TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 12 (2018): 103-112

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 12 (2018): 103-112

ISSN: 1859-3100

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website:http://tckh.hcmue.edu.vn

SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP PHÂN MIỀN SWR ỨNG VỚI DÃY THAM SỐ

Huỳnh Phước Toàn*[*]*, Nguyễn Gia Bảo
Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh
Ngày nhận bài: 20-8-2018, ngày nhận bài sửa: 17-10-2018, ngày duyệt đăng: 21-12-2018

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự hội tụ của thuật toán phân miền Schwarz waveform relaxation (SWR) ứng với dãy tham số giải phương trình đối lưu – khuếch tán một chiều. Cụ thể, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện đủ để xây dựng dãy các tham số sao cho thuật toán tối ưu SWR tương ứng với dãy tham số đó hội tụ. Cuối cùng, chúng tôi đề xuất một ví dụ các dãy tham số thỏa mãn điều kiện của định lí.

Từ khóa: dãy các tham số, phương pháp phân miền SWR, sự hội tụ.

ABSTRACT

Convergence of the Schwarz waveform relaxation domain decomposition methods corresponding with the sequence of parameters

In this paper, we prove the convergence of the Schwarz waveform relaxation (SWR) domain decomposition method corresponding with the sequence of parameters for solving one dimensional advection – reaction – diffusion problem. More precisely, we present a sufficient condition to construct the sequence of parameters such that the optimized SWR method corresponding with it converges. Finally, we propose an example of the sequence of parameters which satisfies the condition of theorem.

Keywords: sequence of parameters, Schwarz waveform relaxation domain decompostion method, convergence.

1. Giới thiệu

Với $\Omega = \mathbb{R}$, xét phương trình đối lưu – khuếch tán có dạng

$$\partial_t u + Au = f \text{, trong } \Omega \times (0,T) \tag{1.1}$$

với điều kiện đầu

$$u(x,0) = u_0(x) \text{, trong } \Omega, \tag{1.2}$$

trong đó, $A = -a\partial_{xx}^2 + b\partial_x + c$ với *a* là hằng số dương, *c* là hằng số không âm và *b*, *c* không đồng thời triệt tiêu.

[*] Email: *huynhphuoctoanhcmup@gmail.com*

Ý tưởng của phương pháp phân miền SWR là chia miền Ω thành hai miền con: $\Omega_1 = (-\infty, 0)$ và $\Omega_2 = (0, +\infty)$, sau đó giải lặp hai bài toán con trên $\Omega_1 \times (0,T)$ và $\Omega_2 \times (0,T)$ với điều kiện biên cụ thể như sau

$$\begin{cases} \partial_t u_i^{k+1} + Au_i^{k+1} = f, & trong \;\; \Omega_i \times (0,T), \\ u_i^{k+1}(x,0) = u_0(x), & trong \;\; \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1,\ 2 \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} (\partial_x + S_2) u_1^{k+1}(0,t) = (\partial_x + S_2) u_2^k(0,t), & trong \; (0,T), \\ (-\partial_x + S_1) u_2^{k+1}(0,t) = (-\partial_x + S_1) u_1^k(0,t), & trong \; (0,T), \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó, S_1, S_2 là các toán tử tuyến tính được xác định trước. Dãy các nghiệm số thu được sau khi giải lặp các bài toán con trên sẽ hội tụ về nghiệm giải tích của bài toán (1.1), (1.2) và sự hội tụ này phụ thuộc vào việc chọn các toán tử S_1, S_2.

Trong [1], các tác giả đã chỉ ra rằng nếu chọn các toán tử S_i là các toán tử Dirichlet – Neumann $\tilde{S}_i$ thì thuật toán phân miền SWR sẽ hội tụ trong 2 bước lặp. Điều này được phát biểu trong [1, Bổ đề 2.2]. Tuy nhiên, các toán tử $\tilde{S}_i$ là các toán tử không địa phương theo biến thời gian nên việc tính toán cụ thể các toán tử này rất phức tạp. Do vậy, một ý tưởng rất tự nhiên đó chính là xấp xỉ các toán tử đó dưới dạng $S_i = p_i I_d$ hoặc $S_i = p_i I_d + q_i \partial_t$, ý tưởng này sinh ra phương pháp tối ưu phân miền SWR. Các tác giả trong [1] đã đưa ra định lí về điều kiện đủ cho các tham số p_i, q_i để thuật toán phân miền SWR ứng với các toán tử $S_i = p_i I_d$ hoặc $S_i = p_i I_d + q_i \partial_t$ hội tụ, thể hiện qua các định lí bên dưới.

Định lí 1. **([1, Định lí 2.6]).** *Giả sử rằng* $p_1 > \frac{b}{2a}$, $p_2 > -\frac{b}{2a}$, $q_1 > 0$ *và* $q_2 > 0$. *Khi đó thuật toán phân miền SWR (1.3)-(1.4) ứng với các toán tử* $S_i = p_i I_d$ *và* $S_i = p_i I_d + q_i \partial_t$, *với* $i = 1,\ 2$ *hội tụ.*

Đích đến cuối cùng của phương pháp tối ưu phân miền SWR đó chính là chọn các tham số p_i, q_i thỏa mãn Định lí 1 sao cho tốc độ hội tụ của thuật toán là nhanh nhất. Việc tính toán tối ưu các tham số trên đã được thực hiện trong [2]. Tuy nhiên, phương pháp mà các tác giả đưa ra trong [2] quá phức tạp và rất khó để mở rộng cho các lớp phương trình đạo hàm riêng khác. Do vậy, các tác giả trong [1] đã đưa ra một phương pháp khác để tìm các tham số ấy, đơn giản hơn nhưng vẫn thu được kết quả đủ tốt. Phương pháp này bao gồm hai bước, bước thứ nhất là giải bài toán tìm cực tiểu của hàm số

$$Q_i(p_i) = \left\| \tilde{S}_i g - p_i g \right\|^2_{L^2(0 \times (0,T))}, \text{ với } i = 1,\ 2, \tag{1.5}$$

đối với trường hợp xấp xỉ $\tilde{S}_i$ dưới dạng $S_i = p_i I_d$, và giải bài toán tìm cực tiểu của hàm số

$$Q_i\left(p_i\right)=\left\|\tilde{S}_i g-\left(p_i+q_i\partial_t\right)g\right\|^2_{L^2\left(0\times(0,T)\right)},\ \text{với } i=1,\ 2, \tag{1.6}$$

đối với trường hợp xấp xỉ $\tilde{S}_i$ dưới dạng $S_i = p_i I_d + q_i\partial_t$, trong đó hàm g được chọn ngẫu nhiên có chuẩn trong không gian $L^2\left(0\times(0,T)\right)$ bằng 1. Các điểm cực tiểu thu được ở các bài toán trên được phát biểu trong [1, Định lí 3.1] và [1, Định lí 3.2].

***Định lí 2.* ([1, Định lí 3.1]).** *Giả sử p_i^{st} là các điểm cực tiểu tương ứng của các hàm số (1.5). Khi đó ta có*

$$p_i^{st}=\frac{\left\langle \tilde{S}_i g, g\right\rangle}{\|g\|^2},\ \textit{với } i=1,\ 2.$$

Hơn nữa, phương pháp SWR hội tụ khi sử dụng các tham số trên, nghĩa là

$$p_1^{st}>\frac{b}{2a}\ \text{ và }\ p_2^{st}>-\frac{b}{2a}.$$

***Định lí 3.* ([1, Định lí 3.2]).** *Các điểm cực tiểu $\left(p_i^{nd}, q_i^{nd}\right)$ của các hàm số (1.6) thỏa mãn hệ phương trình sau*

$$\begin{cases}\|g\|^2 p_i+\left\langle g,\partial_t g\right\rangle q_i=\left\langle \tilde{S}_i g, g\right\rangle,\\ \left\langle g,\partial_t g\right\rangle p_i+\left\|\partial_t g\right\|^2=\left\langle \partial_t g, \tilde{S}_i g\right\rangle.\end{cases}$$

Hơn nữa, ta còn có

$$p_1^{nd}>\frac{b}{2a},\ p_2^{nd}>-\frac{b}{2a},\ p_1^{nd}-p_2^{nd}=\frac{b}{a},\ q_1^{nd}=q_2^{nd}>0.$$

Từ các kết quả ấy, các tác giả trong [1] sử dụng thuật toán backtracking – Armijo tối ưu hóa các tham số này để thu được các tham số mới tốt hơn cho phương pháp phân miền SWR. Tiếp nối ý tưởng này, chúng tôi nhận thấy rằng để có thể đạt được tham số tối ưu thì cần phải trải qua hữu hạn các bước lặp. Chúng tôi mong muốn xây dựng một phương pháp mới với các tham số thay đổi qua từng bước lặp, sao cho qua mỗi bước lặp là sẽ thu được tham số tốt hơn tham số trước đó. Để làm được điều đó thì trước hết chúng tôi sẽ chứng minh thuật toán SWR (1.3) - (1.4) vẫn hội tụ khi thay các tham số p_i, q_i không đổi qua mọi bước lặp bởi một dãy tham số thay đổi qua từng bước lặp.

2. Kết quả chính

Xét không gian Sobolev $H^{r,s}\left(\Omega\times(0,T)\right)$ định nghĩa như sau

$$H^{r,s}\left(\Omega\times(0,T)\right)=L^2\left((0,T);H^r(\Omega)\right)\cap H^s\left((0,T);L^2(\Omega)\right),$$

với *r, s* là các số nguyên dương. Lớp các không gian này có thể được mô tả một cách cụ thể như sau

$$H^{r,s}\left(\Omega\times(0,T)\right)=\left\{w\in L^2\left(\Omega\times(0,T)\right):D_x^r w,D_y^s w\in L^2\left(\Omega\times(0,T)\right)\right\},$$

với $D_x^r w$ là đạo hàm riêng cấp *r* theo biến *x* của *w*.

Không gian Sobolev trên là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle w,v\rangle_{r,s}=\langle w,v\rangle_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\langle D_x^r w,D_x^r v\rangle_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\langle D_y^s w,D_y^s v\rangle_{L^2(\Omega\times(0,T))}.$$

Từ đó, ta đưa ra chuẩn trên không gian tích $H^{r,s}\left(\Omega\times(0,T)\right)\times H^{r,s}\left(\Omega\times(0,T)\right)$ như sau

$$\|(w,v)\|_{H^{r,s}(\Omega\times(0,T))\times H^{r,s}(\Omega\times(0,T))}=\|w\|_{r,s}+\|v\|_{r,s}.$$

Như đã đề cập ở mục trước, chúng tôi sẽ xây dựng lại các bài toán (1.3), (1.4) với các dãy toán tử thay đổi qua từng bước lặp. Cụ thể, chúng tôi sẽ xét các bài toán sau

$$\begin{cases}\partial_t u_1^{k+1}+Au_1^{k+1}=f, & trong\ \ \Omega_1\times(0,T),\\ u_1^{k+1}(\cdot,0)=u_0(\cdot), & trong\ \ \Omega_1,\\ \left(\partial_x+S_2^{k+1}\right)u_1^{k+1}(0,\cdot)=\left(\partial_x+S_2^{k+1}\right)u_2^k(0,\cdot), & trong\ \ (0,T)\end{cases}\tag{2.1}$$

và

$$\begin{cases}\partial_t u_2^{k+1}+Au_2^{k+1}=f, & trong\ \ \Omega_2\times(0,T),\\ u_2^{k+1}(\cdot,0)=u_0(\cdot), & trong\ \ \Omega_2,\\ \left(-\partial_x+S_1^{k+1}\right)u_2^{k+1}(0,\cdot)=\left(-\partial_x+S_1^{k+1}\right)u_1^k(0,\cdot), & trong\ \ (0,T)\end{cases}\tag{2.2}$$

trong đó, $S_i^k=p_i^k I_d$ hoặc $S_i^k=p_i^k I_d+q_i^k\partial_t$ với $i=1,2$. Tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện đủ cho các dãy $\left\{p_i^k\right\}_k$ và $\left\{q_i^k\right\}_k$ để các bài toán (2.1) và (2.2) hội tụ, đây cũng chính là kết quả chính của bài báo.

Định lí 4. *Giả sử các dãy $\left\{p_i^k\right\}_k$ và $\left\{q_i^k\right\}_k$ (i=1, 2) thỏa mãn các giả thiết sau:*

a) $p_1^k>\dfrac{b}{2a}$, $p_2^k>-\dfrac{b}{2a}$ *với mọi số tự nhiên k.*

b) $\lim\limits_{k\to+\infty}p_1^k>\dfrac{b}{2a}$ *và* $\lim\limits_{k\to+\infty}p_2^k>-\dfrac{b}{2a}$.

c) Các dãy $\left\{q_1^k\right\}_k$ *và* $\left\{q_2^k\right\}_k$ *đều là các dãy dương hội tụ về giá trị dương.*

Khi đó, nghiệm $\left\{u_1^k, u_2^k\right\}_k$ *của các bài toán (2.1), (2.2) sẽ hội tụ trong các không gian* $H^{2,1}\left(\Omega_1\times(0,T)\right)$ *và* $H^{2,1}\left(\Omega_2\times(0,T)\right)$ *về nghiệm u của bài toán (1.1), (1.2).*

Chứng minh. Xét dãy các sai số $\left\{e_1^k, e_2^k\right\}_k$ với $e_1^k = u - u_1^k$ và $e_2^k = u - u_2^k$ với mọi số tự nhiên *k*. Khi đó, e_1^{k+1} và e_2^{k+1} thỏa mãn các bài toán sau

$$\begin{cases} \partial_t e_1^{k+1} + A e_1^{k+1} = 0, & \textit{trong } \Omega_1\times(0,T), \\ e_1^{k+1}(\cdot,0) = 0, & \textit{trong } \Omega_1, \\ \left(\partial_x + S_2^{k+1}\right)e_1^{k+1}(0,\cdot) = \left(\partial_x + S_2^{k+1}\right)e_2^k(0,\cdot), & \textit{trong } (0,T) \end{cases} \tag{2.3}$$

và

$$\begin{cases} \partial_t e_2^{k+1} + A e_2^{k+1} = 0, & \textit{trong } \Omega_2\times(0,T), \\ e_2^{k+1}(\cdot,0) = 0, & \textit{trong } \Omega_2, \\ \left(-\partial_x + S_1^{k+1}\right)e_2^{k+1}(0,\cdot) = \left(-\partial_x + S_1^{k+1}\right)e_1^k(0,\cdot), & \textit{trong } (0,T) \end{cases} \tag{2.4}$$

Trước hết, thực hiện biến đổi Fourier lên phương trình thứ nhất của cả hai hệ, ta sẽ thu được hệ số Fourier của các e_1^{k+1} và e_2^{k+1} dưới dạng

$$\hat{e}_1^{k+1}(x,\omega) = \lambda_1^{k+1}(\omega)e^{r^+x}, \qquad \hat{e}_2^{k+1}(x,\omega) = \lambda_2^{k+1}(\omega)e^{r^-x}$$

với r^+, r^- lần lượt là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$-ar^2 + br + c + i\omega = 0.$$

Tiếp tục thực hiện biến đổi Fourier lên phương trình thứ ba của hệ (2.3), (2.4) và thay $\hat{e}_1^{k+1}$, $\hat{e}_2^{k+1}$ vừa tìm được, ta sẽ thu được

$$\left(r^+ + \sigma_2^{k+1}\right)\lambda_1^{k+1}(\omega) = \left(r^- + \sigma_2^{k+1}\right)\lambda_2^k(\omega), \tag{2.5}$$

$$\left(-r^- + \sigma_1^{k+1}\right)\lambda_2^{k+1}(\omega) = \left(-r^+ + \sigma_1^{k+1}\right)\lambda_1^k(\omega), \tag{2.6}$$

với σ_1^k, σ_2^k là kí hiệu đại diện cho các toán tử S_1^k, S_2^k. Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* $S_i^k = p_i^k I_d$ với $i = 1, 2$, với mọi số tự nhiên *k*. Lúc này, (2.5) và (2.6) sẽ trở thành

$$\left(r^+ + p_2^{k+1}\right)\lambda_1^{k+1}(\omega) = \left(r^- + p_2^{k+1}\right)\lambda_2^k(\omega),$$

$$\left(-r^- + p_1^{k+1}\right)\lambda_2^{k+1}(\omega) = \left(-r^+ + p_1^{k+1}\right)\lambda_1^k(\omega).$$

Từ đây, ta sẽ có

$$\lambda_1^{k+1}(\omega) = \frac{r^- + p_2^{k+1}}{r^+ + p_2^{k+1}} \cdot \frac{-r^+ + p_1^k}{-r^- + p_1^k} \lambda_1^{k-1}(\omega).$$

Kết hợp với $\hat{e}_1^{k+1}(x,\omega) = \lambda_1^{k+1}(\omega) e^{r^+ x}$, ta sẽ tính được

$$\hat{e}_1^{2k}(x,\omega) = R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega)$$

với

$$R_2^k(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \frac{r^- + p_2^{2i}}{r^+ + p_2^{2i}}; \qquad R_1^k(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \frac{-r^+ + p_1^{2i-1}}{-r^- + p_1^{2i-1}}.$$

Tương tự, ta cũng sẽ có

$$\hat{e}_1^{2k+1}(x,\omega) = Q_2^k(\omega).Q_1^k(\omega)\hat{e}_1^1(x,\omega)$$

với

$$Q_2^k(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \frac{r^- + p_2^{2i+1}}{r^+ + p_2^{2i+1}}; \qquad Q_1^k(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \frac{-r^+ + p_1^{2i}}{-r^- + p_1^{2i}}.$$

Để chứng minh dãy $\{e_1^k\}$ hội tụ về 0 trong không gian $H^{2,1}(\Omega_1 \times (0,T))$ thì ta cần phải chỉ ra rằng

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| e_1^k \right\|_{2,1} = 0.$$

Trước hết, ta sẽ xem xét cụ thể các chuẩn $\left\| e_1^{2k} \right\|_{2,1}$, áp dụng tính bảo toàn tích vô hướng của khi thực hiện biến đổi Fourier theo biến thời gian *t*, với mọi số tự nhiên *k*, ta có

$$\begin{aligned}
\left\| e_1^{2k} \right\|_{2,1}^2 &= \left\| e_1^{2k} \right\|_{L^2(\Omega_1\times(0,T))}^2 + \left\| D_x^2 e_1^{2k} \right\|_{L^2(\Omega_1\times(0,T))}^2 + \left\| D_t^1 e_1^{2k} \right\|_{L^2(\Omega_1\times(0,T))}^2 \\
&= \left\| \hat{e}_1^{2k} \right\|_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})}^2 + \left\| \widehat{D_x^2 e_1^{2k}} \right\|_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})}^2 + \left\| \widehat{D_t^1 e_1^{2k}} \right\|_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})}^2 \\
&= \int_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})} \left| R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega) \right|^2 d(x,\omega) \\
&+ \left\| D_x^2 \hat{e}_1^{2k} \right\|_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})}^2 + \int_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})} \left| \omega R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega) \right|^2 d(x,\omega) \\
&= \int_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})} \left| R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega) \right|^2 d(x,\omega) + \int_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})} \left| (r^+)^2 R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega) \right|^2 d(x,\omega) \\
&+ \int_{L^2(\Omega_1\times\mathbb{R})} \left| \omega R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega) \right|^2 d(x,\omega)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\left| R_i^k(\omega) \right| < 1$, với $i = 1, 2$, với mọi số tự nhiên k và với mọi ω, đồng thời chỉ ra rằng

$$\lim_{k\to+\infty} \left| R_i^k(\omega) \right| = 0 \text{ với } i = 1, 2, \text{ với mọi } \omega.$$

Đầu tiên, ta có

$$\left|R_2^k(\omega)\right|^2 = \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(b+2ap_2^{2i} - \operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\sqrt{d}\right)^2}{\left(b+2ap_2^{2i} + \operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\sqrt{d}\right)^2}$$

với $d = b^2 + 4a(c+i\omega)$ và $\operatorname{Re}\sqrt{d}$ là số dương. Đặt

$$\mu_k = \frac{\left(b+2ap_2^{k} - \operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\sqrt{d}\right)^2}{\left(b+2ap_2^{k} + \operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\sqrt{d}\right)^2},$$

do $p_2^k > -\dfrac{b}{2a}$ với mọi số tự nhiên k nên $\mu_k < 1$ với mọi số nhiên *k*, suy ra $\left|R_2^k(\omega)\right| < 1$ với mọi số nhiên *k* và với mọi ω. Hơn nữa, do $\lim\limits_{k\to+\infty} p_2^k > -\dfrac{b}{2a}$ nên $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k < 1$, vì vậy tồn tại số tự nhiên *N* và một hằng số $0 < M_\omega < 1$ sao cho

$$\mu_k < M_\omega < 1, \quad \forall n \ge N.$$

Khi đó, xét số tự nhiên K_0 thỏa $2K_0 - 1 > N$ thì với mọi $k \ge K_0$, ta có

$$\left|R_2^k(\omega)\right|^2 = \prod_{i=1}^{k} \mu_{2i} = \prod_{i=1}^{N_0-1} \mu_{2i} . \prod_{i=N_0}^{k} \mu_{2i} \le \prod_{i=1}^{N_0-1} \mu_{2i} . M_\omega^{k-N_0+1} .$$

Cho *k* tiến ra vô cùng, ta thu được

$$\lim_{k\to+\infty} \left|R_2^k(\omega)\right|^2 = 0, \text{ với mọi } \omega,$$

hay

$$\lim_{k\to+\infty} \left|R_2^k(\omega)\right| = 0, \text{ với mọi } \omega.$$

Tương tự, ta cũng sẽ chỉ ra được $\left|R_1^k(\omega)\right| < 1$, với $i = 1, 2$ với mọi số tự nhiên *k*, với mọi ω và

$$\lim_{k\to+\infty} \left|R_1^k(\omega)\right| = 0, \text{ với } i = 1, 2 \text{ với mọi } \omega.$$

Kết hợp với chú ý rằng $i\omega \hat{e}_1^0(x,\omega)$, $\left(r^+\right)^2 \hat{e}_1^0(x,\omega)$ là các hàm khả tích cấp hai trên $\Omega_1 \times (0,T)$ do e_1^0 thuộc $H^{2,1}\left(\Omega_1 \times (0,T)\right)$, ta có các hàm

$$\left|R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2, \left|\left(r^+\right)^2 R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\left(r^+\right)^2 \hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2,$$

và

$$\left|\omega R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2$$

bị chặn bởi các hàm khả tích với mọi số tự nhiên k và hội tụ từng điểm về 0 nên theo Định lí hội tụ Lebesgue, ta có các tích phân

$$\int_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})}\left|R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2 d(x,\omega),$$

$$\int_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})}\left|\omega R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2 d(x,\omega)$$

và

$$\int_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})}\left|\left(r^+\right)^2 R_2^k(\omega).R_1^k(\omega)\left(r^+\right)^2\hat{e}_1^0(x,\omega)\right|^2 d(x,\omega)$$

hội tụ về 0, do đó chuẩn $\left\|e_1^{2k}\right\|_{2,1}$ hội tụ về 0. Tương tự, ta cũng sẽ chỉ ra được chuẩn $\left\|e_1^{2k+1}\right\|_{2,1}$ hội tụ về 0, vậy chuẩn $\left\|e_1^k\right\|_{2,1}$ hội tụ về 0 và ta thu được sự hội tụ về 0 trong $H^{2,1}\left(\Omega_1\times(0,T)\right)$ của dãy $\left\{e_1^k\right\}$. Lập luận tương tự, ta cũng sẽ thu được sự hội tụ về 0 trong $H^{2,1}\left(\Omega_2\times(0,T)\right)$ của dãy $\left\{e_2^k\right\}$. Do đó, trong trường hợp này, các bài toán (2.1), (2.2) hội tụ.

- *Trường hợp 2:* $S_i^k = p_i^k I_d + q_i^k\partial_t$ với $i=1,\ 2$, với mọi số tự nhiên *k*. Trong trường hợp này, ta cũng sẽ chứng minh $\left|R_i^k(\omega)\right|<1$, $\left|Q_i^k(\omega)\right|<1$ với $i=1,\ 2$, với mọi số tự nhiên *k* và với mọi ω, đồng thời chỉ ra rằng

$$\lim_{k\to+\infty}\left|R_i^k(\omega)\right|=0 \text{ và } \lim_{k\to+\infty}\left|Q_i^k(\omega)\right|=0,\ \text{với } i=1,\ 2,\ \text{với mọi } \omega.$$

Với $S_i^k = p_i^k I_d + q_i^k\partial_t$ với $i=1,\ 2$, với mọi số tự nhiên *k*, ta có

$$\left|R_2^k(\omega)\right|^2=\prod_{i=1}^{k}\frac{\left(b+2ap_2^{2i}-\operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\sqrt{d}-2aq_2^{2i}\omega\right)^2}{\left(b+2ap_2^{2i}+\operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\sqrt{d}+2aq_2^{2i}\omega\right)^2}$$

và dãy μ_n được xây dựng ở trường hợp 1 sẽ có dạng

$$\mu_k=\frac{\left(b+2ap_2^k-\operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\sqrt{d}-2aq_2^k\omega\right)^2}{\left(b+2ap_2^k+\operatorname{Re}\sqrt{d}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\sqrt{d}+2aq_2^k\omega\right)^2}.$$

do $p_2^k > -\dfrac{b}{2a}$, $q_2^k > 0$ với mọi số tự nhiên *k*, kết hợp với $\operatorname{Im}\sqrt{d}\,\omega \geq 0$ với mọi ω (xem chứng minh trong [1, Định lí 2.6]) nên $\mu_k < 1$ với mọi số nhiên k, suy ra $\left|R_2^k(\omega)\right| < 1$ với mọi số nhiên k và với mọi ω. Hơn nữa, do $\lim\limits_{k\to+\infty} p_2^k > -\dfrac{b}{2a}$ và $\lim\limits_{k\to+\infty} q_2^k > 0$ nên $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k < 1$, lúc này ta lập luận tương tự như trường hợp 1, ta sẽ chỉ ra được $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|R_2^k(\omega)\right| = 0$, với mọi ω. Một cách tương tự, ta cũng sẽ có $\left|R_1^k(\omega)\right| < 1$, $\left|Q_i^k(\omega)\right| < 1$ với $i = 1,\ 2$ với mọi số tự nhiên *k*, với mọi ω và

$$\lim_{k\to+\infty}\left|R_1^k(\omega)\right| = 0,\ \lim_{k\to+\infty}\left|Q_i^k(\omega)\right| = 0,\ \text{với } i = 1,\ 2 \text{ với mọi } \omega,$$

từ đó, ta có các bài toán (2.1), (2.2) cũng hội tụ trong trường hợp này. □

3. Xây dựng ví dụ

Cuối cùng, chúng tôi sẽ đưa ra một cách xây dựng dãy $\left\{p_i^k\right\}_k$, $\left\{q_i^k\right\}_k$ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 4. Trước tiên, xét dãy $\left\{p_1^k\right\}_k$ xác định như sau

$$\begin{cases} p_1^0 \in \left(\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b}{2a} + 1\right), \\ p_1^k = \dfrac{1}{2}\left(p_1^{k-1} + \dfrac{b}{2a} + 1\right), \qquad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Một cách cụ thể, dãy số này được xây dựng bằng cách lấy liên tiếp trung điểm của các khoảng $\left(p_1^k, \dfrac{b}{2a} + 1\right)$ với số hạng đầu tiên p_1^0 được lấy bất kì trong khoảng $\left(\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b}{2a} + 1\right)$, do đó, chúng ta có thể dễ dàng chỉ ra được $p_1^k > 1, \forall k \geq 1.$ Hơn nữa, bằng cách quy nạp, ta có thể chỉ ra được với mọi số tự nhiên *k* lớn hơn 0, ta đều có

$$p_1^k = \left(\frac{b}{2a} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} p_1^0 = \left(\frac{b}{2a} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} p_1^0,$$

từ đó, cho *k* tiến ra cộng vô cùng, ta sẽ thu được

$$\lim_{k\to+\infty} p_1^k = \frac{b}{2a} + 1 > \frac{b}{2a}.$$

Tương tự, các dãy $\left\{p_2^k\right\}_k$ và $\left\{q_i^k\right\}_k$ có thể được xây dựng như sau

$$\left\{p_2^k\right\}_k : \begin{cases} p_2^0 \in \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b}{2a}+1\right), \\ p_2^k = \dfrac{1}{2}\left(p_2^{k-1}+1-\dfrac{b}{2a}\right), & \forall k \geq 1, \end{cases}$$

$$\left\{q_1^k\right\}_k : \begin{cases} q_1^0 \in (1, 2), \\ q_1^k = \dfrac{1}{2}\left(q_1^{k-1}+1\right), & \forall k \geq 1, \end{cases}$$

$$\left\{q_2^k\right\}_k : \begin{cases} q_1^0 \in (0, 1), \\ q_1^k = \dfrac{1}{2}\left(q_2^{k-1}+1\right), & \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Việc chứng minh các dãy trên thỏa mãn giả thiết của Định lí 4 hoàn toàn tương tự như đối với dãy $\left\{p_1^k\right\}_k$.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tran, Minh-Phuong, Nguyen, Thanh-Nhan, "A simple algorithm for Schwarz waveform relaxation methods," *Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput.*, *45*, pp. 57-74, 2016.

[2] M. J. Gander and L. Halpern, "Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, *45*(2), pp. 666-697, 2007.