq2014@gmail.com
Ngày nhận bài: 03-6-2019; ngày nhận bài sửa: 08-9-2019; ngày duyệt đăng: 21-02-2020

TÓM TẮT

Tính compact của không gian mêtric và không gian tôpô là một trong những khái niệm cơ bản trong Tôpô học. Nó là sự khái quát hóa đặc trưng của các tập hợp con đóng, bị chặn của không gian Euclide. Nhiều khái niệm trong Tôpô học cũng như trong Không gian mêtric đều được xây dựng dựa trên tính compact. Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận làm rõ quá trình hình thành và phát triển của khái niệm compact và xác định các đặc trưng tri thức luận của đối tượng này.

Từ khóa: compact; đặc trưng tri thức luận; không gian mêtric; không gian tôpô; phân tích tri thức luận

1. Đặt vấn đề

1.1. Sự cần thiết nghiên cứu tính compact

Compact là khái niệm cơ bản và xuất hiện hầu hết trong các lĩnh vực của Giải tích như Tôpô đại cương, Giải tích hàm, Giải tích lồi, Giải tích hàm ứng dụng, Giải tích phức, Giải tích thực, nên việc nghiên cứu tri thức luận về khái niệm này thực sự cần thiết trong việc dạy học các môn Giải tích ở bậc đại học.

René Maurice Fréchet (1878-1973) sớm nhận ra tầm quan trọng của các không gian compact. Ông viết: "Tất cả những người đã nghiên cứu Giải tích tổng quát đều thấy rằng không thể làm gì nếu không có không gian compact" (Alexandroff, & Urysohn, 1924)

Nếu một sinh viên (SV) khoa Toán không hiểu rõ tính compact thì không chắc SV đó có thể làm toán cao cấp được.

1.2. Tồn tại những quan niệm sai của sinh viên về tính compact

Tháng 5 năm 2019, một thực nghiệm khảo sát được tiến hành trên 10 SV năm thứ 2 ngành Sư phạm Toán của Trường Đại học Sài Gòn và Đại học Khoa học Tự nhiên về khái niệm tập compact. Các SV này đã kết thúc các học phần về không gian tôpô và không gian mêtric ở năm thứ hai với thời lượng 60 tiết, diễn ra trong 15 tuần. Mục đích của khảo sát là

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc (2020). An epistemological analysis of compactness in Analysis and Topology. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(2), 197-210.

tìm hiểu quan niệm của SV về tính compact sau khi học xong các học phần trên. Nội dung thực nghiệm gồm ba câu hỏi:

"Câu 1.

a/ Bạn hãy định nghĩa tính compact của một tập trong R ?

b/ Bạn hiểu như thế nào về khái niệm này?

Câu 2. Tập nào sau đây là tập compact?

a/ R b/ $(0;\ 1] \cup (1;\ 2]$ c/ $(0; +\infty)$ d/ $[0;\ 1]$

Hãy giải thích câu trả lời của bạn.

Câu 3. Hình chữ nhật $[1;\ 3] \times [3;\ 4)$ có là tập compact trong R^2 ?

a/ Có b/ Không

Hãy giải thích câu trả lời của bạn."

Kết quả thực nghiệm cho thấy:

Trong câu 1, đối với câu a sinh viên SV1 cho rằng một tập compact trong R là "tập đó bị chặn ở hai đầu tại các số xác định". SV1 đã quan niệm một tập nếu bị chặn thì compact mà không quan tâm đến tính đóng, mở của tập hợp. Sinh viên SV2 thì cho rằng tập compact trong R là "một tập đóng, bị chặn và liên tục". SV2 đã đưa ra một khái niệm không tồn tại trong giải tích là "tập liên tục". Có 3 SV khác cho rằng tập đóng là tập compact. Các SV này đã không đề cập đến điều kiện bị chặn của một tập. Trong khi đó, chỉ có một SV trả lời rằng tập compact là tập đóng và bị chặn. SV này đã sử dụng một tính chất để định nghĩa tập compact. Đối với câu b/, tất cả SV đều không trả lời.

Trong câu 2, câu trả lời đúng là câu d/, tức là tập [0; 1] là tập compact. Kết quả cho thấy không có SV nào chọn đáp án a/ và c/ và có 3 SV chọn cả hai đáp án b/ và d/. Có 4 SV chọn câu trả lời b/. Trong đó, có một SV giải thích rằng: "Do các tập [0; 1) và (1; 2] là tập compact nên hợp của chúng cũng là tập compact" và ba SV còn lại cho rằng $[0;\ 1) \cup (1;\ 2]$ là tập đóng" (các câu trả lời và câu giải thích này chưa chính xác). Có 4 SV chọn d/ và giải thích rằng tập [0; 1] đóng nên tập [0; 1] là tập compact và có một SV sử dụng tính chất về tập com compact của R: "Do tập [0; 1] là tập đóng và bị chặn trong R nên tập [0; 1] là tập compact".

Trong câu 3, câu trả lời đúng là b/, tức là hình chữ nhật $[1; 2] \times [3; 4)$ không là tập compact trong R^2. Kết quả cho thấy có 4 SV chọn đáp án a/ và có 3 SV giải thích tập [1; 2] và tập [3; 4) là tập đóng trên R nên tích của chúng là tập compact trên R^2, SV còn lại không giải thích. Có 2 SV chọn b/, trong đó 1 SV giải thích bằng cách chỉ ra tập [3; 4) không là tập đóng nên hình chữ nhật $[1; 2] \times [3; 4)$ không là tập compact trong R^2 và SV còn lại vẽ hình mô tả tập $[1; 2] \times [3; 4)$ trên mặt phẳng R^2 và không giải thích gì thêm.

Kết quả thực nghiệm cho thấy tồn tại ở SV một số quan niệm sai về tính compact và không hiểu được ý nghĩa của tính compact. Tính trừu tượng của định nghĩa compact là một khó khăn đối với SV để giải quyết các bài toán cụ thể xét tính compact của một khoảng trong R và một hình chữ nhật trong R^2. Việc xác định các loại sai lầm của SV trong học Toán và nguồn gốc của chúng luôn là nhiệm vụ đầu tiên đặt ra đối với các nhà nghiên cứu Didactic Toán trước khi đưa ra giải pháp để giúp SV loại bỏ các sai lầm đó.

2. Tính compact của một tập

Có hai cách định nghĩa tập compact trong không gian mêtric:

Định nghĩa tập compact theo dãy:

"Ta có (E, d) là một không gian mêtric. Ta nói E compact nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong E đều chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về một $x \in E$." (Dang, 2001, p.31)

Định nghĩa tập compact theo phủ mở:

"Cho (E, d) là một không gian mêtric. E compact nếu và chỉ nếu mỗi bao phủ mở $\{W_i\}_{i\in I}$ của E (nghĩa là mỗi W_i là tập mở trong E và $E \subset \bigcup_{i\in I} W_i$) đều chứa một bao phủ con hữu hạn (nghĩa là có $W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_k}$ sao cho $E \subset W_{i_1} \cup W_{i_2} \cup \dots \cup W_{i_k}$)." (Dang, 2001, p.31)

Định nghĩa tập compact trong không gian tôpô theo phủ mở: "Một tập con A của một không gian tôpô X là compact nếu mỗi phủ mở của A có một phủ con hữu hạn." (Sutherland, 2009, p.127)

Tập compact trong không gian mêtric và trong không gian tôpô đều là khái niệm khái quát hóa từ đặc trưng của các tập hợp con đóng và bị chặn của không gian Euclide, thể hiện ở chỗ mọi phủ mở của chúng đều có phủ con hữu hạn. Tuy nhiên, trong không gian mêtric, đặc trưng ấy còn tương đương với định nghĩa thứ hai theo dãy, trong đó mọi dãy của không gian đều có dãy con hội tụ. Lợi ích của định nghĩa thứ hai là có tính trực quan, không trừu tượng như định nghĩa theo phủ mở, và cho phép xác định tính compact của một tập thông qua xem xét sự hội tụ của một dãy bất kì trong không gian thông qua các biến đổi bất đẳng thức đại số.

3. Phân tích tri thức luận lịch sử khái niệm compact

3.1. Động cơ thúc đẩy sự ra đời của tính compact

Ở Hi Lạp cổ đại, một định lí không phải là một tính chất được thiết lập cho đến khi nó được hình học hóa. Vào thời Trung cổ và Phục hưng, hình học tiếp tục là người quyết định cuối cùng của sự nghiêm ngặt toán học và ngay cả trong đại số. Giải tích của thế kỉ XVII và đặc biệt là thế kỉ XVIII không còn dễ dàng được chứng minh bằng thuật ngữ hình học, và đại số đã trở thành công cụ chính của chứng minh.

Thế kỉ XIX, thường được gọi là thời kì nghiêm ngặt hóa trong toán học, phản ánh một cuộc cách mạng trong tư duy toán học. Đây là sự mô tả đặc điểm chính xác theo nghĩa giải tích được thiết lập trên một nền tảng số học. Sự nghiêm ngặt hóa không chỉ là một vấn đề làm rõ một vài khái niệm cơ bản và thay đổi các chứng minh của một vài định lí cơ bản; mà nó còn xâm nhập hầu hết mọi lĩnh vực của giải tích. Phong trào hướng tới nghiêm ngặt thậm chí có thể được coi là một quá trình sáng tạo. Nó tạo ra toàn bộ các lĩnh vực mới của toán học, đặc biệt là các nền tảng vững chắc của giải tích liên quan đến các khái niệm hoàn toàn mới như tính liên tục điểm và liên tục đều, tính compact, tính đầy đủ… (Jahnke, 2016, p.155).

Từ giữa đến cuối thế kỉ XIX, toán học hiện đại bắt đầu định hình. Trong bối cảnh công trình của Cantor thiết lập sự bắt đầu nghiên cứu có hệ thống lí thuyết tập hợp và tôpô tập điểm. Nhiều nhà toán học bao gồm Weierstrass, Hausdorff, và Dedekind lo lắng về nền tảng của toán học và bắt đầu thực hiện nghiêm ngặt hóa các ý tưởng mà phải mất nhiều thế kỉ để được chấp nhận.

Trong bối cảnh đó, ba bài toán dường như đã thúc đẩy sự ra đời của khái niệm tính compact: Nghiên cứu các tính chất của khoảng đóng, bị chặn số thực $[a, b]$, không gian các hàm liên tục, và nghiệm của phương trình vi phân.

- *Tính chất của [a, b]*

Từ giữa đến cuối thế kỉ XIX, các nhà toán học bắt đầu thực sự hiểu và xác định rõ các thuộc tính bản chất của đường thẳng thực. Công việc này đã dẫn đến hai đặc trưng khác nhau của khái niệm được gọi là tính compact. Một đặc trưng được Bolzano và Weierstrass phát triển từ nghiên cứu các hàm số xác định trên các chuỗi số thực. Đặc trưng khác được Heine, Borel và Lebesgue phát triển dựa trên các tính chất tôpô, chẳng hạn như phủ các tập bởi các lân cận mở.

Nguồn gốc của tính compact dãy bắt nguồn từ một định lí, được Weierstrass chứng minh nghiêm ngặt vào năm 1877, liên quan đến trạng thái của các hàm liên tục xác định trên các khoảng đóng, bị chặn của đường thẳng thực. Định lí này được Fréchet phát biểu từ kết quả của Weierstrass: "Mọi hàm số liên tục trong một khoảng giới hạn (tương đương với khoảng đóng và bị chặn theo ngôn ngữ hiện đại) đạt cực đại ít nhất một lần trong khoảng đó." (Raman-Sundström, 2015, p.620).

Fréchet đã định nghĩa tính compact dãy trong luận án của ông năm 1906 xuất phát từ mong muốn khái quát hóa định lí này cho các không gian trừu tượng. (Taylor, 1982, p. 244).

Định lí Weierstrass có được các ý tưởng quan trọng nhờ Bolzano, người vào năm 1817 đã nêu rõ và chứng minh bổ đề sau:

> Nếu một tính chất *M* không áp dụng cho tất cả các giá trị của một đại lượng biến *x*, nhưng đối với tất cả các giá trị nhỏ hơn một *u* nào đó, thì luôn có một đại lượng *U* lớn nhất đối với các giá trị đó mà ta có thể khẳng định rằng tất cả các giá trị *x* nhỏ hơn sở hữu tính chất *M*. (Raman-Sundström, 2015, p.620-621)

Bổ đề này ngày nay được gọi là tính chất chặn trên nhỏ nhất đối với các số thực, có phần đột phá trong khái quát hóa các số thực. Chứng minh của bổ đề này cung cấp giá trị thực đầu tiên của tiến trình giới hạn, và được sử dụng để chứng minh cái mà ngày nay chúng ta gọi là định lí giá trị trung gian: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ với $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$ thì $f(x)$ sẽ bằng 0 tại một vài điểm x nằm giữa a và b.

Ý tưởng đằng sau chứng minh bổ đề của Bolzano, là sử dụng phép chia đôi khoảng, nghĩa là thu hẹp chặn trên nhỏ nhất bằng cách bỏ đi các điểm của tập hợp nằm dưới nó. Quá trình lặp này về cơ bản là cùng một quy trình được sử dụng trong chứng minh định lí giá trị lớn nhất của Weierstrass (Kline, 1972, p.953). Cụ thể, bổ đề Bolzano cho phép Weierstrass chứng minh rằng mọi tập hợp số thực vô hạn bị chặn đều có một điểm giới hạn. Đây là tính chất mà Fréchet đã sử dụng khi ông khái quát định lí Weierstrass vào các không gian trừu tượng. Ngày nay, tính chất này gọi là tính chất Bolzano-Weierstrass, hoặc tính compact điểm-giới hạn.

Trong khi Bolzano và Weierstrass đang cố gắng nêu đặc trưng của đường thẳng thực theo các dãy, các nhà toán học khác, như Borel và Lebesgue, đã cố gắng nêu đặc trưng nó theo các phủ mở. Borel đã chứng minh bổ đề sau trong luận án năm 1894 của mình:

> Nếu trên một đường thẳng có vô số các khoảng con, sao cho mọi điểm của đường thẳng nằm trong ít nhất một trong các khoảng đó, thì người ta có thể xác định một cách hiệu quả một số lượng giới hạn các khoảng trong các khoảng đã cho có cùng tính chất (mỗi điểm của đường thẳng nằm trong ít nhất một trong số các khoảng đó). (Raman-Sundström, 2015, p. 621)

Ở đây, một đường thẳng có nghĩa là một khoảng bị chặn. Như vậy, cách tiếp cận của Borel tương tự cách tiếp cận mà Heine đã sử dụng vào năm 1872 để chứng minh rằng một hàm liên tục trên một khoảng đóng là liên tục đều. Định lí này lần đầu tiên được Dirichlet chứng minh trong các bài giảng năm 1852, với cách sử dụng tường minh hơn các phủ và phủ con trong định lí của Heine (Dugac, 1989, p.91). Tuy nhiên, chứng minh của Dirichlet đã không được xuất bản cho đến năm 1904, điều này có thể giải thích tại sao ông không được ghi nhận cho phiên bản khái quát của bổ đề Borel (bây giờ được gọi là định lí Borel). Lí do mà tên của Heine gắn liền với định lí là do mối liên hệ giữa công trình của Heine và của Borel. Định lí tổng quát, ngày nay thường được gọi là định lí Heine – Borel, với ngôn ngữ và kí hiệu hiện đại, được phát biểu như sau: "Một tập con của R là compact nếu và chỉ nếu nó đóng và bị chặn." (Raman-Sundström, 2015, p.621)

Trong khi Heine được ghi nhận với một định lí mà ông không chứng minh được, thì có vẻ như Cousin đã hầu như bị quên lãng cho một bổ đề mà ông đã chứng minh. Năm 1895, ông đã khái quát hóa bổ đề Borel cho các phủ tùy ý. Trong phát biểu của bổ đề dưới đây, mặt phẳng YOX chính là R^2 và miền S, theo ngôn ngữ ngày nay, được mô tả là đóng và bị chặn.

> Trong mặt phẳng *YOX*, cho *S* là một miền được kết nối giới hạn bởi một đường viền kín, đơn giản hoặc phức tạp. Giả sử rằng tại mỗi điểm của *S* hoặc chu vi của nó có một đường tròn, bán kính khác không, nhận điểm này là tâm của nó. Sau đó, luôn luôn có thể chia nhỏ *S* thành các miền, số lượng hữu hạn và đủ nhỏ để mỗi một trong số chúng nằm hoàn toàn trong một vòng tròn tương ứng với một điểm được chọn phù hợp trong *S* hoặc trên chu vi của nó.
>
> (Raman-Sundström, 2015, p.622).

Nói cách khác, nếu ứng với mỗi điểm của một miền đóng, bị chặn, có một lân cận hữu hạn, thì miền đó có thể được chia thành một số hữu hạn các miền con sao cho mỗi miền con được chứa trong một vòng tròn có tâm của nó trong miền con. Bổ đề của Cousin (đôi khi được gọi là định lí Cousin) thường được quy cho Lebesgue, người được cho là nhận thức được kết quả vào năm 1898 và công bố bằng chứng của mình vào năm 1904. Bổ đề Lebesgue được coi là một hệ quả quan trọng của tính compact.

Mặc dù có một số tranh luận về việc ai là người thực sự chịu trách nhiệm về các ý tưởng và chứng minh, nhưng ý tưởng bất kì tập hợp con đóng, bị chặn nào của R đều có tính chất phủ mở (đôi khi được gọi là tính chất Borel – Lebesgue) được biết đến khi Fréchet lần đầu tiên chính thức định nghĩa tính compact.

- *Không gian các hàm liên tục*

Động cơ thứ hai thúc đẩy sự ra đời của compact là nghiên cứu các không gian trừu tượng như không gian các hàm liên tục $C^0[a, b]$. Các tính chất của $[a, b]$ riêng nó không được xem là quan trọng để khái quát hóa nếu không phải là trường hợp mà các tính chất này có vẻ quan trọng trong các không gian trừu tượng hơn. Tuy nhiên, các không gian có chiều vô hạn, như $C^0[a, b]$, không vận hành như các không gian có chiều hữu hạn, như R^n. Chẳng hạn, các tập con đóng, bị chặn của các hàm liên tục trên R không nhất thiết có tính chất Bolzano–Weierstrass hay tính phủ mở. Nghiên cứu trong lĩnh vực này được Ascoli và Arzelà thực hiện trong những thập kỉ sau cùng của thế kỉ XIX.

- *Nghiệm của phương trình vi phân*

Peano, một người cùng thời với Arzelà và Ascoli như một người đồng hương Ý, nhận ra rằng định lí Arzelà-Ascoli có thể hữu ích để chứng minh sự tồn tại các nghiệm của phương trình vi phân. Ông tìm kiếm các nghiệm bằng cách thực hiện một chuỗi các phép tính xấp xỉ. Peano đã sử dụng cái mà ngày nay chúng ta gọi là tính compact để chỉ ra rằng có một chuỗi con hội tụ đều tới một giới hạn là nghiệm của phương trình vi phân.

3.2. Sự phát triển của khái niệm compact

Nhiều nhà toán học đã góp phần phát triển các ý tưởng mà ngày nay là nền tảng của Giải tích và Tôpô học. Trong số đó, tại Pháp có Jaques Hadamard, Henri Lebesgue, René Maurice Fréchet, Henri Cartan, Nicoloas Bourbaki; tại Nga có Pavel Alexandroff và Pavel Samuilovich Urysohn; tại Đức có Felix Hausdorff, David Hilbert, Arthur Moritz Schoenflies, Georg Cantor; tại Hunggary có Frigyes Riesz; tại Hà Lan có Luitzen Egbertus Jan Brouwer; tại Áo có Leopold Vietoris; và tại Mĩ có Edward Wilson Chittenden, Earle Raymond Hedrick, và Eliakim Hastings Moore. Nhưng trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi chỉ xem xét quá trình phát triển của khái niệm compact gắn liền với các đóng góp của Fréchet, Hausdorff, Alexandroff, Urysohn, Cartan, và nhóm Bourbaki, vì các nhà toán học này được đánh giá có nhiều đóng góp quan trọng nhất cho sự hình thành và phát triển tính compact của một tập hợp.

- *Fréchet: Compact có thể đếm được và Compact điểm – giới hạn*

Mặc dù Fréchet bị ảnh hưởng bởi nhiều nhà toán học đương thời và tiền nhiệm, nhưng ông xứng đáng được coi là cha đẻ của tính compact. Chính Fréchet đã đặt tên cho khái niệm này trong một bài báo (Fréchet, 1904) dẫn đến luận án tiến sĩ năm 1906 của ông. Fréchet cũng đã định nghĩa không gian mêtric đầu tiên, mặc dù ông không sử dụng thuật ngữ đó, và xâm nhập vào giải tích hàm, do đó cung cấp một bối cảnh mà tầm quan trọng của tính compact trở nên rõ ràng.

Trong (Fréchet, 1904, p.849), Fréchet định nghĩa tính compact. Trước tiên ông đưa ra định nghĩa về cái mà chúng ta gọi là tính compact có thể đếm được, sử dụng các phần giao lồng nhau, sau đó đưa ra một đặc trưng sử dụng các điểm giới hạn.

Trong luận án, Fréchet xem xét ba loại không gian, mà ông gọi là lớp-L, lớp-V và lớp-E. Các lớp-L là tổng quát nhất, trong đó một khái niệm compact dãy được định nghĩa. Các lớp-E, mà bây giờ chúng ta gọi là các không gian mêtric và lớp-V, một không gian mêtric với một phiên bản yếu của bất đẳng thức tam giác, ít tổng quát hơn, nhưng dễ làm việc với chúng hơn.

Mục đích là để xác định tính compact cho các lớp-L, nhưng điều này hóa ra không thành công vì tính compact dãy không có tất cả các thuộc tính cần thiết để khái quát hóa cho các không gian tôpô trừu tượng. Thay vào đó, Fréchet tập trung vào các lớp-V và E, trong đó các khái niệm về tính compact hiện đại và tính compact dãy hoặc compact điểm-giới hạn là tương đương. Định nghĩa sau đây được đưa ra cho các lớp E.

> Một tập E gọi là compact nếu, bất cứ khi nào E_n là một dãy các tập con đóng, khác rỗng của E sao cho E_{n+1} là một tập con của E_n với mọi *n*, thì có ít nhất một phần tử thuộc vào tất cả các tập E_n. (Fréchet, 1906, p.7)

Bản chất chính xác của trực quan cho định nghĩa này là không rõ ràng, nhưng có thể có hai đặc trưng của các tập compact mà Fréchet muốn nắm bắt: Ý nghĩa của tính bị chặn và định nghĩa phần giao lồng nhau. Một định nghĩa khác của Fréchet, sử dụng tính chất Bolzano – Weierstrass, áp dụng cho các lớp V và E trong đó tính compact điểm-giới hạn, compact có thể đếm được, và compact dãy là tương đương:

> Chúng ta sẽ nói rằng một tập hợp là (liên quan đến điểm-giới hạn) compact nếu nó chỉ chứa một số hữu hạn điểm hoặc nếu mỗi tập con vô hạn của nó tạo ra ít nhất một điểm giới hạn. (Fréchet, 1906, p.6)

Trong định nghĩa trên, lưu ý rằng đối với Fréchet, một tập compact không cần phải đóng. Vì vậy, đối với các định nghĩa và định lí tiếp theo của ông, Fréchet thường cần phải yêu cầu một tập hợp vừa compact vừa đóng.

Vì Fréchet không yêu cầu một tập compact phải đóng, nên ông định nghĩa khái niệm của một *tập cực trị*, gần với khái niệm hiện đại về compact: "Chúng ta sẽ gọi một tập vừa đóng vừa compact là *tập cực trị*." (Fréchet, 1906, p.6-7)

Tiếp thu những ý tưởng đóng góp trong luận án của mình được bảo vệ vào năm 1906, Fréchet gọi một tập hợp compact là mọi tập hợp chỉ có một số hữu hạn các phần tử hoặc mọi vô hạn các phần tử làm nảy sinh ít nhất một phần tử giới hạn (Fréchet, 1906, p.6). Để tìm các tính chất bổ sung, ông định nghĩa lân cận (A, B) của hai phần tử A và B của một tập hợp là một số sao cho (A, B) = 0 nếu A = B và ngược lại và tồn tại một hàm dương kí hiệu là $f(\varepsilon)$ tiến đến 0 với ε mà (A, C) $\leq f(\varepsilon)$ nếu (A, B) $\leq f(\varepsilon)$ và (B, C) $\leq f(\varepsilon)$, với mọi phần tử A, B, C. Ông có thể đưa ra một công thức cho các định lí của Borel và Borel-Lebesgue trong các tập hợp có các lân cận như vậy (Fréchet, 1906, p.18, 22-23, 26-27). Năm 1917, Fréchet đã đưa ra một định nghĩa mới về các lân cận (Fréchet, 1917, p.359-360); chính ông nói rằng định lí này khác hoàn toàn với định lí ông đã đưa ra trước đó (Fréchet, 1928, p.172).

- *Hausdorff: Tính compact trên các không gian mêtric*

Một trong những chướng ngại để định nghĩa tính compact là định nghĩa nó theo cách có thể hoạt động cho các không gian tôpô trừu tượng.

Đây là một vấn đề đối với Fréchet và cuối cùng ông phải hạn chế định nghĩa của mình đối với các lớp-V và E, bỏ ngỏ câu hỏi về việc xác định tính compact cho các lớp-L, tiền thân của cái mà ngày nay chúng ta gọi là không gian tôpô trừu tượng. Vào đầu những năm 1900, công trình của Hausdorff đã cách mạng hóa lĩnh vực tôpô học, cung cấp các định nghĩa chuẩn trong lĩnh vực này.

Tuy nhiên, chính Hausdorff là người giới thiệu hệ lân cận thuận tiện nhất trong bài giảng năm 1912 trước tiên và một cách có hệ thống vào hai năm sau. Ông nêu đặc tính các vùng lân cận các điểm của một tập hợp bằng bốn tiên đề sau: 1) Mỗi điểm x được chứa trong một lân cận U_x và mỗi lân cận U_x chứa một điểm x; 2) Với mỗi cặp lân cận $U_x$và V_x tương ứng với lân cận W_x chứa trong $U_x$và V_x; 3) Nếu y là một điểm của U_x, thì có một lân cận U_y chứa trong U_x; 4) Đối với hai điểm x và y, có các lân cận $U_x$và V_x không có điểm chung (Hausdorff, 1914, p.213).

Lấy ý tưởng từ Cantor, Hausdorff gọi điểm dính của một tập hợp *A* là mọi điểm trong đó mỗi lân cận chứa vô số điểm của *A*. Ông nhận ra rằng có những tập hợp không có điểm tụ (ví dụ tập hợp các số nguyên); Ông gọi chúng là các tập phân kì. Do đó, ông có thể sửa đổi định nghĩa của Fréchet và gọi tập compact là mọi tập không chứa tập con phân kì (Hausdorff, 1914, p.230).

Vào năm 1914, Hausdorff đã giới thiệu những gì chúng ta gọi là không gian Hausdorff, trong đó các điểm khác biệt có các vùng lân cận rời nhau. Trong (Hausdorff, 1914), ông đã định nghĩa một tập hợp *E* là compact nếu mọi tập con vô hạn của *E* có một điểm giới hạn trong *E*, trong đó điểm giới hạn trong ngữ cảnh này có nghĩa là mọi lân cận của điểm đó chứa vô số các phần tử của *E*. Khái niệm tính compact của Hausdorff, mà chúng ta gọi là compact điểm-giới hạn và tương đương với tính compact có thể đếm được đối với các không gian Hausdorff, vẫn là khái niệm chuẩn về tính compact trong suốt quá trình phát triển nhanh chóng của tôpô tập-điểm trong thập niên 1920.

- *Alexandroff và Urysohn: Tính compact phủ mở*

Trong khi Fréchet là người đầu tiên định nghĩa chính thức tính compact, thì hai nhà toán học người Nga đương thời với ông, Alexandroff và Urysohn, lần đầu tiên phát biểu nó dưới dạng tổng quát nhất, trong bối cảnh của các không gian tôpô trừu tượng. Có lẽ vì lí do này mà hai người Nga được ghi nhận trong việc định nghĩa khái niệm tính compact.

Trong một bài báo năm 1923, Alexandroff và Urysohn đã liệt kê tính compact phủ mở, thuộc tính mà mọi phủ mở đều có một phủ con hữu hạn, vì một trong ba thuộc tính tương đương mà một tập hợp có thể được gọi là compact, mà theo ngôn ngữ của họ là "bicompact" (song compact). Hai thuộc tính khác là tất cả các tập hợp vô hạn có một điểm tụ hoàn toàn và các phần giao lồng nhau là khác rỗng. Alexandroff và Urysohn lưu ý rằng ba thuộc tính này đã được biết đến, mặc dù khái niệm này chưa được đặt tên.

> Alexandroff tuyên bố đặc trưng điểm tụ là quan trọng nhất trước tiên, do sự thống trị của tính chất Bolzano – Weierstrass, nhưng sau một vài năm rõ ràng là tính chất phủ mở có hiệu quả hơn. (Chandler, 2001, p.633)

Ngày nay, người ta thường đưa ra tính chất phủ mở như định nghĩa và chỉ ra sự tương đương của một hoặc cả hai tính chất kia như các định lí. Mặc dù trừu tượng hơn và có lẽ ít trực quan hơn so với các đặc trưng khác, tính chất phủ mở mang lại rõ ràng hơn các tính chất khác về sự tương đồng giữa tính compact và tính hữu hạn.

Alexandroff và Urysohn thực sự đã tiếp xúc gần gũi với Fréchet (Taylor, 1985, p.319-357), trong thời gian phát triển nghiên cứu của họ trên các không gian tôpô compact. Mặc dù Alexandroff và Urysohn thường nhận được ghi nhận cho việc định nghĩa tính compact phủ mở, nhưng Fréchet không nhận thức được khả năng sử dụng các lân cận để nêu đặc trưng tính compact, một ý tưởng được Hadamard, cố vấn của ông đưa ra vào năm 1905. Định nghĩa đầu tiên mà Fréchet đưa ra, về các phần giao lồng nhau, là đối ngẫu, và do đó tương đương về mặt logic với tính compact phủ mở có thể đếm được.

- *Compact phủ mở với Compact điểm – giới hạn*

Mặc dù Fréchet có thể ban đầu đã được thúc đẩy để xác định tính compact cho các không gian tôpô trừu tượng, nhưng thực tế ông đã tự giới hạn mình trong các không gian mêtric. Cách tiếp cận của ông về việc xem xét các dãy và giới hạn không tổng quát như cách tiếp cận sử dụng phủ mở, điều này dẫn đến kết quả mà chúng ta coi là định nghĩa chính xác của tính compact.

- *Cartan và Bourbaki: Compact với lọc*

Weil viết vào năm 1937: Khi ta rời khỏi tính đếm được, thì việc lấy các khái niệm chuỗi và giới hạn làm công cụ chính yếu không còn phù hợp và ta phải thay thế chúng bằng những cái khác có miền hoạt động ít thu hẹp hơn. (Weil, 1937, p.3)

Chính Henri Cartan là người phát hiện ra công cụ này trong cùng một năm. Ông định nghĩa lọc **F** của một tập hợp là một họ các tập hợp con, sao cho: 1) Lọc khác rỗng và không chứa tập hợp con rỗng; 2) Giao của hai tập hợp của **F** cũng thuộc **F**; 3) Bất kì tập hợp nào chứa một tập hợp của **F** đều thuộc về **F** (Cartan, 1937, p.595). Cartan cũng định nghĩa một khái niệm rộng hơn, một khái niệm cơ sở của lọc: các tập hợp của lọc cơ sở thỏa mãn điều kiện đầu tiên của các lọc và giao của hai tập hợp của lọc cơ sở chứa một tập hợp của lọc cơ sở (Cartan, 1937, p.595-596).

Đặc biệt, tập hợp các lân cận của một không gian tôpô là một lọc và một cơ sở lọc. Theo định nghĩa, Cartan nói rằng trong một không gian tôpô, lọc hội tụ đến một điểm hoặc điểm này là giới hạn của lọc nếu lọc này mịn hơn lọc các lân cận (nghĩa là nếu lọc được xem xét chứa lọc các lân cận). Để chỉ có một điểm giới hạn duy nhất, không gian phải là một không gian Hausdorff. Cartan gọi điểm tụ của một lọc **F** là điểm mà lọc mịn hơn **F** hội tụ về nó; ông đi đến kết luận quan trọng rằng giao của một phần tử bất kì của lọc và một lân cận bất kì của điểm không bao giờ rỗng (Cartan, 1937b, p.777-778).

Chevalley và Weil đã lưu ý Cartan rằng, trong thuật ngữ mới này, nói rằng một không gian tôpô là compact cũng có nghĩa là tính chất Borel-Lebesque quy về nói rằng bất kì lọc nào được xây dựng trên không gian này đều có ít nhất một điểm tụ (Cartan, 1937b, p.778); sự tương đương này được thiết lập bằng cách xem xét tính chất Borel-Lebesgue được phát biểu dưới dạng: Mọi họ các tập đóng có phần giao rỗng đều nhận một họ con hữu hạn có phần giao là rỗng. Không gian là compact nếu mọi siêu lọc (tức là mọi lọc mịn hơn mọi lọc cho trước) đều hội tụ.

Bourbaki gọi điểm dính của một lọc cơ sở của một không gian tôpô là mọi điểm dính đối với mỗi phần tử của cơ sở, nghĩa là mọi điểm mà mỗi lân cận của nó chứa ít nhất một điểm của mỗi phần tử của cơ sở (Bourbaki, 1951, p.45-49)

Do đó, theo định nghĩa của Bourbaki, một không gian compact cuối cùng là một không gian tôpô mà mọi lọc đều có ít nhất một điểm dính và được phân tách theo nghĩa của Tietze, nghĩa là thỏa mãn tiên đề của Hausdorff (Bourbaki, 1951, p.91). Tiên đề: Bất kì lọc nào cũng có ít nhất một điểm dính. Tiên đề này thay thế nguyên lí của Bolzano Weierstrass. Nó tương đương với: Bất kì phủ mở nào của không gian đều có một phủ mở hữu hạn của không gian; phát biểu cuối cùng này là phát biểu chính thức của tiên đề Borel-Lebesgue. (Bourbaki, 1951, p.91-129)

3.3. Quan niệm gắn liền với tính compact

Từ kết quả phân tích tri thức luận lịch sử của khái niệm tính compact, cho thấy sự hình thành khái niệm tính compact của một tập chịu ảnh hưởng của quan niệm nghiêm ngặt hóa và quan niệm trừu tượng hóa trong toán học nói chung và trong giải tích nói riêng.

Khái niệm tính compact ra đời vào thế kỉ XIX là thời kì nghiêm ngặt hóa toán học nói chung và nghiêm ngặt hóa giải tích nói riêng, nhằm tách giải tích khỏi sự ảnh hưởng của hình học để các chứng minh và các khái niệm được xây dựng chặt chẽ hơn trên nền tảng số học.

Trừu tượng hóa trong toán học là quá trình rút ra bản chất cơ bản của một khái niệm toán học, loại bỏ bất kì sự phụ thuộc nào vào các đối tượng trong thế giới thực mà nó có thể được kết nối ban đầu và khái quát hóa nó để nó có các ứng dụng rộng hơn hoặc phù hợp với các mô tả trừu tượng khác về các hiện tượng tương đương.

Một số giải thích hiện tại về sự trừu tượng hóa trong các thiết lập toán học được kiểm tra từ các quan điểm khác nhau, bao gồm cả trong lịch sử và học tập. Có ý kiến cho rằng sự trừu tượng hóa là một khái niệm phức tạp và nó không thể chỉ quy về thành khái quát hóa hay phi ngữ cảnh hóa. (Ferrari, 2003, p.1225)

Một trong những trường hợp đầu tiên về sự trừu tượng hóa cực kì thành công trong lịch sử toán học hiện đại chắc chắn là không gian mêtric, được Fréchet giới thiệu vào khoảng năm 1906 trong bối cảnh của giải tích hàm. Được biết, Fréchet biết về trường hợp của nhóm trong đại số trừu tượng và nó đã cung cấp ít nhất các hướng dẫn và một mô hình về những gì có thể đạt được bằng cách di chuyển lên các bậc thang trừu tượng. (Marquis, 2015)

Trong luận án năm 1906, Fréchet đã định nghĩa tính compact dãy xuất phát từ mong muốn khái quát hóa định lí này cho các không gian trừu tượng. (Taylor, 1982, p.244)

3.4. Đặc trưng tri thức luận của khái niệm compact

Từ phân tích quá trình lịch sử hình thành khái niệm compact dựa trên các tài liệu tham khảo: Pier (1961), Pier (1984), Raman-Sundström (2015), chúng tôi rút ra các đặc trưng tri thức luận của khái niệm compact như sau:

- Đặc trưng về *phạm vi tác động*: giải tích, không gian mêtric, tôpô, hình học;
- Đặc trưng về *các yếu tố gắn liền*: dãy, dãy con, phủ mở, phủ con, tập mở, tập đóng, điểm giới hạn;
- Đặc trưng *cách tiếp cận khái niệm*: dãy, tập mở, tập đóng và bị chặn, lọc;
- Đặc trưng *trừu tượng*: trừu tượng hóa trong không gian mêtric và không gian tôpô;
- Đặc trưng *cụ thể/khái quát hóa*: cụ thể trên đường thẳng thực R, khái quát vào trong không gian Euclide n chiều và không gian mêtric và không gian tôpô;
- Đặc trưng *đa hình thức*: compact điểm – giới hạn, compact phủ mở.

3.5. Chướng ngại tri thức luận

Từ kết quả phân tích lịch sử hình thành khái niệm compact, chúng tôi xác định được chướng ngại tri thức luận của compact là:

Chướng ngại *trừu tượng hóa*: Khái niệm compact là kết quả của sự khái quát hóa cho các không gian mêtric và không gian tôpô trừu tượng. Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử hình thành khái niệm tính compact cho thấy Fréchet đã gặp trở ngại trong việc khái quát hóa tính compact dãy cho không gian lớp L vì tính compact dãy không có tất cả các thuộc tính cần thiết để khái quát hóa cho các không gian tôpô trừu tượng, vì việc xét sự hội tụ của các dãy trong không gian tôpô là không thể do đòi hỏi một mêtric. Chính Alexandroff và Urysohn đã vượt qua chướng ngại mà Fréchet gặp phải bằng cách xem xét ba thuộc tính tương đương của một tập compact: Mọi phủ mở đều có phủ con hữu hạn, tất cả các tập hợp vô hạn có một điểm tụ hoàn toàn và các phần giao lồng nhau là khác rỗng.

Chướng ngại này sinh viên sẽ phải đương đầu khi chuyển từ nghiên cứu trên tập hợp các số thực sang các không gian mêtric và không gian tôpô trừu tượng.

3.6. *Giả thuyết nghiên cứu*

Từ kết quả phân tích tri thức luận ở các Mục 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, và với hai khó khăn xác định được trong thực nghiệm khảo sát trên sinh viên trình bày trong Mục 1.2:

- Tồn tại một số quan niệm sai của sinh viên về ý nghĩa của khái niệm tính compact;
- Gặp nhiều khó khăn trong việc xét tính compact của một khoảng trong R và một hình chữ nhật trong R^2, chúng tôi xây dựng giả thuyết H về các khó khăn của sinh viên khi lần đầu tiếp cận khái niệm tính compact như sau:

Tồn tại một số quan niệm sai về ý nghĩa của tính compact và tồn tại nhiều khó khăn trong việc xét tính compact của một khoảng trong R và một hình chữ nhật trong R^2 ở hầu hết sinh viên khi lần đầu tiên tiếp cận tính compact. Các quan niệm sai và khó khăn này có nguồn gốc từ chướng ngại tri thức luận: chướng ngại trừu tượng hóa.

4. Kết luận

Ý tưởng về compact sinh ra từ ý tưởng về giới hạn. Khái niệm giới hạn xuất hiện rất sớm trong toán học. Nó được gợi lên bởi các nhà toán học và triết gia Hi Lạp, đặc biệt là Aristotle.

Phân tích tri thức luận lịch sử đã chứng minh khái niệm tính compact ra đời nhằm nhằm giải quyết ba bài toán: nghiên cứu các thuộc tính của $[a, b]$, không gian các hàm liên tục, và nghiệm phương trình vi phân. Tuy nhiên, khái niệm này ra đời trực tiếp từ việc Fréchet mong muốn khái quát hóa định lí của Weierstrass liên quan đến các hành vi của các hàm liên tục xác định trên các khoảng đóng, bị chặn của đường thẳng thực vào trong các không gian trừu tượng mêtric và tôpô, nhưng ông chỉ thành công đối với các không gian mêtric. Chính Alexandroff và Urysohn đã thành công trong việc thiết lập khái niệm compact phủ mở trong không gian tôpô trừu tượng, và Cartan và Bourbaki là những người định nghĩa không gian tôpô compact theo lọc.

Hiểu được quá trình khái quát hóa tính compact từ đường thẳng thực R vào không gian mêtric và trong không gian tôpô sẽ giúp sinh viên vượt qua các chướng ngại/khó khăn trong quá trình tiếp cận khái niệm này.

Chúng tôi sẽ tiến hành một thực nghiệm để kiểm chứng giả thuyết nghiên cứu H trong Mục 3.5. Các kết quả nghiên cứu sẽ được trình bày chi tiết trong một bài viết khác.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alexandroff, P. (1924). Ueber die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Râume. *Mathematische Annalen*. Berlin, Julius Springer, *92*.

Alexandroff, P., & Urysohn, P. (1924). Zur Théorie der topologischen Râume. *Mathematische Annalen*, *92*.

Alexandroff, P. (1925). Zur Begriindung der n-dimensionalen mengentheo-retischen Topologie. *Mathematische Annalen*, (94).

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewa ̈hren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prague.

Brousseau, G., (1983). "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 141-163.

Bourbaki, N. (1951). *Structures topologiques. Structures uniformes*. Paris, Hermann & Cie., 91-129.

Cartan, H. (1937a). Théorie des filtres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Paris, *205*.

Cartan, H. (1937b). Filtres et ultrafiltres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, *205*.

Chandler, R., & Faulkner, G. (2001). Hausdorff compactifications: A retrospective, in *Handbook of the History of General Topology*. Edited by C. E. Aull, R. Lowen. Springer Verlag, Berlin.

Cousin, P. (1895). Sur les fonctions de *n* variables complexes. *Acta Math.*, (19), 1-61.

Dang, D. A. (2001). *Introduction of Analysis*. Ed. Education.

Dugac, P. (1989). Sur la correspondance de Borel et le theoreme de Dirichlet-Heine Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue, *Arch. Inter. Hist. Sci.*, *39*(122), 69-110.

Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions: Biological Sciences*, *358*(1435), The Abstraction Paths: From Experience to Concept, The Royal Society, 1225-1230.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *C. R. Acad. Sci. Paris* 139, 848-850.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Palermo* 22, 1-74.

Fréchet, M. (1917). Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, *165*, 359-360.

Fréchet, M. (1928). *Les espaces abstraits*. Paris, Gauthier-Villars.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre.* Verlag von Veit, Leipzig.

Jahnke, H. N. (2016). *A history of Analysis*. American Mathematical Society.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematices-An Introduction*. 3rd Edition, Pearson Education, Inc.

Kline, K. (1972). *Mathematical Thought: From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

Le, V. T. (2003). A new perspective on the process of teaching the concept of mathematics. *Journal of Education*, (64), Ha noi.

Le, T. H. C, & Le, V. T. (2003). The role of epistemological analysis of History of Mathematics in research and practice of mathematics teaching and learning. *Research theme at the Ministry Level*, Code B2001-23-2.

Marquis, J. P. (2015). Mathematical abstraction, conceptual variation and identity. In Peter Schroeder-Heister, Gerhard Heinzmann, Wilfred Hodges & Pierre Edouard Bour, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, 229-321. London: College Publications.

Nguyen, A. Q., & Nguyen, T. V. K. (2017). An epistemological analysis in teaching advanced algebra: the case of group. *6th International Seminar on Didactic Mathematics*, Ho Chi Minh City University of Education.

Nguyen, A. Q., & Nguyen, T. T. T. (2017). The contributions of epistemological analysis for teaching linear algebra: the case of vector space. *6th International Seminar on Didactic Mathematics*, Ho Chi Minh City University of Education.

Pier, J. P. (1961). Genèse et évolution de l'idée de compact. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*. Tome 14, (2), 69-179.

Pier, J. P. (1984). Historique de la notion de compacité. *Historica Mathematica 7*, 425-443.

Raman-Sundström, M. (2015). A Pedagogical History of Compactness. *The American Mathematical Monthly*, *122*(7), 619-635.

Sutherland, W. A. (2009). *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Second Edition, Oxford University Press.

Taylor, A. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Arch. Hist. Exact Sci*, *27*(3), 233-295.

Taylor, A. E. (1985). A study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his work on general topology, 1909-1928, *Arch. Hist. Exact Sci.*, *34*(3), 279-380.

Weil, A. A. (1937). *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Paris, Hermann & Cie.

AN EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF COMPACTNESS
IN ANALYSIS AND TOPOLOGY

Nguyen Ai Quoc

Saigon University

Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Received: June 03, 2019; Revised: September 08, 2019; Accepted: February 21, 2020

ABSTRACT

Compactness in metric and topological spaces is one of the basic concepts of Topology. It is a property that generalizes the notion of a subset of Euclidean space being closed and bounded. Many of the concepts in the Topology as well as in the metric space are based on this concept. This paper presents an epistemological analysis that clarifies the emergence and development of the concept of compactness and determines the epistemological characteristics of these two knowledge objects.

Keywords: compactness; epistemological characteristic; metric space; topogical space; epistemological analysis