TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 17, Số 6 (2020): 1125-1136

Vol. 17, No. 6 (2020): 1125-1136

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

BIẾN DẠNG CỦA PHẠM TRÙ MONOID VÀ TỰA ĐA PHỨC YETTER

***Nguyễn Ngọc Ái Vân*[1], *Đinh Văn Hoàng*[2*]**

[1]*Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM, Việt Nam*

[2]*Trường Đại học Sư phạm Kỹ Thuật Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Đinh Văn Hoàng – Email: hoangdv@hcmute.edu.vn*

Ngày nhận bài: 26-12-2019; ngày nhận bài sửa: 17-3-2020, ngày chấp nhận đăng: 24-6-2020

TÓM TẮT

Chúng tôi giới thiệu đến đọc giả trong nước chủ đề về lí thuyết biến dạng đại số của Murray Gerstenhaber được phát triển từ những năm 1960. Đây là chủ đề đang được nghiên cứu rất mạnh trong hình học đại số. Ngoài ra chúng tôi cũng áp dụng lí thuyết này trong việc nghiên cứu các biến dạng bậc nhất của các phạm trù monoid và đã đạt được một kết quả mới trong việc nghiên cứu các thành phần bậc thấp (bậc 1, 2 và 3) của đồng cấu vi phân trong tựa phức Yetter. Trong Shrestha (2010), tác giả đã đưa ra công thức các thành phần bậc 1, 2 và 3 cho đồng cấu vi phân của dãy tiền đa phức của Yetter. Công thức của Shrestha là chưa hoàn chỉnh. Ở bài báo này chúng tôi xây dựng công thức hoàn chỉnh cho các thành phần bậc 1, 2 và 3 này. Hơn nữa, chúng tôi chứng minh rằng xây dựng mà chúng tôi đưa ra là hợp lí.

Từ khóa: biến dạng đại số; đại số đồng điều

1. Giới thiệu

Lí thuyết biến dạng của các đa tạp vi phân, lược đồ đại số được đặt nền móng nghiên cứu đầu tiên trong công trình Kodaira và Spencer (1958). Gerstenhaber (1964) phát triển lí thuyết biến dạng cho các đại số trên một trường nền *k*. Kể từ đó lí thuyết biến dạng được nghiên cứu mạnh mẽ trong nhiều lĩnh vực của toán học. Ngày nay, lí thuyết biến dạng đã trở thành một lĩnh vực nghiên cứu nằm giữa sự giao thoa của Đại số, Hình học, Tô pô và Vật lí toán. Có thể kể qua một số nghiên cứu về lí thuyết biến dạng nổi bậc trong những năm gần đây như sau:

- Biến dạng của các nửa bó đại số được nghiên cứu trong Gerstenhaber, và Schack (1983; 1988);
- Biến dạng của các đại số Lie và các đồng cấu Lie được nghiên cứu trong Nijenhuis, và Richardson (1967);
- Biến dạng của đa tạp Poisson, biến dạng lượng tử hóa được nghiên cứu trong Shoikhet (2010); Konsevich (2003);
- Biến dạng của phạm trù giao hoán được nghiên cứu trong Lowen, và van den Bergh (2006; 2008);
- Biến dạng của phạm trù tuyến tính, phạm trù momoidal được nghiên cứu trong Yetter (2009); Shrestha (2010); Yetter, và Shrestha (2014).

Cite this article as: Nguyen Ngoc Ai Van, & Dinh Van Hoang (2020). Deformation of monoidal category and yetter multi pre-complex. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(6), 1125-1136.

Bài báo của chúng tôi gồm hai mục đích chính. Đầu tiên là giới thiệu về lí thuyết biến dạng đại số được khởi xướng từ những năm 1960 và hiện đang được nghiên cứu rất mạnh mẽ trên thế giới. Kế đến chúng tôi tập trung vào nghiên cứu và mở rộng một số kết quả trong bài toán biến dạng của các phạm trù monoid được khởi xướng trong Yetter, và Shrestha (2010). Bài toán biến dạng phạm trù monoid được Yetter và Shrestha nghiên cứu dựa trên việc khái quát lí thuyết biến dạng của một đại số trong Gerstenhaber (1964) để áp dụng cho trường hợp phạm trù monoid. Trong lí thuyết biến dạng của một đại số *A*, ta có kết quả cơ bản sau:

Định lí 1.1.

Cho *A* là một đại số trên trường *k*. Khi đó

- Các biến dạng bậc 1 của *A* tương ứng 1: 1 với nhóm đối đồng điều Hochschild bậc hai;
- Các biến dạng bậc cao của *A* được kiểm soát bởi cấu trúc đại số Lie phân bậc trên dãy phức Hochschild thông qua phương trình Mauer-Cartan.

Do đó ta thấy, toàn bộ các biến dạng của một đại số *A* được kiểm soát bởi dãy phức Hochschild. Trong nghiên cứu về biến dạng của phạm trù monoid, Yetter và Shrestha cố gắng xây dựng một dãy đa phức để kiểm soát các biến dạng của phạm trù monoid tương tự như trong trường hợp biến dạng của đại số *A*. Yetter đã dự đoán và đề xuất một dãy đa phức nhưng không thể thu được một dãy đa phức hoàn chỉnh vì việc xây dựng các đồng cấu vi phân trên dãy đa phức này vô cùng phức tạp. Trong Shrestha (2010), Shrestha giới thiệu dãy đa phức của Yetter, và dự đoán các đồng cấu vi phân cho các đối dây chuyền bậc thấp (bậc 1,2,3). Trong bài báo này, chúng tôi hoàn chỉnh các đồng cấu vi phân này và đưa ra một chứng minh cho sự hợp lí trong việc cách xây dựng của chúng tôi thông qua Định lí 4.4. Trong kế hoạch nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ áp dụng những kĩ thuật trong việc xây dựng đa phức mà chúng tôi đạt được trong Dinh Van, và Lowen (2018) để xây dựng toàn bộ các đồng cấu vi phân cho dãy đa phức Yetter.

2. Biến dạng của đại số

Trong phần này chúng tôi giới thiệu sơ lược các kết quả quan trọng nhất trong lí thuyết biến dạng đại số của Gerstenhaber, các chứng minh chi tiết được tìm thấy trong Gerstenhaber, M. (1964).

Định nghĩa 2.1.

Cho *A* là một đại số trên trường *k*. Một *biến dạng* của *A* là *k*-đại số $A[[t]] = A\otimes_k k[[t]]$ với phép nhân $F(a,b)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i(a,b)t^i$ trong đó f_0 chính là phép nhân trong *A* và $f_i \in Hom_k(A\otimes A, A), a,b\in A$. Phép nhân này được mở rộng tuyến tính từ các phần tử trong *A* lên thành phép nhân trong $A[[t]]$.

Vì $A[[t]]$ cùng với phép nhân *F* lập thành một *k*-đại số nên ta có

$$F(a,F(b,c)) = F(F(a,b),c), \forall a,b,c\in A$$

Khai triển đẳng thức này, với mỗi n = 0,1, 2, 3,..., ta thu được

$$(2.1)\quad \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 0}} F_i(a,F_j(b,c)) - F_i(F_j(a,b),c) = 0.$$

Biến dạng bậc 1 của đại số A là biến dạng $A[t] \equiv A + At\left(t^2 = 0\right)$ với phép nhân $F(a,b) = ab + f_1(a,b)t, \forall a,b \in A$. Trong trường hợp này ta thường viết $A[\varepsilon] = A + A\varepsilon$ thay cho $A[t]$.

Định nghĩa 2.2.

Hai biến dạng $\left(A[[t]],F\right)$ và $\left(A[[t]],G\right)$ của đại số A được gọi là tương đương nhau, ta viết $\left(A[[t]],F\right) \cong \left(A[[t]],G\right)$, nếu tồn tại một đẳng cấu k-đại số $\varnothing : \left(A[[t]],F\right) \to \left(A[[t]],G\right)$ có dạng $\varnothing(a) = a + \varnothing_1(a)t + \varnothing_2(a)t^2 + ...; \forall a \in A$, trong đó $\varnothing_i \in Hom_k(A, A)$.

Định nghĩa 2.3.

Đối đồng điều Hochschild của một đại số A với hệ số trong A-môđun hai phía M là đối đồng điều của dãy phức Hochschild:

$$0 \to M \to C^1(A,M) \to C^2(A,M) \to ...$$

trong đó, $C^n(A,M) = Hom_k\left(A^{\otimes n}, M\right)$ là không gian các hàm k-tuyến tính từ $A^{\otimes n}$ vào M, và đồng cấu vi phân $\delta : C^n(A,M) \to C^{n+1}(A,M)$ được định nghĩa như sau:

$$\delta f(a_0 \otimes ... \otimes a_n) = a_0 f(a_1 \otimes ... \otimes a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(a_1 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_n)$$
$$+(-1)^n f(a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1})a_n$$

Kí hiệu nhóm đối đồng điều Hochschild thứ n của A là $H^n_{Hoch}(A,M) = H^n\left(C^\bullet(A,M)\right)$.

Giả sử $F = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$ là một biến dạng của đại số A. Giả sử f_n là thành phần khác 0 đầu tiên của F ngay sau f_0, khi đó f_n được gọi là *thành phần vô cùng bé* của F. Từ phương trình (2.1) ta có phương trình

$$af_n(b,c) - f_n(ab,c) + f_n(a,bc) - f_n(a,b)c = 0, \forall a,b,c \in A$$

Vì $f_n \in C^2(A,A)$ thì phương trình này được viết lại là $\delta(f_n) = 0$. Từ đây suy ra $f_n \in Z^2(A,A)$. Điều này cho ta mối liên hệ đầu tiên giữa biến dạng đại số và đối đồng điều Hochschild.

Định lí 2.4.

Cho $F = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$ là một biến dạng của đại số A. Khi đó thành phần vô cùng bé của F là một 2-đối chu trình trong dãy phức Hochschild $C^\bullet(A,A)$.

Hệ quả 2.5.

Cho (A, μ) là một đại số trên trường k, trong đó μ là phép nhân trên A. Khi đó, đại số $\left(A|\varepsilon| = A + A\varepsilon, \overline{\mu} = \mu + \mu_1\varepsilon\right)$ là một biến dạng của đại số A nếu và chỉ nếu μ_1 là một 2-đối chu trình trong dãy phức Hochschild $C^\bullet(A,A)$.

Cho $\left(A[\varepsilon], \overline{\mu} = \mu + \mu_1\varepsilon\right)$ và $\left(A[\varepsilon], \tilde{\mu} = \mu + \mu_1^{'}\varepsilon\right)$ là các biến dạng của đại số A. Giả $(A[\varepsilon], \overline{\mu} = \mu + \mu_1\varepsilon) \cong (A[\varepsilon], \tilde{\mu} = \mu + \mu_1^{'}\varepsilon)$, gọi $\varnothing = \varnothing_0 + \varnothing_1\varepsilon$ là một đẳng cấu giữa chúng. Khai triển đẳng thức đẳng cấu $\tilde{\mu}\left(\varnothing(a), \varnothing(b)\right) = \varnothing\left(\overline{\mu}(a,b)\right), \forall a,b \in A$ ta thu được

$$ab + \mu_1^{'}(a,b)\varepsilon + a\varnothing_1(b)\varepsilon + \varnothing_1(a)b\varepsilon = ab + \varnothing_1(ab)\varepsilon + \mu_1(a,b)\varepsilon, \forall a,b \in A.$$

Hay nói cách khác $\delta(\varnothing) = \mu_1 - \mu_1^{'}$, nghĩa là các các đối chu trình $\mu_1, \mu_1^{'} \in C^2(A,A)$ nằm cùng lớp đồng điều. Do đó ta kết luận hai biến dạng đại số $\left(A[\varepsilon], \overline{\mu} = \mu + \mu_1\varepsilon\right)$ và $\left(A[\varepsilon], \tilde{\mu} = \mu + \mu_1^{'}\varepsilon\right)$ của đại số A là đẳng cấu nhau nếu và chỉ nếu μ_1 và $\mu_1^{'}$ trùng nhau trong nhóm đối đồng điều Hochschild $H^2(C^\bullet(A,A))$.

Ta phát biểu định lí cơ bản sau của lí thuyết biến dạng các đại số.

Định lí 2.6.

Cho A là một đại số trên trường k. Khi đó

(1) Các biến dạng bậc 1 của A tương ứng 1: 1 với nhóm đối đong điều Hochschild bậc hai $H^2(C^\bullet(A,A))$.

(2) *Các biến dạng bậc cao của A được kiểm soát bởi cấu trúc đại số Lie phân bậc trên dãy phức Hochschild* $C^\bullet(A,A)$ *thông qua phương trình Mauer-Cartan.*

3. Biến dạng của phạm trù k-tuyến tính

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu lí thuyết biến dạng cho các phạm trù *k*- tuyến tính, các kết quả đạt được hoàn toàn tương tự lí thuyết biến dạng cho các đại số trên trường *k*. Việc chứng minh các kết quả trong mục này hoàn toàn tương tự các chứng minh cho trường hợp biến dạng của đại số trên trường *k*.

Định nghĩa 3.1.

Phạm trù *M* được gọi là *phạm trù k-tuyến tính* nếu với mọi vật *A, B của M* tập các cấu xạ *M(A, B)* có cấu trúc không gian véctơ trên trường *k*, hơn nữa, tính chất sau phải thỏa mãn:

• Với các cấu xạ $f, g \in M(A,B)$ và $h, l \in M(B,C)$ thì

$$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g \text{ và } (h+l) \circ g = h \circ g + l \circ g.$$

Ví dụ 3.2. Phạm trù các không gian véctơ trên trường *k* là một phạm trù *k*-tuyến tính.

Định nghĩa 3.3.

Dãy phức Hochschild $\left(C^\bullet(M), \delta\right)$ của phạm trù k-tuyến tính M được định nghĩa như sau

$$C^n(M) = \prod_{A_0, A_1, \ldots, A_n \in Ob(M)} Hom_k\left(M(A_{n-1}, A_n) \otimes \ldots \otimes M(A_0, A_1), M(A_0, A_n)\right)$$

trong đó, *Ob(M)* là tập các vật của phạm trù *M*, đồng cấu vi phân δ được định nghĩa tương tự như đồng cấu vi phân trong dãy phức Hochschild cho các đại số.

Định nghĩa 3.4.

Biến dạng của phạm trù tuyến tính M là phạm trù tuyến tính $\widetilde{M}$ có: các vật $Ob\left(\widetilde{M}\right)$ cũng chính là các vật Ob(M) của M, tập các cấu xạ $\widetilde{M}\left(A,B\right)=M\left(A,B\right)\otimes_k k\left[\left[t\right]\right]=M\left(A,B\right)\left[\left[t\right]\right]$, phép hợp nối các cấu xạ $\tilde{o}$ được xác định như sau:

• Với các cấu xạ $f\in M\left(A,B\right), g\in M\left(B,C\right)$ thì

$$g\tilde{\circ}f=\sum_{n=0}^{\infty}F_i\left(g,f\right)t^n$$

trong đó $F_0=\circ, F_n\in C^2\left(M\right)$ với $n\geq 1$.

Việc nghiên cứu các biến dạng của các phạm trù k-tuyến tính hoàn toàn tương tự việc nghiên cứu biến dạng của các k-đại số nên ta có kết quả sau.

Định lí 3.5.

Cho M là một phạm trù k-tuyến tính, khi đó

(1) Các biến dạng bậc 1 của M tương ứng 1:1 với nhóm đối đồng điều bậc hai $H^2\left(C^\bullet\left(M\right)\right)$.

(2) Các biến dạng bậc cao của M được kiểm soát bởi cấu trúc đại số Lie phân bậc trên dãy phức Hochschild $C^\bullet\left(M\right)$ *thông qua phương trình Mauer- Cartan.*

4. Tiền phức Yetter cho phạm trù monoid

Trong mục này chúng tôi giới thiệu định nghĩa của phạm trù monoid *k*-tuyến tính. Để tạo tiền đề cho việc nghiên cứu biến dạng của phạm trù monoid, chúng tôi giới thiệu dãy đa phức Yetter, trên dãy đa phức này chúng tôi xây dựng các đồng cấu vi phân d_0, d_1, d_2 cho các đối dây chuyền bậc thấp (bậc 1,2,3). Hơn nữa, thông qua Định lí 4.4 chúng tôi chứng minh tính hợp lí trong xây dựng của chúng tôi. Các kết quả đạt được ở đây là tổng quát và hoàn chỉnh hơn các kết quả trong Shrestha, T. (2010).

Định nghĩa 4.1.

Phạm trù k-tuyến tính *D* được gọi là phạm trù monoid k-tuyến tính nếu nó được trang bị hàm tử $\otimes: D\times D\to D$, một vật kí hiệu là I, các đẳng cấu chuyển đổi tự nhiên giữa các hàm tử $\omega:\otimes\left(\otimes\times 1_D\right)\Rightarrow\otimes\left(1_D\times\otimes\right), \rho:\otimes I\Rightarrow 1_D, \lambda: I\otimes\Rightarrow 1_D$ sao cho các biểu đồ ngũ giác sau đây giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & & (AB)(CD) \arrow[drr, "\omega_{A,B,CD}"] & & \\
((AB)C)D \arrow[urr, "\omega_{AB,C,D}"] \arrow[dr, "\omega_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & & & & A(B(CD)) \\
 & (A(BC))D \arrow[rr, "\omega_{A,BC,D}"] & & A((BC)D) \arrow[ur, "1_A\otimes\omega_{B,C,D}"'] &
\end{tikzcd}$$

và

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes I)\otimes B \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\rho\otimes B"'] & & A\otimes(I\otimes B) \arrow[dl, "A\otimes\lambda"] \\
& A\otimes B &
\end{tikzcd}$$

Ví dụ 4.2. Phạm trù các không gian véctơ trên trường k cùng với phép k-tenxơ tạo thành một phạm trù monoid k-tuyến tính.

Cho phạm trù monoid $(D,\otimes,\omega,\rho,\lambda)$, ta định nghĩa thành phần thứ *(p, q)* của tựa đa phức Yetter như sau

$$C^{p,q}(D) := \prod_{\substack{A_i\in Ob(D^{\times p})\\ i=1,\dots,q}} Hom_k\left(D^{\times p}(A_0,A_1)\otimes\ldots\otimes D^{\times p}(A_{q-1},A_q), D\left({}^p\otimes A_0, \otimes^p A_q\right)\right)$$

trong đó

- $D^{\times p}$ là tích Đề-các p lần của D;
- Vật $A_i\in Ob(D^{\times p})$ có dạng $A_i=(A_{1,i},A_{2,i},\ldots,A_{p,i})$ với $A_{i,j}$ là vật trong D;
- ${}^p\otimes A_0 = \left(\ldots\left(\left(A_{1,0}\otimes A_{2,0}\right)\right)\otimes A_{3,0}\right)\otimes\ldots\otimes A_{p,0}$;
- $\otimes^p A_q = A_{0,q}\otimes\ldots\otimes\left(A_{p-2,q}\otimes\left(A_{p-1,q}\otimes A_{p,q}\right)\ldots\right)$.

Kể từ đây ta viết tắt $C^{p,q}$ thay cho $C^{p,q}(D)$. Với mỗi $i=1,\ldots,p$, và $A_i=(A_{1,i},A_{2,i},\ldots,A_{p,i})\in Ob(D^{\times p})$, mỗi phần tử của $D^{\times p}(A_0,A_1)\otimes D^{\times p}(A_1,A_2)\otimes\ldots\otimes D^{\times p}(A_{q-1},A_q)$ được biểu diễn bằng ma trận $\left[a_{i,j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,p\\ j=1,\ldots,q}}$ chứa các cấu xạ trong D gồm p cột và q dòng, trong đó cấu xạ $a_{i,j}\in D(A_{i,j-1},A_{i,j})$ như sau

$$\left[a_{i,j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,p\\ j=1,\ldots,q}} = \left[\begin{array}{cccccccc}
 & A_{1,q} & & A_{2,q} & \cdots & & A_{p,q} \\
a_{1,q} & \uparrow & a_{2,q} & \uparrow & & a_{p,q} & \uparrow \\
 & \vdots & & \vdots & \cdots & & \vdots \\
 & A_{1,2} & & A_{2,2} & \cdots & & A_{p,2} \\
a_{1,2} & \uparrow & a_{2,2} & \uparrow & & a_{p,2} & \uparrow \\
 & A_{1,1} & & A_{2,1} & \cdots & & A_{p,1} \\
a_{1,1} & \uparrow & a_{2,1} & \uparrow & & a_{p,1} & \uparrow \\
 & A_{1,0} & & A_{2,0} & \cdots & & A_{p,0}
\end{array}\right]$$

Tập hợp các ma trận như thế này sẽ được kí hiệu là $M^{p,q}(D)$.

Xét dãy hữu hạn các cấu xạ $\left\{B_1\xrightarrow{f_1}C_1,\ldots,B_n\xrightarrow{f_n}C_n\right\}$ trong phạm trù D. Giả sử $f_1\otimes f_2\otimes\ldots\otimes f_n$ là một tích tenxơ theo một thứ tự nhất định, khi đó vật nguồn và vật đích của tích tenxơ này không nhất thiết phải là ${}^n\otimes(B_i)_{i=1,\ldots,n}$ và $\otimes^n(C_i)_{i=1,\ldots,n}$, nên ta cần hợp nối cấu xạ này với những cấu xạ được sinh ra từ phép chuyển đổi đẳng cấu tự nhiên ω để được một cấu xạ đi từ ${}^n\otimes(B_i)_{i=1,\ldots,n}$ tới $\otimes^n(C_i)_{i=1,\ldots,n}$, và ta kí hiệu cấu xạ được sinh ra này là $[f_1,\ldots.,f_n]$.

Ví dụ 4.3. Xét các cấu xạ $B_1 \xrightarrow{f_1} C_1, B_2 \xrightarrow{f_2} C_2, B_3 \xrightarrow{f_3} C_3$ trong phạm trù monoid *D*. Khi đó vật nguồn và vật đích của $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3$ lần lượt là $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$ và $(C_1 \otimes C_2) \otimes C_3$ ta hợp nối cấu xạ này với ω_{C_1,C_2,C_3} để được một cấu xạ đi từ $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$ đến $(C_1 \otimes C_2) \otimes C_3$, và ta kí hiệu hợp nối này là $[f_1, f_2, f_3]$.Vì ω là phép chuyển đổi tự nhiên nên ta có $\omega_{C_1,C_2,C_3} \circ ((f_1 \otimes f_2) \otimes f_3) = (f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)) \circ \omega_{B_1,B_2,B_3}$.

Tiếp theo chúng tôi xây dựng các thành phần đầu tiên d^0, d^1, d^2, d^3 của đồng cấu vi phân *d* cho các đối dây chuyền bậc thấp $(C^{p,q}, p+q = 1,2,3)$. Và chúng tôi chứng tỏ tính hợp lí trong xây dựng của chúng tôi bằng cách chứng minh $d^1 d^2(\varnothing) + d^2 d^0(\varnothing) + d^0 d^2(\varnothing) = 0$.

nghĩa là biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
C^{p,q+1} \arrow[drr, "d^2"] & & \\
C^{p,q} \arrow[u, "d^0"] \arrow[r, "d^1"] \arrow[drr, "d^2"'] & C^{p+1,q} \arrow[r, "d^1"] & C^{p+2,q} \\
& & C^{p+2,q-1} \arrow[u, "d^0"']
\end{tikzcd}$$

cho trường hợp $p+q=2$ và $p+q=3$.

Thành phần d^0 và d^1 được xây dựng cho các đối dây chuyền ở bậc bất kì như sau.

Xây dựng thành phần $d^0 : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$. Cho $[a_{i,j}] \in M^{p,q+1}$, định nghĩa

$$d^0(\varnothing)([a_{i,j}]) := [a_{*,1} \circ \varnothing(\partial_0^0[a_{i,j}])] + \sum_{j=1}^{q-1}(-1)^j [\varnothing(\partial_j^0[a_{i,j}])] + (-1)^q [\varnothing(\partial_q^0[a_{i,j}]) \circ a_{*,q}]$$

Xây dựng thành phần $d^1 : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$. Cho $[a_{i,j}] \in M^{p+1,q}$, định nghĩa

$$d^1(\varnothing)([a_{i,j}]) := (-1)^{p+q} [a_{1,*} \otimes \varnothing(\partial_0^0[a_{i,j}])] + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i [\varnothing(\partial_i^1[a_{i,j}])] + (-1)^q [\varnothing(\partial_q^0[a_{i,j}]) \otimes a_{*,q}]$$

Tiếp theo chúng ta xây dựng thành phần $d^2 : C^{p,q} \to C^{p+2,q-1}$ cho các đối dây chuyền bậc thấp $(C^{p,q}, p+q = 1,2,3)$. Việc mở rộng d^2 cho các đối dây chuyền ở bậc bất kì đang được chúng tôi nghiên cứu và sẽ được công bố trong một bài báo tiếp theo.

- Cho $\varnothing \in C^{1,1}$ và các vật $A, B, C \in D$. Ta định nghĩa
  $d^2(\varnothing)(A,B,C) = -\varnothing(\omega_{A,B,C})$.
- Cho $\varnothing \in C^{2,1}$, và các vật $A, B, C, D \in D$. Ta định nghĩa
  $d^2(\varnothing)(A,B,C,D) = -\varnothing(\omega_{A,B,C}, 1_D) - \varnothing(1_A, \omega_{B,C,D})$.
- Cho $\varnothing \in C^{1,2}$, các vật $A, A_1, B, B_1, C, C_1 \in D$, và các cấu xạ $f \in D(A, A_1), g \in D(B, B_1), h \in D(C, C_1)$. Ta định nghĩa

$$d^2(\varnothing)(f,g,h) = -\varnothing(\omega_{A,B,C}, f \otimes (g \otimes h)) + \varnothing((f \otimes g) \otimes h), \omega_{A_1,B_1,C_1}).$$

- Cho $\varnothing \in C^{1,3}$, các vật $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2 \in D$, và các cấu xạ f, f_1, g, g_1, h, h_1 trong D như sau:

$$\begin{tikzcd}
A_2 & B_2 & C_2 \\
A_1 \arrow[u, "f_1"] & B_1 \arrow[u, "g_1"] & C_1 \arrow[u, "h_1"] \\
A \arrow[u, "f"] & B \arrow[u, "g"] & C \arrow[u, "h"]
\end{tikzcd}$$

Ta định nghĩa

$$d^2(\varnothing)\big((f, f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big) = -\varnothing\big(\omega_{A,B,C}, f\otimes(g\otimes h), f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)$$
$$+\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h, \omega_{A_1,B_1,C_1}, f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)$$
$$-\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h, (f_1\otimes g_1)\otimes h_1\big), \omega_{A_2,B_2,C_2}.$$

Định lí 4.4.

Cho $\varnothing \in C^{p,q}$. Khi đó ta có

$d^1d^1(\varnothing) + d^2d^0(\varnothing) + d^0d^2(\varnothing) = 0$*, với* $p+q = 2,3$

hay nói cách khác, ta có biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
C^{p,q+1} \arrow[rrd, "d^2"] & & \\
C^{p,q} \arrow[u, "d^0"] \arrow[r, "d^1"] \arrow[rrd, "d^2"'] & C^{p+1,q} \arrow[r, "d^1"] & C^{p+2,q} \\
& & C^{p+2,q-1} \arrow[u, "d^0"']
\end{tikzcd}$$

Chứng minh. Ta cần chứng minh định lí này đúng cho tất cả các cặp giá trị của (2,0), (1,1), (3,0), (2,1), (1, 2) của (p, q). Ở đây, ta trình bày chứng minh cho trường hợp (p = 1, q = 2), việc chứng minh cho các trường hợp khác được thực hiện tương tự. Ta sẽ chứng minh biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd}
C^{1,3} \arrow[rrd, "d^2"] & & \\
C^{1,2} \arrow[u, "d^0"] \arrow[r, "d^1"] \arrow[rrd, "d^2"'] & C^{2,2} \arrow[r, "d^1"] & C^{3,2} \\
& & C^{3,1} \arrow[u, "d^0"']
\end{tikzcd}$$

Xét $\varnothing \in C^{1,2}$. Với các vật $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2 \in D$, và các cấu xạ f, f_1, g, g_1, h, h_1 trong D như sau:

$$\begin{tikzcd}
A_2 & B_2 & C_2 \\
A_1 \arrow[u, "f_1"] & B_1 \arrow[u, "g_1"] & C_1 \arrow[u, "h_1"] \\
A \arrow[u, "f"] & B \arrow[u, "g"] & C \arrow[u, "h"]
\end{tikzcd}$$

Ta chứng minh

$$d^1d^1(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)+d^2d^0(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)$$
$$+d^0d^2(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)=0$$

bằng cách thực hiện các tính toán sau:

- *Bước 1.*

$$d^1d^1(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)$$
$$=(f,f_1)\otimes d^1(\varnothing)(g,g_1),(h,h_1)-d^1(\varnothing)\big((f,f_1)\otimes(g,g_1),(h,h_1)\big)$$
$$+d^1(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1)\otimes(h,h_1)\big)-d^1(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1)\otimes(h,h_1)\big)$$
$$=-\varnothing\big(\big[(f,f_1)\otimes(g,g_1),(h,h_1)\big]\big)+\varnothing\big((f,f_1)\otimes\big[(g,g_1)\otimes(h,h_1)\big]\big)$$
$$=-\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h,(f_1\otimes g_1)\otimes h_1\big)+\varnothing\big(f\otimes(g\otimes h),f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)$$

- *Bước 2.*

$$d^2d^0(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)$$
$$=-d^0(\varnothing)\big(\omega_{A,B,C},f\otimes(g\otimes h),f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)+d^0(\varnothing)\big((f\otimes g)\otimes h,\omega_{A_1,B_1,C_1},f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)$$
$$-d^0(\varnothing)\big((f\otimes g)\otimes h,(f_1\otimes g_1)\otimes h_1\big),\omega_{A_2,B_2,C_2}$$
$$=-\varnothing\big(f\otimes(g\otimes h),f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)-\varnothing\big(\omega_{A,B,C},f\otimes(g\otimes h)\circ f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)$$
$$+\varnothing\big(\omega_{A,B,C},f\otimes(g\otimes h)\circ f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)+\big((f\otimes g)\otimes h\circ\varnothing\big(\omega_{A_1,B_1,C_1},f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)\big)$$
$$-\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h,\omega_{A_1,B_1,C_1}\big)\circ\big(f_1\otimes(g_1\otimes h_1)\big)-\big((f\otimes g)\otimes h\circ\varnothing(f_1\otimes g_1)\otimes h_1\big),\omega_{A_2,B_2,C_2}$$
$$+\varnothing(f\otimes g)\otimes h\circ(f_1\otimes g_1)\otimes h_1,\omega_{A_2,B_2,C_2}+\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h,(f_1\otimes g_1)\otimes h_1\big)$$

- *Bước 3.*

$$d^0d^2(\varnothing)\big((f,f_1),(g,g_1),(h,h_1)\big)$$
$$=(f\otimes g)\otimes h\circ d^2(\varnothing)(f_1,g_1,h_1)-d^2(\varnothing)(ff_1,gg_1,hh_1)+d^2(\varnothing)(f,g,h)\circ f_1\otimes(g_1\otimes h_1)$$
$$=(f\otimes g)\otimes h\circ\Big[-\varnothing\big(\omega_{A_1,B_1,C_1},\big)f_1\otimes(g_1\otimes h_1)+\varnothing\big((f_1\otimes g_1)\otimes h_1,\omega_{A_2,B_2,C_2}\big)\Big]$$
$$-\Big[-\varnothing\big(\omega_{A,B,C},ff_1\otimes(gg_1\otimes hh_1)\big)+\varnothing\big(ff_1\otimes(gg_1,hh_1),\omega_{A_2,B_2,C_2}\big)\Big]$$
$$+\Big[-\varnothing\big(\omega_{A,B,C},f\otimes(g\otimes h)\big)+\varnothing\big((f\otimes g)\otimes h,\omega_{A_1,B_1,C_1}\big)\Big]\circ f_1\otimes(g_1\otimes h_1)$$

Cộng các vế đầu và các vế cuối trong các bước 1, 2, 3 ta thu được điều cần chứng minh.

5. Biến dạng của phạm trù monoid và tiền phức Yetter

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu các biến dạng bậc 1 của phạm trù monoid, chúng tôi chứng minh rằng các biến dạng này tương ứng với nhóm đối đồng điều bậc 3 của dãy đa phức Yetter mà chúng tôi đã xây dựng trong mục 4.

Định nghĩa 5.1.

Cho $(D,\otimes,\omega,\rho,\lambda)$ là một phạm trù monoid k-tuyến tính. Khi đó *biến dạng* của D là phạm trù monoid k-tuyến tính $(\widetilde{D},\widetilde{\otimes},\widetilde{\omega},\rho,\lambda)$ được xác định như sau:

(1) Các vật của $\widetilde{D}$ cũng chính là các vật của D, tập các cấu xạ $\widetilde{D}(A,B)=D(A,B)\otimes_k k[[t]]=D[[t]]$.

(2) Phép hợp nối các cấu xạ: $f\tilde{\circ}g=\sum_{n\geq 0}\mu_n(f,g)t^n$, trong đó $\mu_0(f,g)=f\circ g$.

(3) Phép tenxơ: $f\widetilde{\otimes}g=\sum_{n\geq 0}\sigma_n(f,g)t^n$, trong đó $\sigma_0(f,g)=f\otimes g$.

(4) Toán tử kết hợp: $\widetilde{\omega} = \sum_{n\geq 0}\omega_n t^n$, trong đó $\omega_0 = \omega$.

Định nghĩa 5.2.

Cho $(D,\otimes,\omega,\rho,\lambda)$ là một phạm trù monoid k-tuyến tính. Khi đó *biến dạng bậc 1* của D là phạm trù monoid k-tuyến tính $(\widetilde{D},\widetilde{\otimes},\widetilde{\omega},\rho,\lambda)$ được xác định như sau:

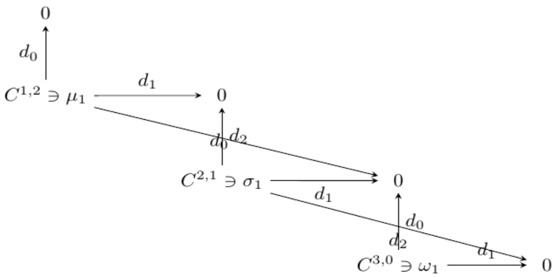
(1) Các vật của $\widetilde{D}$ cũng chính là các vật của D, tập các cấu xạ $\widetilde{D}(X,Y) = D(X,Y)\otimes_k k[\varepsilon] = D(X,Y) + D(X,Y)\varepsilon$, trong đó $\varepsilon^2 = 0$.

(2) Phép hợp nối các cấu xạ: $f\tilde{\circ}g = \mu_0(f,g) + \mu_1(f,g)\varepsilon$, trong đó $\mu_0(f,g) = f\circ g$.

(3) Phép tenxơ: $f\widetilde{\otimes}g = \sigma_0(f,g) + \sigma_1(f,g)\varepsilon$, trong đó $\sigma_0(f,g) = f\otimes g$.

(4) Toán tử kết hợp: $\widetilde{\omega} = \omega_0 + \omega_1\varepsilon$, trong đó $\omega_0 = \omega$.

Giả sử $\left(\widetilde{D},\widetilde{\mu} = \mu + \mu_1\varepsilon,\left(\widetilde{\otimes},\widetilde{\sigma} = \sigma + \sigma_1\varepsilon\right),\widetilde{\omega} = \omega + \omega_1\varepsilon\right)$ là một biến dạng của phạm trù monoid $(D,\mu,(\otimes,\sigma),\omega,\rho,\lambda)$. Trước tiên ta có $\mu_1 \in C^{1,2}(D),\sigma_1 \in C^{2,1}(D),\omega_1 \in C^{3,0}(D)$. Dựa vào tính chất của một phạm trù monoid ta thiết lập các phương trình biểu đạt các mối liên hệ giữa μ_1,σ_1 và ω_1, qua đó ta chứng tỏ $(\mu_1,\sigma_1,\omega_1)$ là một đối chu trình, điều này thể hiện qua biểu đồ sau



Ta bắt đầu qua các bước sau:

(1) Tính kết hợp của phép hợp nối cấu xạ

$$(a\tilde{\circ}b)\tilde{\circ}c = a\tilde{\circ}(b\tilde{\circ}c)$$

với a, b, c là các cấu xạ có thể hợp nối trong *D*. Do đó ta có

$$\mu_1(a,b)c + \mu_1(ab,c) = \mu_1(a,bc) + a\mu_1(b,c)$$

hay nói cách khác

$$d^0(\mu_1(a,b,c) = 0)$$

(2) Tính giao hoán giữa phép hợp nối và phép tenxơ trong phạm trù monoid *D*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes B \arrow[r, "a\otimes b"] \arrow[dr, "ab\otimes fg"'] & U\otimes V \arrow[d, "b\otimes g"] \\
 & X\otimes Y
\end{tikzcd}$$

nghĩa là

$$(a\otimes f)\circ(b\otimes g) = (a\circ b)\otimes(f\circ g) : A\otimes B \to X\otimes Y.$$

Do đó trong phạm trù $\widetilde{D}$ ta có

$$\left(a\tilde{\circ}b\right)\tilde{\otimes}\left(f\tilde{\circ}g\right)=\left(a\tilde{\otimes}f\right)\tilde{\circ}\left(b\tilde{\otimes}g\right).$$

Khai triển đẳng thức này ta có

$$\begin{aligned}&\mu_1\left(a,b\right)\otimes fg+\sigma_1\left(ab,fg\right)+ab\otimes\mu_1\left(f,g\right)\\&=\sigma_1\left(a,g\right)b\otimes g+\mu_1\left(a\otimes f,b\otimes g\right)+a\otimes f\sigma_1\left(b,g\right)\end{aligned}$$

do đó dẫn đến đẳng thức

$$d^0\left(\sigma_1\right)\left(b\otimes g,a\otimes f\right)+d^1\left(\mu_1\right)\left(b\otimes g,a\otimes f\right)=0.$$

(3) Tính tự nhiên của phép chuyển đổi $\tilde{\omega}$. Với mỗi

$$\tilde{\omega}_{A,B,C}:\left(A\otimes B\right)\otimes C\to A\otimes\left(B\otimes C\right)$$

và với mỗi cấu xạ $\left(A\otimes B\right)\otimes C\xrightarrow{\left(a\tilde{\otimes}f\right)\tilde{\otimes}k}X\otimes\left(Y\otimes Z\right)$, ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "\tilde{\omega}_{ABC}"] \arrow[d, "(a\tilde{\otimes}f)\tilde{\otimes}k"'] & A\otimes(B\otimes C) \arrow[d, "a\tilde{\otimes}(f\tilde{\otimes}k)"] \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\tilde{\omega}_{XYZ}"'] & X\otimes(Y\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

nghĩa là

$$\tilde{\omega}_{ABC}\left[a\tilde{\otimes}\left(f\tilde{\otimes}k\right)\right]=\left[\left(a\tilde{\otimes}f\right)\tilde{\otimes}k\right]\tilde{\omega}_{XYZ}.$$

Khai triển đẳng thức này ta có

$$d^0\left(\omega_1\right)\left(a,f,k\right)+d^1\left(\sigma_1\right)\left(a,f,k\right)+d^2\left(\mu_1\right)\left(a,f,k\right)=0.$$

(4) Đẳng thức biểu thị biểu đồ ngũ giác giao hoán trong phạm trù $\widetilde{D}$ là

$$\left[\omega_{A,B,C}\tilde{\otimes}1_E\right]\tilde{\circ}\omega_{A,B\otimes C,E}\tilde{\circ}\left[1_A\tilde{\otimes}\omega_{B,C,E}\right]=\omega_{A\otimes B,C,E}\tilde{\circ}\omega_{A,B,C\otimes E}$$

Khai triển và rút gọn đẳng thức này ta thu được

$$d^3\left(\mu_1\right)\left(A,B,C,E\right)+d^2\left(\sigma_1\right)\left(A,B,C,E\right)+d^1\left(\omega_1\right)\left(A,B,C,E\right)=0.$$

Ta có thể tóm tắt các kết quả tính toán trên đây thành định lí về sự tương quan giữa biến dạng bậc 1 của phạm trù monoid D và các đối dây chuyền bậc 3 trong tiền phức Yetter như sau

Định lí 5.3.

Với mỗi đối dây chuyền $\left(\mu_1,\sigma_1,\omega_1\right)\in\left(C^{1,2}\oplus C^{2,1}\oplus C^{3,0}\right)$ *thì* $\left(\widetilde{D},\tilde{\mu}=\mu+\mu_1\varepsilon,\left(\tilde{\otimes},\tilde{\sigma}=\sigma+\sigma_1\varepsilon\right),\tilde{\omega}=\omega+\omega_1\right)$ *là một biến dạng bậc 1 của phạm trù monoid* $\left(\widetilde{D},\tilde{\mu},\left(\otimes,\sigma\right),\omega,\rho,\lambda\right)$ *nếu và chỉ nếu* $\left(\mu_1,\sigma_1,\omega_1\right)$ *là một đối chu trình trong tựa phức Yetter, nghĩa là*

$$\begin{aligned}&d^0\left(\mu_1\right)=0\\&d^1\left(\mu_1\right)+d^0\left(\sigma_1\right)=0\\&d^2\left(\mu_1\right)+d^1\left(\sigma_1\right)+d^0\left(\omega_1\right)=0\\&d^3\left(\mu_1\right)+d^2\left(\sigma_1\right)+d^1\left(\omega_1\right)=0.\end{aligned}$$

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ Thông tin – ĐHQG-HCM trong khuôn khổ Đề tài mã số D1-2018-13.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Dinh, V. H., & Lowen, W. (2018). On the gerstenhaber-schack complex for prestacks. *Advances in Mathematics, 330*, 173-228.

Gerstenhaber, M. (1964). On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.* (2), *79*, 59-103.

Gerstenhaber, M., & Schack, S. D. (1983). On the deformation of algebra morphisms and diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc., 279*, 1-50.

Gerstenhaber, M., & Schack, S. D. (1988). The cohomology of presheaves of algebras. I. Presheaves over a partially ordered set. *Trans. Amer. Math. Soc., 310*, 135-165.

Kontsevich, M. (2003). Deformation quantazation of poisson manifolds. *Letter of Mathematical Physics, 66*, 157-216.

Kodaira, K., & Spencer, D. (1958) On deformations of complex analytic structures I & II. *Ann. of Math., 67*, 328-466.

Lowen, W. (2008). Algebroid prestacks and deformations of ringed spaces. *Trans. Amer. Math. Soc., 360*, 1631-1660.

Lowen, W., & Van den Bergh, M. (2006). Deformation theory of abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc., 358*, 5441-5483.

Nijenhuis, A., & Richardson, R. (1967). Deformations of homomorphisms of lie groups and lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc., 73,* 175-179.

Shoikhet, B. (2010). Koszul duality in deformation quantization and tamarkin's approach to Kontsevich formality. *Advances in Mathematics, 224*, 731-771.

Shrestha, T. (2010). Algebraic deformation of a monoidal category. *PhD Thesis, Kansas University*. Retrieved from http://krex.k-state.edu/dspace/handle/2097/6393

Shrestha, T., & Yetter, D. (2014). On deformations of pasting diagram (2). *Theory Appl. Categ., 29*, 569-608.

Yetter, D. (2009). On deformations of pasting diagrams. *Theory Appl. Categ., 22*, 24-53.

DEFORMATION OF MONOIDAL CATEGORY AND YETTER MULTI PRE-COMPLEX

Nguyen Ngoc Ai Van[1], Dinh Van Hoang[2*]

[1]*Vietnam National University Ho Chi Minh City, University of Information Technology, Vietnam*

[2]*HCMC University of Technology and Education, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Dinh Van Hoang – Email: hoangdv@hcmute.edu.vn*

Received: December 26, 2019; Revised: March 17, 2020; Accepted: June 24, 2020

ABSTRACT

We introduce the topic of algebraic deformation theory developed by Murray Gerstenhaber in 1960's to the Vietnamese audiences in this paper. Currently, this topic is studied very extensively in the field of algebraic geometry. On the other hand, we applied this theory to study the first order deformations of linear monoidal categories and found a new result in completing components in low degrees (degree 1, 2 and 3) of the differential map in the Yetter multi pre-complex. Shrestha (2010) introduced a formula for components in low degrees (degree 1, 2 and 3) of the differential map in the Yetter multi pre-complex. His formula was not fully completed. In this paper, we offer a completed formula for these components of low degrees with nice explanations.

Keyworks: Homological algebra; algebraic deformation