TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 17, Số 11 (2020): 1945-1956

Vol. 17, No. 11 (2020): 1945-1956

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM VỀ CÁC KHÓ KHĂN LIÊN QUAN ĐẾN VIỆC HỌC KHÁI NIỆM ĐẲNG CẤU NHÓM

Nguyễn Thị Vân Khánh

Trường Đại học Sài Gòn

Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Vân Khánh – Email: ntvkhanh@sgu.edu.vn

Ngày nhận bài: 02-6-2020; ngày nhận bài sửa: 18-8-2020; ngày duyệt đăng: 25-11-2020

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả thực nghiệm về ba khó khăn đối với sinh viên khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm: (1) Không nhận ra yếu tố cơ bản "tập nguồn và tập đích là các nhóm"*; (2) Không hiểu rõ tính chất* "bảo toàn phép toán của hai nhóm"; *(3) Không hiểu rõ tính chất* "tương ứng một-một". *Các khó khăn này có nguồn gốc từ chướng ngại tri thức luận và bởi ảnh hưởng của chướng ngại sư phạm do mối quan hệ thể chế Toán đại học đối với đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm. Mục đích của nghiên cứu là xác đinh các khó khăn mà sinh viên gặp phải khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm nhằm giúp các nhà đào tạo có cái nhìn chính xác về nguồn gốc các sai lầm của sinh viên, từ đó các nhà đào tạo có thể thiết kế chương trình tối ưu giúp sinh viên vượt qua các khó khăn này.*

Từ khóa: chướng ngại tri thức luận; khó khăn; đồng cấu nhóm; đẳng cấu nhóm

1. Đặt vấn đề

1.1. Tồn tại các khó khăn của sinh viên khi tiếp cận khái niệm đẳng cấu nhóm

Tháng 10/2018, một khảo sát được tiến hành dưới dạng phỏng vấn trực tiếp ngẫu nhiên 5 sinh viên năm hai ngành Sư phạm Toán của Trường Đại học Sài Gòn về khái niệm đồng cấu nhóm, các sinh viên này đã hoàn thành học phần Đại số đại cương (60 tiết) và Đại số tuyến tính (90 tiết). Mục đích của khảo sát là nhằm tìm hiểu các khó khăn của sinh viên khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm.

Mỗi sinh viên tham gia đã thực hiện một cuộc phỏng vấn kéo dài khoảng nửa giờ. Câu hỏi được đặt ra trong cuộc phỏng vấn trực tiếp là

Các diễn tả sau đây là về định nghĩa các đồng cấu nhóm và đẳng cấu:

Định nghĩa: *Cho (G,.) và (G',+) là các nhóm. Một ánh xạ f từ G sang G' sao cho f(xy) = f(x) + f(y) với mọi* $x, y \in G$ *được gọi là đồng cấu nhóm.*

Định nghĩa: "*Ánh xạ f từ G sang G' được gọi là đẳng cấu và G và G' được gọi là đẳng cấu nhau, kí hiệu G ≅ G', nếu f là một đồng cấu và f là một song ánh*"

Câu hỏi 1. Bạn hiểu như thế nào về định nghĩa "đồng cấu nhóm", "đẳng cấu nhóm"?

Câu hỏi 2. Bạn hãy cho biết trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đồng cấu nhóm, ánh xạ nào là đẳng cấu nhóm? Hãy giải thích?

Cite this article as: Nguyen Thi Van Khanh (2020). An experimental study of the difficulties involved in learning the concept of group isomorphism. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(11), 1945-1956.

a. $\begin{array}{l}\varphi : G \to G \\ x \mapsto \varphi(x) = a^{-1}xa\end{array}$ trong đó $(G,.)$ là nhóm và $a \in G$.

b. $\begin{array}{l}\phi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 \\ \overline{x} \mapsto \phi(\overline{x}) = 2\overline{x}\end{array}$

Kết quả khảo sát cho thấy khi trả lời câu hỏi về đồng cấu nhóm, có 4 sinh viên không đề cập đến yếu tố *(G,.)* và *(G',+)* là các nhóm, thậm chí 1 sinh viên cho rằng *G* và *G'* chỉ cần có trang bị phép toán là đủ.

Cả 5 sinh viên được phỏng vấn đều cho rằng đồng cấu là ánh xạ thỏa một tính chất nào đó, họ không giải thích hay gọi tên được đó là tính chất gì. Thậm chí khi được hỏi "nếu ánh xạ f đi từ "nhóm cộng" đến "nhóm nhân" thì f cần thỏa điều kiện gì để f là đồng cấu?" thì chỉ có 1 sinh viên trả lời điều kiện cần thỏa là $f(x + y) = f(x)f(y)$, 4 sinh viên còn lại không biết câu trả lời, vì vậy 4 sinh viên này đã thực sự gặp khó khăn khi diễn đạt tính chất bảo toàn phép toán trong ánh xạ φ, họ nói rằng không biết toán "+" thực hiện như thế nào.

Đối với ánh xạ φ, có 1 sinh viên trả lời φ là đồng cấu nhưng không biết có là đẳng cấu không, 4 sinh viên còn lại không có câu trả lời. Cả 5 sinh viên đều không biết ϕ là đồng cấu hay không, khi được hỏi "liệu ánh xạ ϕ có là song ánh không?" thì 5 sinh viên không nhận thấy $\mathbb{Z}_3$ và $\mathbb{Z}_6$ là hai nhóm hữu hạn không cùng lực lượng (số phần tử) để kết luận ϕ không thể là song ánh.

Từ kết quả khảo sát trên cho thấy, có ba khó khăn của sinh viên khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm trong các cuộc phỏng vấn là:

- Không nhận ra yếu tố cơ bản "tập nguồn và tập đích là các nhóm";
- Không hiểu rõ tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm";
- Không hiểu rõ tính chất "tương ứng một-một".

1.2. Đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm

Các khái niệm sau được trình bày trong giáo trình "Abstract Algebra: Theory and Applications" bởi Thomas, W. J. (2017)

Khái niệm đồng cấu nhóm

Một đồng cấu giữa hai nhóm (G,.) và (H,∘) là một ánh xạ $\varphi : G \to H$ *sao cho* $\varphi(g_1.g_2) = \varphi(g_1)\circ\varphi(g_2)$ *với* $g_1, g_2 \in G$. (Thomas, 2017, p.125)

Định lí

Cho $\phi : G_1 \to G_2$ *là đồng cấu nhóm. Khi đó*

1. Nếu e là phần tử đơn vị của G_1 *thì* $\phi(e)$ *là phần tử đơn vị của* G_2*;*

2. ϕ *là đơn ánh nếu và chỉ nếu* $Ker\, f = \{e\}$ *;*

3. ϕ *là toàn ánh nếu và chỉ nếu* $Im\, f = G_2$. (Thomas, 2017, p.126)

Khái niệm đẳng cấu nhóm

Hai nhóm (G,.) và (H,∘) là đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh $\varphi : G \to H$ *sao cho phép toán của các nhóm được bảo toàn, nghĩa là* $\varphi(a.b) = \varphi(a)\circ\varphi(b)$ *với mọi a và b trong G. Nếu G đẳng cấu với H, thì ta viết* $G \cong H$*. Ánh xạ* φ *được gọi là đẳng cấu.* (Thomas, 2017, p.107)

1.3. Chướng ngại tri thức luận khái niệm đẳng cấu nhóm

1.3.1. Đặc trưng tri thức luận

Khái niệm đẳng cấu nhóm được định nghĩa dưới hình thức hệ tiên đề. Để kiểm chứng "quy tắc mỗi phần tử trong tập nguồn tương ứng với phần tử trong tập đích" là đẳng cấu nhóm phải lần lượt chứng minh các mệnh đề sau đúng: quy tắc là ánh xạ, tập nguồn và tập đích là các nhóm, ánh xạ bảo toàn phép toán của hai nhóm và ánh xạ là song ánh (đơn ánh, toàn ánh). Các điều kiện hình thành đẳng cấu nhóm cho phép chúng tôi rút ra hai đặc trưng tri thức luận khái niệm đẳng cấu nhóm:

- Đặc trưng *cấu trúc hóa*: đẳng cấu nhóm bao gồm song ánh, nhóm, tính bảo toàn;
- Đặc trưng *tiên đề hóa*: định nghĩa khái niệm bằng hệ tiên đề.

1.3.2. Chướng ngại tri thức luận

Định nghĩa đẳng cấu nhóm cho thấy đẳng cấu nhóm là sự kết hợp của nhiều kiến thức trừu tượng: khái niệm nhóm (hệ tiên đề của nhóm) và tính bảo toàn phép toán. Một chướng ngại tri thức luận sau có thể là chướng ngại đối với sinh viên khi tiếp cận đẳng cấu nhóm: Chướng ngại *trừu tượng hóa* khái niệm đẳng cấu nhóm bằng biểu đạt hình thức của tính chất bảo toàn phép toán. Chướng ngại này sinh ra các khó khăn mà sinh viên phải đương đầu khi chuyển từ nghiên cứu các phép toán thông thường trên tập hợp số sang nghiên cứu các phép toán hình thức trên tập hợp trừu tượng.

1.4. Thể chế Toán đối với đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm

1.4.1. Mối quan hệ thể chế Toán đại học

Trong thể chế Toán của Trường Đại học Sài Gòn (ĐHSG), khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm xuất hiện trong giáo trình "Đại số đại cương" được định nghĩa như sau

Ánh xạ f từ nhóm G đến nhóm H được gọi là một đồng cấu (nhóm) nếu $f(xy) = f(x)f(y)$ *với mọi* $x, y \in G$. (Ton, 2014, p.58)

Giả sử f là một đồng cấu từ nhóm G đến nhóm H. Ta nói f là một đơn cấu nếu f là một đơn ánh; là một toàn cấu nếu f là một toàn ánh; là một đẳng cấu nếu f là một song ánh. Một đẳng cấu từ nhóm G đến chính nó còn được gọi là một tự đẳng cấu. (Ton, 2014, p.58)

Khái niệm đồng cấu nhóm trong giáo trình giảng dạy của Trường ĐHSG được định nghĩa bằng hai nhóm có cùng phép toán *nhân* mà không giải thích hay chú thích thêm về diễn đạt điều kiện đồng cấu $f(xy) = f(x)f(y)$ có thể sẽ là một *chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc hiểu tính chất bảo toàn phép toán của hai nhóm.

Phân tích giáo trình giảng dạy học phần Đại số đại cương của Trường ĐHSG cho thấy tồn tại bốn kiểu nhiệm vụ liên quan đến đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm. Thống kê các bài tập liên quan đến các kiểu nhiệm vụ này trong giáo trình giảng dạy của Trường ĐHSG có kết quả trong Bảng 1 dưới đây:

Bảng 1. *Bài tập đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm của Trường ĐHSG*

Kiểu nhiệm vụ	**Số bài tập**			
	Nhóm số	**Tỉ lệ**	**Nhóm khác**	**Tỉ lệ**
T_{DGH}: Chứng minh đồng cấu nhóm dựa trên định nghĩa	**4/18**	**22,22%**	**12/18**	**66,67%**
Chứng minh là đồng cấu nhóm	4	22,22%	12	66,67%
Chứng minh không là đồng cấu nhóm	0	0,00%	0	0,00%
T_{TGH}: Chứng minh đồng cấu nhóm dựa trên định lí	**1/18**	**5,56%**	**1/18**	**5,56%**
Chứng minh là đồng cấu nhóm	1	5,56%	1	5,56%
Chứng minh không là đồng cấu nhóm	0	0,00%	0	0,00%
T_{DGI}: Chứng minh đẳng cấu nhóm dựa trên định nghĩa	**6/29**	**20,69%**	**18/29**	**62,07%**
Chứng minh là đẳng cấu nhóm	4	13,79%	18	62,07%
Chứng minh không là đẳng cấu nhóm	2	6,90%	0	0,00%
T_{TGI}: Chứng minh đẳng cấu nhóm dựa trên định lí	**1/29**	**3,49%**	**4/29**	**13,79%**
Chứng minh là đẳng cấu nhóm	1	3,49%	4	13,79%
Chứng minh không là đẳng cấu nhóm	0	0,00%	0	0,00%

Nhóm số: $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Q}^*,.),(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}^+,.),(\mathbb{R}^*,.),(\{\pm 1\},.),(\mathbb{C},+),(\mathbb{C}^*,.)$;

Nhóm khác: $A_n, D_n, S_n, \mathbb{Z}_n, U(n), SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})$, *Aut (G), Inn(G), Cyclic, Klein, Quaternion.*

Kết quả Bảng 1 cho thấy, các bài tập về đồng cấu nhóm có kiểu nhiệm vụ T_{DGH} chiếm đa số (88,89%), tuy nhiên không có bất kì bài tập có kiểu nhiệm vụ T_{DGH} và T_{TGH} để chứng minh không là đồng cấu nhóm. Bài tập có kiểu nhiệm vụ T_{DGH} và T_{TGH} để chứng minh không là đẳng cấu khi "ánh xạ không là đơn ánh" hay "ánh xạ không là toàn ánh" xuất hiện quá ít (6,90%). Các bài tập chứng minh đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm trên các nhóm số chiếm số lượng không đáng kể (12/47) so với lượng bài tập trên các nhóm khác (35/47) trong hệ thống bài tập.

Các bài tập đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm trên các nhóm số không được quan tâm nhiều mà tập trung trên các nhóm khác có thể sẽ là một *chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc xác định đồng cấu giữa hai nhóm.

1.4.2. Chướng ngại sư phạm

Phân tích mối quan hệ thể chế Toán đối với đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm cho phép rút ra hai chướng ngại:

- *Chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc hiểu tính chất bảo toàn phép toán của hai nhóm. Chướng ngại này sinh ra các khó khăn mà sinh viên phải đương đầu khi xét đồng cấu nhóm có các phép toán khác nhau trong hai nhóm;
- *Chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc xác định đồng cấu giữa hai nhóm.

1.5. Giả thuyết nghiên cứu

Từ khảo sát thực tế, phân tích khái niệm và mối quan hệ thể chế toán của đồng cấu nhóm, đẳng cấu nhóm cho phép rút ra giả thuyết nghiên cứu sau:

H: tồn tại ba khó khăn ở hầu hết sinh viên khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm, các khó khăn này có nguồn gốc từ chướng ngại *trừu tượng hóa* và bởi ảnh hưởng của *chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc hiểu tính chất bảo toàn phép toán;

KK1: không nhận ra yếu tố cơ bản "tập nguồn và tập đích là các nhóm";

KK2: không hiểu rõ tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm";

KK3: không hiểu rõ tính chất "tương ứng một-một".

Giả thuyết nghiên cứu này sẽ được kiểm chứng bằng một thực nghiệm trong phần tiếp theo.

2. Thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành vào cuối tháng 4/2020 trên 110 sinh viên, trong đó gồm 51 sinh viên năm hai ngành Sư phạm Toán của Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHSP TPHCM) đã học xong học phần Đại số tuyến tính 1 (45 tiết), Đại số tuyến tính 2 (45 tiết), Đại số đại cương 1 (45 tiết), và 59 sinh viên năm nhất ngành Sư phạm Toán của Trường ĐHSG đã học xong học phần Đại số tuyến tính (90 tiết) và hoàn thành kiến thức về đồng cấu nhóm trong học phần Đại số đại cương.

Thực nghiệm được thực hiện theo hai phương thức: đối với các sinh viên năm hai ngành Sư phạm Toán của Trường ĐHSP TPHCM, chúng tôi gửi bộ câu hỏi điều tra qua thư điện tử và các sinh viên quan tâm gửi lại cho chúng tôi bản trả lời, đối với sinh viên năm nhất ngành Sư phạm Toán của Trường ĐHSG, chúng tôi đến lớp và yêu cầu sinh viên trả lời các câu hỏi điều tra dưới dạng viết, thời gian khoảng một giờ.

2.1. Nội dung thực nghiệm

Bộ câu hỏi điều tra được thiết kế nhằm kiểm chứng giả thuyết nghiên cứu **H**. Do đó, các câu hỏi được thiết kế bao gồm các kiểu nhiệm vụ:

T1: Mô tả tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm" của đồng cấu nhóm;

T2: Mô tả tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" của đồng cấu nhóm;

T3: Mô tả tính chất "tương ứng một-một" của đẳng cấu nhóm;

T4: Kiểm chứng tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm" của đồng cấu nhóm;

T5: Kiểm chứng tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" của đồng cấu nhóm;

T6: Kiểm chứng tính chất "tương ứng một-một" của đẳng cấu nhóm.

Bộ câu hỏi được thiết kế gồm ba mục tiêu gắn liền với các kiểu nhiệm vụ sau

- ***Mục tiêu 1.*** *Mô tả các tính chất của định nghĩa*

Các diễn tả sau đây là về định nghĩa đồng cấu nhóm và đẳng cấu

Định nghĩa 1. cho $(G,.)$ và $(H,+)$ là các nhóm. Một ánh xạ $\varphi\colon G \to H$ sao cho $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ với mọi $x, y \in G$ được gọi là một đồng cấu nhóm.

Định nghĩa 2. ánh xạ $\varphi\colon G \to H$ được gọi là một đẳng cấu (còn G và H thì nói là đẳng cấu nhau, kí hiệu $G \cong H$) nếu φ là một đồng cấu và φ là song ánh.

Câu hỏi 1. Bạn hiểu như thế nào về định nghĩa "đồng cấu nhóm"?

Câu hỏi 2. Bạn hiểu như thế nào về định nghĩa "đẳng cấu nhóm"?

Câu hỏi 1 thuộc kiểu nhiệm vụ T1 và T2: Mô tả tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm" và "bảo toàn phép toán của hai nhóm" của đồng cấu nhóm.

Mục đích của Câu hỏi 1 là nhằm xác định xem sinh viên có biết rằng G và H phải là các nhóm và xem họ có thể hiểu được diễn đạt điều kiện đồng cấu $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ *với mọi* x,

$y \in G$ chính là tính chất bảo toàn phép toán của hai nhóm không. Câu trả lời mong đợi là "Đồng cấu nhóm là ánh xạ từ nhóm này đến nhóm kia và bảo toàn phép toán của hai nhóm".

Câu hỏi 2 thuộc kiểu nhiệm vụ T1, T2 và T3: Mô tả tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm", "bảo toàn phép toán của hai nhóm" và "tương ứng một-một" của đẳng cấu nhóm.

Mục đích của Câu hỏi 2 là nhằm xác định xem sinh viên có biết rằng ngoài hai tính chất của đồng cấu nhóm thì ánh xạ φ có tính chất tương ứng một-một không. Câu trả lời mong đợi là "Đẳng cấu nhóm là ánh xạ có tương ứng một-một từ nhóm này đến nhóm kia và bảo toàn phép toán của hai nhóm".

- ***Mục tiêu 2.*** *Kiểm chứng tính chất của đồng cấu nhóm*

  Bạn hãy cho biết trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đồng cấu nhóm? Hãy giải thích?

  Câu hỏi 3.

  $$\begin{aligned} f:(G,.) &\to (H,+) \\ x &\mapsto f(x)=\log x \end{aligned}$$ trong đó $G=(1,+\infty); H=[0,+\infty)$

  Câu hỏi 4.

  $$\begin{aligned} f:(\mathbb{R},+) &\to (\mathbb{R}^*,.) \\ x &\mapsto f(x)=e^{x+1} \end{aligned}$$ trong đó $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

  Câu hỏi 5.

  $$\begin{aligned} f:(G,+) &\to G/H \\ x &\mapsto f(x)=\overline{2x} \end{aligned}$$ trong đó $(G,+)$ là nhóm giao hoán và *H* là nhóm con chuẩn tắc của G

Câu hỏi 3 thuộc kiểu nhiệm vụ T4: Kiểm chứng tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm" của đồng cấu nhóm.

Mục đích của Câu hỏi 3 là nhằm xác định xem sinh viên có kiểm chứng *(G,.)* và *(H,+)* là các nhóm không. Câu trả lời đúng là "Không là đồng cấu nhóm vì *(G,.)* chỉ là nửa nhóm và *(H,+)* chỉ là vị nhóm".

Câu hỏi 4 và Câu hỏi 5 thuộc kiểu nhiệm vụ T5: Kiểm chứng tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" của đồng cấu nhóm.

Mục đích của Câu hỏi 4 là nhằm xác định xem sinh viên có kiểm chứng *f(x + y) = f(x).f(y)* đúng *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$ không. Câu trả lời đúng là "Không là đồng cấu nhóm vì tồn tại hai số thực *x, y* thỏa *f(x + y) ≠ f(x).f(y)*".

Mục đích của Câu hỏi 5 là nhằm xác định xem sinh viên có kiểm chứng *f(x+y) = f(x)+f(y)* đúng *với mọi* $x, y \in G$ không. Câu trả lời đúng là "Đồng cấu nhóm vì *f(x+y) = f(x)+f(y)* đúng *với mọi* $x, y \in G$".

- ***Mục tiêu 3.*** *Kiểm chứng tính chất của đẳng cấu nhóm*

  Bạn hãy cho biết trong các đồng cấu nhóm sau, đồng cấu nào là đẳng cấu? Hãy giải thích?

  Câu hỏi 6.

  $$\begin{aligned} f:G &\to G \\ x &\mapsto f(x)=a^{-1}xa \end{aligned}$$ trong đó $(G,.)$ là nhóm và $a \in G$

  Câu hỏi 7.

  $$\begin{aligned} f:5\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_5 \\ x &\mapsto f(x)=\overline{x} \end{aligned}$$

Câu hỏi 8.

$$f:\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$$
$$\overline{x} \mapsto f\left(\overline{x}\right) = 2\overline{x}$$

Câu hỏi 6, Câu hỏi 7 và Câu hỏi 8 thuộc kiểu nhiệm vụ T6: Kiểm chứng tính chất "tương ứng một-một" của đẳng cấu nhóm.

Mục đích của Câu hỏi 6 là nhằm xác định xem sinh viên có kiểm chứng tính đơn ánh và toàn ánh của ánh xạ *f* không. Câu trả lời đúng là "Đẳng cấu nhóm vì *f* là song ánh".

Mục đích của Câu hỏi 7 là nhằm xác định xem sinh viên có kiểm chứng tính không đơn ánh hoặc không toàn ánh của ánh xạ *f* không. Câu trả lời đúng là "Không là đẳng cấu nhóm vì *f* không là song ánh".

Mục đích của Câu hỏi 8 là nhằm xác định xem sinh viên có nhận thấy $\mathbb{Z}_3$ và $\mathbb{Z}_6$ là hai nhóm hữu hạn không cùng lực lượng (số phần tử) nên không thể thỏa tính chất tương ứng một-một. Câu trả lời đúng là "Không là đẳng cấu nhóm vì *f* không là song ánh".

2.2. Dự kiến các chiến lược giải và khó khăn của sinh viên khi trả lời các câu hỏi

Bảng 2 dưới đây dự kiến các chiến lược giải gắn liền với 8 câu hỏi trên và khả năng kiểm chứng các khó khăn của sinh viên.

***Bảng 2.** Chiến lược giải và khó khăn cho mỗi câu hỏi thực nghiệm*

Câu hỏi	Chiến lược	Mô tả lời giải	Khó khăn
1	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	Ánh xạ từ nhóm này đến nhóm kia	KK1
		Ánh xạ bảo toàn phép toán của hai nhóm	KK2
2	S_{DGI}: định nghĩa đẳng cấu nhóm	Ánh xạ từ nhóm này đến nhóm kia	KK1
		Ánh xạ bảo toàn phép toán của hai nhóm	KK2
		Ánh xạ là tương ứng một-một	KK3
3	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	*(G,.)* là nửa nhóm và *(H,+)* là vị nhóm nên *f* không là đồng cấu nhóm	KK1
4	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	Chọn $0,1\in\mathbb{R}$ $f\left(0+1\right)=f\left(1\right)=e^2 \neq e.e^2 = f\left(0\right).f\left(1\right)$ nên *f* không là đồng cấu nhóm	KK2
	S_T: định lí	*0* là phần tử đơn vị của nhóm $\left(\mathbb{R},+\right)$ và *1* là phần tử đơn vị của nhóm $\left(\mathbb{R}^*,.\right)$ nhưng $f(0) = e \neq 1$ nên *f* không là đồng cấu nhóm	KK2
5	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	$\forall x, y\in G$ $f\left(x+y\right)=2\left(\overline{x+y}\right)=2\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\left(\overline{x}+\overline{y}\right)$ $=\left(\overline{x}+\overline{x}\right)+\left(\overline{y}+\overline{y}\right)=2\overline{x}+2\overline{y}=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ Vậy *f* là đồng cấu nhóm	KK2

6	S_{DB}: định nghĩa song ánh	$\forall x_1, x_2 \in G$ $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow a^{-1}x_1a = a^{-1}x_2a \Rightarrow x_1 = x_2$ Suy ra *f* là đơn ánh $\forall y\in G, \exists x = aya^{-1}\in G:$ $f(x)=f(aya^{-1})=a^{-1}(aya^{-1})a=y$ Suy ra *f* là toàn ánh Vậy *f* là đẳng cấu	KK3
	S_T: định lí	$x\in Ker\,f \Leftrightarrow f(x)=e \Leftrightarrow x=aea^{-1}=e$ $\Rightarrow Ker\,f=\{e\}$ Suy ra *f* là đơn ánh $\forall y\in G, \exists x = aya^{-1}\in G:$ $f(x)=f(aya^{-1})=a^{-1}(aya^{-1})a=y$ $\Rightarrow y\in Im\,f \Rightarrow Im\,f=G$ Suy ra *f* là toàn ánh Vậy *f* là đẳng cấu	KK3
7	S_{DI}: định nghĩa đơn ánh	Chọn $5,10\in 5\mathbb{Z}(5\neq 10)$ $f(5)=\overline{5}=\overline{0}=\overline{10}=f(10)$ nên *f* không là đơn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
	S_{DS}: định nghĩa toàn ánh	Chọn $\overline{1}\in\mathbb{Z}_5$, $f(x)=\overline{x}=\overline{0}\neq\overline{1}, \forall x\in 5\mathbb{Z}$ nên *f* không là toàn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
	S_T: định lí	$x\in Ker\,f \Leftrightarrow \overline{x}=\overline{0} \Leftrightarrow x\in 5\mathbb{Z} \Rightarrow Ker\,f\neq\{0\}$ nên *f* không là đơn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
		$\forall x\in 5\mathbb{Z}, f(x)=\overline{x}=\overline{0} \Rightarrow Im\,f=\{\overline{0}\}\neq\mathbb{Z}_5$ nên *f* không là toàn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
8	S_{DS}: định nghĩa toàn ánh	Chọn $\overline{1}\in\mathbb{Z}_6$, ta có $\overline{0},\overline{1},\overline{2}\in\mathbb{Z}_3$ mà $f(\overline{0})=\overline{0}\neq\overline{1}, f(\overline{1})=\overline{2}\neq\overline{1}, f(\overline{2})=\overline{4}\neq\overline{1}$ nên *f* không là toàn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
	S_{DB}: định nghĩa song ánh	$\mathbb{Z}_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}, \mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$ là hai tập hữu hạn có số phần tử khác nhau nên *f* không là song ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3
	S_T: định lí	$Im\,f=f(\mathbb{Z}_3)=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}\neq\mathbb{Z}_6$ nên *f* không là toàn ánh Vậy *f* không là đẳng cấu	KK3

2.3. *Phân tích hậu nghiệm*

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả phân tích câu trả lời của sinh viên cho mỗi câu hỏi trong bộ câu hỏi điều tra gồm ba mục tiêu gắn liền với các chiến lược giải.

- ***Mục tiêu 1.*** *Mô tả các tính chất của định nghĩa*

Chiến lược giải cho câu hỏi 1 là S_{DGH} và câu hỏi 2 là S_{DGI} nhằm mô tả các tính chất trong định nghĩa đồng cấu nhóm và định nghĩa đẳng cấu nhóm. Hầu hết sinh viên tham gia trả lời cho hai câu hỏi này, kết quả có trong bảng sau:

Bảng 3. *Kết quả trả lời câu hỏi 1, 2 của sinh viên*

Mô tả tính chất	Đúng đáp án	Tỉ lệ	Không đúng đáp án	Tỉ lệ
Ánh xạ từ nhóm này đến nhóm kia	44	40%	66	60%
Ánh xạ bảo toàn phép toán của hai nhóm	11	10%	89	80,91%
Ánh xạ là tương ứng một-một	92	83,64%	18	16,36%

Đối với tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm", 66/110 sinh viên hoàn toàn không mô tả điều kiện tập nguồn và tập đích của ánh xạ là các nhóm. 89/110 sinh viên không hiểu đúng tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm", phần lớn họ mô tả điều kiện đồng cấu được diễn đạt trong định nghĩa đồng cấu nhóm là "ánh xạ biến tích thành tổng", "ánh xạ có tính chất nhân", "ánh xạ biến phần tử thuộc tập đi thành phần tử thuộc tập đến", "ánh xạ liên thông giữa hai nhóm giống nhau về mặt cấu trúc" hay "ánh xạ bảo toàn cấu trúc nhóm". 4/92 sinh viên sử dụng thuật ngữ chính xác "tương ứng một-một" thay cho song ánh, 88/92 sinh viên sử dụng lại thuật ngữ "ánh xạ là song ánh" để mô tả đẳng cấu; tuy nhiên vẫn có 18/110 sinh viên không mô tả được tính chất "tương ứng một-một" bằng các thuật ngữ tương đương như "ánh xạ là song ánh" hay "ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh" trong định nghĩa đẳng cấu nhóm.

Kết quả phân tích cho thấy sinh viên gặp khá nhiều khó khăn khi tiếp cận định nghĩa đồng cấu nhóm. Tỉ lệ sinh viên trả lời không chính xác tính chất "tập nguồn và tập đích là các nhóm" và tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" trong định nghĩa đồng cấu nhóm lần lượt chiếm 60% và 80,91%. Việc không nhận ra yếu tố cơ bản "tập nguồn và tập đích là các nhóm" (KK1) và hiểu đúng tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" (KK2) có thể là nguyên nhân dẫn đến các sai lầm của sinh viên khi đương đầu với các ánh xạ và tập hợp cụ thể trong bài toán đồng cấu nhóm.

- ***Mục tiêu 2.*** *Kiểm chứng tính chất của đồng cấu nhóm*

Kết quả trả lời câu hỏi của sinh viên gắn liền với chiến lược giải được thống kê trong Bảng 4:

Bảng 4. *Kết quả trả lời câu hỏi 3, 4, 5 của sinh viên*

Câu hỏi	Chiến lược	Đúng đáp án	Tỉ lệ	Không đúng đáp án	Tỉ lệ
3	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	6	5,45%	97	88,18%
4	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	17	15,45%	83	75,45%
	S_T: định lí	3	2,73%	0	0%
5	S_{DGH}: định nghĩa đồng cấu nhóm	13	11,82%	90	81,82%

Trả lời Câu hỏi 3, chỉ có 6/110 sinh viên kiểm chứng *(G,.)* là nửa nhóm và *(H,+)* là vị nhóm, 97/110 sinh viên thực sự sai lầm khi bỏ qua kiểu nhiệm vụ này mà chỉ tiến hành kiểm chứng tính chất bảo toàn phép toán của hai nhóm" nên có câu trả lời không chính xác.

Chiến lược giải S_{DGH} được nhiều sinh viên huy động nhất (90,91%) để tìm câu trả lời cho Câu hỏi 4; tuy nhiên, 83% sinh viên trong số đó lời trả không chính xác. Chẳng hạn, nhiều sinh viên phạm sai lầm khi kiểm chứng tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm" bằng cách chứng minh $f(xy) \neq f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$ hay chứng minh $f(xy) \neq f(x) f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đối với Câu hỏi 5, có 81,82% sinh viên trả lời không đúng đáp án, các sai lầm này do sinh viên không hiểu rõ tính chất "bảo toàn phép toán của hai nhóm". Một số sinh viên quan niệm "mọi đồng cấu nhóm là ánh xạ có tính chất $f(xy) = f(x) + f(y); \forall x, y \in G$", một số khác quan niệm "đồng cấu nhóm là ánh xạ có tính chất nhân" thì chứng minh $f(xy) = f(x) f(y); \forall x, y \in G$, các sinh viên còn lại không nhận ra phép toán trong nhóm thương *G/H* kế thừa phép toán *"+"* của nhóm *G* nên chứng minh $f(x+y) = f(x) f(y); \forall x, y \in G$.

Kết quả phân tích cho thấy sinh viên thực sự gặp khó khăn trong giải quyết bài toán đồng cấu nhóm khi đương đầu với các ánh xạ và tập hợp cụ thể. KK1 là nguyên nhân chính khiến 88,18% sinh viên trả lời không chính xác Câu hỏi 3. Tỉ lệ sinh viên trả lời không đúng đáp án câu hỏi 4 và câu hỏi 5 lần lượt chiếm 75,45% và 81,82% có nguyên nhân từ KK2.

- ***Mục tiêu 3.*** *Kiểm chứng tính chất của đẳng cấu nhóm*

Bảng thống kê sau cho biết kết quả trả lời câu hỏi của sinh viên gắn liền với chiến lược giải

Bảng 5. *Kết quả trả lời câu hỏi 6, 7, 8 của sinh viên*

Câu hỏi	Chiến lược	Đúng đáp án	Tỉ lệ	Không đúng đáp án	Tỉ lệ
6	S_{DB}: định nghĩa song ánh	19	17,27%	57	51,82%
	S_T: định lí	3	2,73%	0	0%
7	S_{DI}: định nghĩa đơn ánh	12	10,91%	9	8,18%
	S_{DS}: định nghĩa toàn ánh	12	10,91%	40	36,36%
	S_T: định lí	4	3,64%	0	0%
8	S_{DS}: định nghĩa toàn ánh	5	4,55%	57	51,82%
	S_{DB}: định nghĩa song ánh	9	8,18%	0	0%
	S_T: định lí	5	4,55%	0	0%

Đối với câu hỏi 6, chiến lược giải S_{DB} được nhiều sinh viên sử dụng để xét tính song ánh của ánh xạ, tuy nhiên 57/76 sinh viên sử dụng chiến lược này trả lời không đúng đáp án. Các quan niệm sai lầm về song ánh như "$\forall y \in G$ luôn tồn tại $x \in G$ sao cho $y = a^{-1}xa$ nên f là song ánh do đó là đẳng cấu" hay "Giả sử tồn tại $y = f(x) \in G$. Khi đó tồn tại x =

$aya^{-1} \in G$, sao cho $y = a^{-1}xa$. Vậy đồng cấu f là song ánh do đó là đẳng cấu" được tìm thấy trong lời giải của nhiều sinh viên.

Đối với Câu hỏi 7, hầu hết sinh viên không nhận thấy ánh xạ *f* là *đồng cấu tầm thường* hay $\mathbb{Z}_5$ là nhóm hữu hạn nên tính chất "tương ứng một-một" không thể thỏa mãn trong trường hợp này. Có 52 sinh viên huy động chiến lược giải S_{DI} để xét tính toàn ánh và 21 sinh viên huy động chiến lược giải S_{DS} để xét tính đơn ánh của ánh xạ; tuy nhiên, 49 sinh viên có câu trả lời không chính xác khi sử dụng hai chiến lược này, kiểu nhiệm vụ chứng minh ánh xạ không là toàn ánh hay không là đơn ánh là một khó khăn của họ trong trường hợp này. Chẳng hạn một sinh viên lí luận "$\forall y \in \mathbb{Z}_5$ không tồn tại $x \in 5\mathbb{Z}$ sao cho y = f(x) nên f không là song ánh do đó không là đẳng cấu".

Đối với Câu hỏi 8, có 9 sinh viên nhận ra $\mathbb{Z}_3$ và $\mathbb{Z}_6$ là hai nhóm hữu hạn có số phần tử khác nhau nên chiến lược giải S_{DB} được các sinh viên này sử dụng thành công để chứng minh tính chất "tương ứng một-một" không thỏa mãn. 62 sinh viên sử dụng chiến lược giải S_{DI} để xét tính toàn ánh và 57/62 sinh viên này gặp khó khăn khi chứng minh ánh xạ không là toàn ánh để tìm ra lời giải đúng trong trường hợp này.

Các sinh viên sử dụng chiến lược giải S_T để xét tính đơn ánh và toàn ánh của ánh xạ bằng định lí về hạt nhân *(Ker)* và ảnh *(Im)* của đồng cấu nhóm luôn có câu trả lời chính xác trong cả ba câu hỏi.

Kết quả phân tích cho thấy sinh viên gặp nhiều khó khăn và phạm nhiều sai lầm hơn khi xét tính đơn ánh và toàn ánh của ánh xạ bằng định nghĩa. Các khó khăn của sinh viên gắn liền với các quan niệm không chính xác về toàn ánh, đơn ánh. Tỉ lệ sinh viên không trả lời và trả lời không chính xác câu hỏi 6, 7, 8 lần lượt chiếm 80%, 74,55%, 82,73% có nguyên nhân từ KK3.

3. Kết luận

Kết quả thực nghiệm cho thấy thực sự tồn tại ba khó khăn ở hầu hết sinh viên khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm trong giả thuyết **H.**

KK1 thể hiện rõ ở kết quả trả lời của sinh viên cho Câu hỏi 1 và 3, họ quan niệm tập hợp trong ánh xạ thỏa điều kiện đồng cấu nhóm là hai tập hợp không nhất thiết có cấu trúc nhóm.

KK2 thể hiện rõ ở kết quả trả lời của sinh viên cho Câu hỏi 1, 3, 4 và 5, họ quan niệm không chính xác về ánh xạ bảo toàn phép toán của hai nhóm. Khó khăn này có nguồn gốc từ chướng ngại *trừu tượng hóa* và bởi ảnh hưởng của *chướng ngại sư phạm* liên quan đến việc hiểu tính chất bảo toàn phép toán.

KK3 thể hiện rõ ở kết quả trả lời của sinh viên cho Câu hỏi 2, 6, 7 và 8. Khó khăn này thể hiện ở các quan niệm không chính xác về đơn ánh và toàn ánh.

Nghiên cứu này nhằm tìm hiểu các khó khăn mà sinh viên gặp phải khi tiếp cận khái niệm đồng cấu nhóm và đẳng cấu nhóm để có cái nhìn chính xác về nguồn gốc các sai lầm của sinh viên, từ đó các nhà đào tạo có thể thiết kế chương trình tối ưu giúp sinh viên vượt qua các khó khăn này.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ho Chi Minh City University of Education (2016). *Chuong trinh dao tao Cu nhan Su pham Toan* [*Higher education program - Bachelor of Teaching Mathematics*].

Sai Gon University (2016). *Chuong trinh dao tao trinh do Dai hoc, nganh Su pham Toan* [*Higher education program – Bachelor of Teaching Mathematics]*.

Thomas, W. J. (2017). *Abstract Algebra: Theory and Applications*. PWS Publishing Company.

Ton T. T., & Dong T. T. (2014). *Giao trinh Dai so dai cuong*. [*General algebra: study documents in Sai Gon University*]. Saigon University.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE DIFFICULTIES INVOLVED IN LEARNING THE CONCEPT OF GROUP ISOMORPHISM

Nguyen Thi Van Khanh

Saigon University

Corresponding author: Nguyen Thi Van Khanh – Email: ntvkhanh@sgu.edu.vn

Received: June 02, 2020; Revised: August 18, 2020; Accepted: November 25, 2020

ABSTRACT

In this paper, we present the result of an experimental research about three difficulties that students face in learning the concept of group homomorphism and group isomorphism: (1) Not realize the basic element that "Domain and codomain are groups"*; (2) Not understand the nature of the property that "operations of two groups are preserved"; (3) Not understand the nature of the property that* "the map is one-to-one". *These difficulties originate from the epistemological obstacles and are influenced by the pedagogical obstacles due to institutional relations of university mathematics to the concept of group homomorphism and group isomorphism. The purpose of this research is to find out difficulties of students in learning the concept of group homomorphism and group isomorphism and help the trainers understand exactly the sources of student mistakes and thence be able to design optimal lectures to help students overcome these difficulties.*

Keywords: epistemological obstacles; difficulties; group homomorphism; group isomorphism