TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 6 (2021): 1076-1084

Vol. 18, No. 6 (2021): 1076-1084

ISSN: 2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

XÂY DỰNG MỘT HÀM NGHỊCH ĐẢO TRONG LÂN CẬN CỦA MỘT ĐIỂM BẤT THƯỜNG VỚI ĐỘ TRƠN YẾU

***Vũ Thị Phương*[1], *Lê Anh Nhật*[2*]**

[1]*Trường THPT TH Cao Nguyên, Trường Đại học Tây Nguyên, Đắk Lắk, Việt Nam*

[2]*Trường Đại học Tân Trào, Tuyên Quang, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Lê Anh Nhật – Email: leanhnhat@tuyenquang.edu.vn*

Ngày nhận bài: 24-11-2020; ngày nhận bài sửa: 10-6-2021; ngày duyệt đăng: 15-6-2021

TÓM TẮT

Ánh xạ nghịch đảo được nghiên cứu và sử dụng nhiều trong toán học. Đặc biệt nó được ứng dụng nhiều trong công nghệ thông tin và các thiết bị điện tử. Bài báo này nghiên cứu về sự tồn tại của một hàm ánh xạ nghịch đảo trong lân cận của một điểm suy biến với độ trơn yếu. Ban đầu, chúng tôi xem xét ánh xạ f liên tục tại một điểm suy biến, mà cụ thể tại không điểm khi đạo hàm bậc nhất tại đó bằng không và tồn tại đạo hàm bậc hai cùng với giả thiết ánh xạ đó có sự suy yếu về độ trơn, thì chúng tôi chứng minh được luôn tồn tại một ánh xạ nghịch đảo. Từ đó, chúng tôi xây dựng và chứng minh được sự tồn tại của ánh xạ nghịch đảo trong trường hợp khi đạo hàm bậc nhất tại một điểm suy biến đã cho với sự suy yếu về độ trơn của ánh xạ đó.

Từ khóa: Brouwer; điểm bất thường; hàm nghịch đảo; ánh xạ nghịch đảo; ánh xạ bậc hai; độ trơn yếu

1. Giới thiệu

Ánh xạ nghịch đảo (inverse mapping) còn gọi là ánh xạ ngược, nó được sử dụng nhiều trong toán học ứng dụng và được ứng dụng nhiều trong công nghệ thông tin một cách rất rõ nét, như: trong lập trình đồ họa máy tính, ánh xạ nghịch đảo được sử dụng làm kĩ thuật để tổ chức bản đồ 2D và 3D với ánh xạ kết cấu (texture mapping); còn trong mạng máy tính, người ta lại sử dụng ánh xạ ngược trong kĩ thuật quét mạng để thu thập thông tin địa chỉ IP không hoạt động để xác định xem địa chỉ IP nào đang hoạt động và được liên kết với máy chủ (Talukda, 2020).

Lí thuyết ánh xạ nghịch đảo cổ điển phát biểu rằng, nếu đạo hàm của một ánh xạ liên tục $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ở điểm 0 thuộc $\mathbb{R}^n$ không suy biến, $f(0)=0$ thì với bất kì $y \in \mathbb{R}^k$ đủ nhỏ tồn tại một nghiệm $x = R(y)$ của phương trình $f(x) = y$, hơn nữa ánh xạ R liên tục tại không điểm (zero). Ngoài ra, nếu f khả vi liên tục thì R liên tục.

Cite this article as: Vu Thi Phuong, & Le Anh Nhat (2021). Build an inverse function in a neighbourhood of an abnormal point under weak smoothness assumptions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(6), 1076-1084.

Trong trường hợp $f'(0)$ suy biến thì điều kiện đủ để mở rộng phương trình đã được đưa ra trong bài báo của A. V. Arutyunov (Arutyunov, 2006), trong bài báo đó, tác giả đã chỉ ra kết quả trong trường hợp $f'(0) \neq 0$. Cho một ánh xạ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ khả vi liên tục hai lần trong vùng lân cận của không điểm, $f(0)=0$ sao cho $f'(0)=0$. Nếu tồn tại một véctơ $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho $f''(0)[v,v]=0$ và $f''(0).[v,\mathbb{R}^n]=\mathbb{R}^k$ thì tồn tại một lân cận V tại không điểm, một ánh xạ liên tục $R:V \to \mathbb{R}^n$ và một hằng số C sao cho:

(i) $f[R(x)] = x,\ \forall x \in V;$

(ii) $R(0)=0;$

(iii) $|R(x)| \leq C\sqrt{|x|},\ \forall x \in V.$

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại của ánh xạ nghịch đảo được khảo sát trong trường hợp $f'(0)=0$. Như đã nêu ở trên, nhưng với giả thiết suy yếu về độ trơn của ánh xạ f, chúng tôi sẽ xây dựng một định lí về ánh xạ nghịch đảo được áp dụng cho bài toán ánh xạ ngược.

2. Nội dung

2.1. Các kiến thức cơ bản

Định nghĩa 1. (Nguyen, Phi, & Nong, 2003) *Cho V, R là hai không gian tuyến tính thực. Ta có các định nghĩa sau:*

1) Ánh xạ $f:V \times V \to \mathbb{R}$ được gọi là song tuyến tính trên V nếu:

(i) $f(x_1+x_2,u) = f(x_1,u)+f(x_2,u)$, $f(x,u_1+u_2) = f(x,u_1)+f(x,u_2);$

(ii) $f(kx,u) = kf(x,u) = f(x,ku),$

với mọi x, x_1, x_2, u, u_1, u_2 thuộc V và $k \in \mathbb{R}$.

2) Dạng song tuyến tính f được gọi là đối xứng nếu:

$f(x,u) = f(u,x),\ \forall x,u \in V.$

3) Ánh xạ $f:V \times V \to \mathbb{R}$ được gọi là song tuyến tính đối xứng, thì ánh xạ

$f:V \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f[x,x],\ x \in V$

được gọi là bậc hai, tương ứng với một ánh xạ đối xứng song tuyến tính $f:V \times V \to \mathbb{R}$. Ảnh của điểm $x \in V$ dưới ánh xạ bậc hai kí hiệu là f(x), ảnh của điểm $(x,u) \in V \times \mathbb{R}$ dưới ánh xạ song tuyến tính kí hiệu là f(x,u).

Bổ đề 1. *Cho $f:V \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc hai, khi đó:*

(i) $f(x-u,x+u) = f(x,x) - f(u,u);$

(ii) $f(x+u,x+u) = f(x,x) + 2f(x,u) + f(u,u);$

(iii) $f(kx) = k^2 f(x),$

với bất kì $x,u \in V$ và $\forall k \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Do f là ánh xạ bậc hai nên ánh xạ $f: V \to \mathbb{R}$ vừa là song tuyến tính vừa là đối xứng, nên ta áp dụng định nghĩa 1, ta có:

(i) $f(x-u, x+u) = f(x, x+u) - f(u, x+u)$

$$= f(x,x) + f(x,u) - \left[f(u,x) + f(u,u) \right]$$

$$= f(x,x) - f(u,u);$$

(ii) $f(x+u, x+u) = f(x, x+u) + f(u, x+u)$

$$= f(x,x) + f(x,u) + f(u,x) + f(u,u)$$

$$= f(x,x) + 2f(x,u) + f(u,u);$$

(iii) $f(kx) = f(kx, kx) = kf(x, kx) = k^2 f(x,x) = k^2 f(x).$ □

Định nghĩa 2. *Véctơ* $v \in \mathbb{R}$ *được gọi là không điểm chính quy của ánh xạ bậc hai* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *nếu* $f(v,v) = 0$ *và* $f(v, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$.

Nhận xét:

a. Bất kì ánh xạ bậc hai $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ không có không điểm chính quy. Thật vậy, với mỗi véctơ $v \neq 0$ có đẳng thức $f(v, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Do đó, $\dim f(v, \mathbb{R}^n) = n$. Ngoài ra, $\dim f(v, \mathbb{R}^n) + \dim \ker f(v, \bullet) = n$, thì $\ker(v, \mathbb{R}^n) = \{0\}$. Có nghĩa là $f(v) = f(v,v) \neq 0$. Vì vậy, ánh xạ f không tồn tại không điểm chính quy.

b. Ánh xạ dạng bậc hai $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với $n > 1$ và $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ luôn tồn tại không điểm chính quy v. Thật vậy, với ánh xạ bậc hai f được biết đến dưới dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_i^n k_i x_i^2, \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nếu $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ thì $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}^n$, điều này mâu thuẫn với giả định $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Vì thế, tồn tại $i, j = 1, 2, ..., n$ với $i < j$ sao cho $k_i > 0, \ k_j < 0$.

Chọn $v = \left(0, 0, ..., 0, \sqrt{1/|k_i|}, 0, ..., \sqrt{1/|k_j|}, 0, ..., 0\right)$. Khi đó

$$f(v) = k_i \left(\sqrt{1/|k_i|}\right)^2 + k_j \left(\sqrt{1/|k_j|}\right)^2 = k_i / |k_i| + k_j / |k_j|.$$

Ngoài ra $f(x, \bullet) = (k_1 x_1, k_2 x_2, ..., k_n x_n), \ \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$f(x, \bullet) = \left(0, 0, ..., 0, \frac{k_i}{|k_i|}, 0, ..., \frac{k_j}{|k_j|}, 0, ..., 0\right) \neq 0.$$

Do $f(v, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, thế nên $f(v) = 0$, vì vậy v là không điểm chính quy của ánh xạ dạng bậc hai f.

2.2. Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa 3. (Nguyen, & Nguyen, 2018) *Cho ánh xạ* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *và điểm* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Ánh xạ* f *gọi là khả vi Fréchet tại điểm* x_0 *nếu có một toán tử tuyến tính* $\Gamma:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *và ánh xạ* $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *sao cho* $f(x_0+\varepsilon)=f(x_0)+\Gamma(\varepsilon)+g(\varepsilon)$ *và* $g(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ *nếu* $\varepsilon \to 0$. *Toán tử tuyến tính* Γ *được xác định duy nhất và được gọi là đạo hàm Frechet của ánh xạ* f *tại điểm* x_0 *và kí hiệu là* $f'(x_0)$.

Cho $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)\right)$, ma trận toán tử tuyến tính $f'(x_0)$ được xác định bởi đẳng thức

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Nếu ánh xạ f khả vi tại điểm x_0 và tồn tại ánh xạ bậc hai $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ và ánh xạ $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sao cho $f(x_0+\varepsilon)=f(x_0)+\varepsilon f'(x_0)+\dfrac{f(v)}{2}+\varphi(v)$ và $\varphi(v)/|v|^2 \to 0$ nếu $v \to 0$. Ánh xạ f được gọi là *khả vi hai lần* tại điểm x_0, còn ánh xạ bậc hai $f(x,x)$ được gọi là *đạo hàm bậc hai* của ánh xạ f tại điểm x_0 và kí hiệu $f''(x_0)$.

Bổ đề 2. *Cho ánh xạ bậc hai* $f:V \to \mathbb{R}$. *Khi đó* $f'(x)=2f(x,\bullet)$, $f''(x)=2f$, *với mọi* $x \in V$.

Chứng minh. Với $\forall x \in V$ chúng ta có:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=f(x+\varepsilon,x+\varepsilon)-f(x,x)=2f(x,\varepsilon)+f(\varepsilon,\varepsilon)=2f(x,\varepsilon)+\frac{1}{2}2f(\varepsilon,\varepsilon).$$

Vì vậy, $f'(x)=2f(x,\bullet)$ và $f''(x)=2f$. □

2.3. Hàm nghịch đảo trong vùng lân cận các điểm thông thường

Định lí 1 (Nguyên lí điểm bất động Brouwer). (Hoang, 2003) *Cho* $X \subset \mathbb{R}^n$ *là tập hợp compact lồi không rỗng, ánh xạ* $f:X \to X$ *liên tục. Khi đó, tồn tại điểm* $x \in X$ *sao cho* $x=f(x)$.

Định lí 2. (Arutyunov, Magaril-Ilyaev, & Tikhomirov, 2006) *Cho ánh xạ* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *liên tục trên một lân cận của không điểm, khả vi tại không điểm,* $f(0)=0$ *và điều kiện chính quy*

$f'(0).\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $V \subset \mathbb{R}^k$ lân cận của không điểm, một hằng số $C > 0$ và ánh xạ $R: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho:

(i) $f[R(y)] = y,\ \forall y \in V;$

(ii) $R(0) = 0;$

(iii) $|R(y)| \le C|y|,\ \forall y \in V.$

Định lí 3. (Spivak, 1995) *Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ khả vi liên tục trên một lân cận của không điểm, $f(0) = 0$ và điều kiện chính quy $f'(0).\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $V \subset \mathbb{R}^k$ lân cận của không điểm, một hằng số $C > 0$ và một ánh xạ liên tục $R: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho:*

(i) $f[R(y)] = y,\ \forall y \in V;$

(ii) $R(0) = 0;$

(iii) $|R(y)| \le C|y|,\ \forall y \in V.$

Bổ đề 3. *Nếu một ánh xạ bậc hai $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ trên một lân cận v của không điểm thì tồn tại một ánh xạ liên tục $R: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ và hằng số $C > 0$ sao cho:*

(i) $f[R(y)] = y,\ \forall y \in \mathbb{R}^k;$

(ii) $R(0) = 0;$

(iii) $|R(y)| \le C\sqrt{|y|},\ \forall y \in \mathbb{R}^k.$

Chứng minh. Chúng ta có

- Do $f(v,v) = 0$ nên $f(v) = 0$;
- f khả vi liên tục trong các vùng lân cận điểm v;
- $f'(v).\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$, bởi vì $f'(v) = 2f(v,\bullet)$ và $f(v,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$.

Theo Định lí 3, tồn tại $V \subset \mathbb{R}^k$ lân cận của không điểm, hằng số $C_0 > 0$ và ánh xạ liên tục $\mathrm{P}: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho:

(i) $f[P(y)] = y,\ \forall y \in V;$

(ii) $P(0) = 0;$

(iii) $|P(y) - v| \le C_0\sqrt{|y|},\ \forall y \in V.$

Từ quan hệ (iii) ở trên, ta có $|P(y)| - |v| \le |P(y) - v| \le C_0|y|$ và $|P(y)| \le C_0|y| + |v|$ với $\forall y \in V$.

Chúng ta sẽ xây dựng ánh xạ cần thiết R. Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho ε là lân cận của không điểm và $\varepsilon \in V$. Với $\forall y \in \mathbb{R}^k$, $y \ne 0$, chúng ta có $y\varepsilon/(2|y|) \in V$. Do đó, ánh xạ

$R:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ được xác định: $R(y)=0$ nếu $y=0$ và $R(y)=\sqrt{2|y|/\varepsilon}P\left(y\varepsilon/(2|y|)\right)$ trong các trường hợp còn lại.

Chúng ta chứng minh rằng $f[R(y)]=y.$ Đặt $\lambda(y):=\sqrt{2|y|/\varepsilon}$ thì

$$f[R(y)]=f\left\{\lambda(y)P\left[y\varepsilon/(2|y|)\right]\right\}=\lambda^2(y)f\left\{P\left[y\varepsilon/(2|y|)\right]\right\}=\lambda^2(y)y\varepsilon/(2|y|)=y,$$

với $\forall y\in\mathbb{R}^k$. Do đó, khẳng định (i) của Bổ đề 4 là đúng.

Bằng cách chứng minh tương tự, phát biểu (ii) của bổ đề 4 là đúng. Dưới đây sẽ chứng minh khẳng định (iii) của Bổ đề 4.

Nếu $y=0$ chúng ta có $|R(0)|=0\le C_0\sqrt{|0|}$ với $\forall C_0\ge 0.$

Nếu $y\ne 0$ chúng ta có

$$|R(y)|=\left|\sqrt{\frac{2|y|}{\varepsilon}}P\left(\frac{y\varepsilon}{2|y|}\right)\right|\le\sqrt{\frac{2|y|}{\varepsilon}}\left(C_0\left|\frac{y\varepsilon}{2|y|}\right|+|v|\right)=C\sqrt{|y|},$$

với $C=\sqrt{2/\varepsilon}\left(|v|+C_0\varepsilon/2\right)$. Như vậy, phát biểu (iii) của Bổ đề 4 đã được chứng minh.

Ngoài ra, chúng ta thấy rằng tính liên tục của R tại không điểm tuân theo phát biểu (iii) của bổ đề 4. Còn tính liên tục của R tại các điểm $y\ne 0$ xuất phát từ thực tế rằng R là một thành phần của các ánh xạ liên tục. □

2.4. Hàm nghịch đảo trong vùng lân cận các điểm bất thường

Từ những kết quả trên, chúng ta sẽ thiết lập một định lí về hàm nghịch đảo trong vùng lân cận của một điểm bất thường.

Định lí 4. *Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ và $f(0)=0$, giả sử rằng ánh xạ f liên tục trên một lân cận của không điểm, hai lần khả vi tại không điểm, $f'(0)=0$, ánh xạ bậc hai $f''(0)$ có không điểm chính quy. Khi đó tồn tại $V\subset\mathbb{R}^k$ ở lân cận tại không điểm, hằng số $C_0>0$ và ánh xạ $P:V\to R^n$ sao cho:*

(i) $f[P(y)]=y,\ \forall y\in V;$

(ii) $P(0)=0;$

(iii) $|P(y)|\le C_0\sqrt{|y|},\ \forall y\in V.$

Chứng minh. Vì ánh xạ f hai lần khả vi tại không điểm và liên tục trên lân cận không điểm, chúng ta có:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)(x,x)+\varphi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

trong đó $\varphi(x)/|x|^2\to 0$ nếu $x\to 0.$

Đặt $G:=f''(0)/2,$ trong các mối liên hệ $f(0)=0$ và $f'(0)=0$ thu được

$f(x) = G(x) + \varphi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Ánh xạ bậc hai G có không điểm chính quy v. Từ Bổ đề 3 tồn tại ánh xạ liên tục $P: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ và hằng số $\beta > 0$ sao cho:

(i) $G[P(y)] \equiv y, \forall y \in \mathbb{R}^k;$

(ii) $P(0) = 0;$

(iii) $|P(y)| \le \beta\sqrt{|y|}, \ \forall y \in \mathbb{R}^k.$

Đối với $y \in \mathbb{R}^k$, xét phương trình

$$f(x) = y, \tag{1}$$

với x chưa biết, nó tương đương với phương trình

$$G(x) + \varphi(x) = y. \tag{2}$$

Để khảo sát phương trình (1) và (2), ta xét phương trình:

$$x = P(y - \varphi(x)). \tag{3}$$

Nếu x là nghiệm của phương trình (3) thì x là nghiệm của phương trình (1) và (2). Thật vậy, từ phương trình (3) thấy rằng $G(x) = G(P(y - \varphi(x))$. Mà $G[P(y)] \equiv y$ đối với mọi $y \in \mathbb{R}^k$ thì $G(x) = y - \varphi(x)$. Vì vậy, x là một nghiệm của phương trình (1) và (2).

Cho số dương tùy ý $C_1 < 1/\beta$. Vì $\varphi(x)/|x|^2 \to 0$ khi $x \to 0$, nên tồn tại số δ sao cho $|\varphi(x)| < C_1^2|x|^2$, $\forall x \in \delta B$, với B là một không gian hình cầu kín trong $\mathbb{R}^n$ với tâm ở không điểm và bán kính đơn vị.

Đối với mọi $y \in (\delta/\beta - C_1\delta)^2 B$, đặt $r(y) := \sqrt{|y|}\Big/(1/\beta - C_1)$. Xét ánh xạ $\rho: r(y)B \to \mathbb{R}^n$, xác định theo công thức

$$\rho(x) = P(y - \varphi(x)), \ \forall x \in r(y)B.$$

Nếu $x \in r(y)B$ thì

$$|x| \le \frac{\sqrt{|y|}}{1/\beta - C_1} \le \frac{\sqrt{(\delta/\beta - C_1\delta)^2}}{1/\beta - C_1} = \delta.$$

Vì $|\varphi(x)| < C_1^2|x|^2$ và nó có nghĩa:

$$|P(y - \varphi(x))| \le \beta\sqrt{|y - \varphi(x)|} \le \beta\sqrt{|y| + |\varphi(x)|} \le \beta\left(\sqrt{|y|} + \sqrt{|\varphi(x)|}\right) \le$$

$$\le \beta\left(\sqrt{|y|} + \sqrt{C_1^2|x|^2}\right) \le \beta\sqrt{|y|}\left(1 + \frac{C_1}{1/\beta - C_1}\right) = \frac{\sqrt{|y|}}{1/\beta - C_1} = r(y).$$

Khi đó ánh xạ ρ sẽ biến $r(y)B$ thành chính nó. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, tập $r(y)B$ là tập compact lồi. Theo nguyên lí điểm bất động Brouwer, có một điểm $x \in R(y)$ là nghiệm của phương trình (3). Do đó $R(y)$ là nghiệm của phương trình (1).

Vì vậy, tồn tại một lân cận $V = \delta^2 \left(1/\beta - C_1\right)^2 B \subset \mathbb{R}^k$ của không điểm và ánh xạ $P: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho $f[P(y)] = y,\ \forall y \in V$. Ta có $x(y) \in r(y)B$, vì vậy

$$|P(y)| = |x(y)| \le r(y) = \frac{\sqrt{|y|}}{1/\beta - C_1}.$$

Ta đặt $C := \left(1/\beta - C_1\right)^{-1}$, thì $|P(y)| \le C\sqrt{|y|}$ với $\forall y \in V$. Hiển nhiên $P(0) = 0$. □

3. Kết luận

Tại một điểm bất thường, mà cụ thể đã được trình bày ở trên là tại không điểm và dưới các giả thiết suy yếu về độ trơn của ánh xạ f thì tồn tại một ánh xạ nghịch đảo. Vì tính chất khả vi và sự tồn tại của các không điểm chính quy không thay đổi theo sự thay đổi của các biến, nên định lí về ánh xạ nghịch đảo có thể được xây dựng như sau:

Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ liên tục trong các điểm lân cận $x_0 \in \mathbb{R}^n$, khả vi hai lần tại điểm x_0, $f'(x_0) = 0, \exists v \in \mathbb{R}^n : f''(x_0)(v,v) = 0$ và $f''(x_0)(v, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$. Khi đó tồn tại lân cận $V \subset \mathbb{R}^k$ của điểm $y_0 = f(x_0)$, ánh xạ $P: V \to \mathbb{R}^n$ và hằng số $C > 0$ sao cho:

(i) $f[P(y)] = y,\ \forall y \in V$;

(ii) $P(y_0) = x_0$;

(iii) $|P(y) - x_0| \le C\sqrt{|y - y_0|},\ \forall y \in V.$

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Arutyunov, A. V. (Chief Editor), Magaril-Ilyaev, G. G., & Tikhomirov, V. M. (2006). *Pontryagin's maximum principle. Proof and applications.* Moscow: Factorial.

Arutyunov, A. V. (2006). Implicit function theorem without a priori assumptions of normality. *Computational Mathematics and Mathematical Physics, 46*(2), 205-215.

Hoang, T. (2003). *Ham thuc và giai tich ham* [*Real function and functional analysis*]. Hanoi: Vietnam National University, Hanoi.

Nguyen, D. T. (Chief Editor), Phi, M. B., & Nong, Q. C. (2003). *Dai so tuyen tinh* [*Linear algebra*]. Hanoi: Hanoi National University of Education.

Nguyen, X. H., & Nguyen, V. H. (2018). Quy tac nhan tu Lagrange cho bai toan toi uu ngau nhien [Lagrange multiplier rule for the stochastic optimization problem]. *Ho Chi Minh city university of education journal of science: natural sciences and technology*, *15*(9), 128-135.

Spivak, M. (1995). *Calculus on Manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Brandeis University.

Talukda, M. (2020). *Dictionary Of Computer & Information Technology.* Delhi: Prabhat Prakashan.

BUILD AN INVERSE FUNCTION IN A NEIGHBOURHOOD OF AN ABNORMAL POINT UNDER WEAK SMOOTHNESS ASSUMPTIONS

***Vu Thi Phuong*[1], *Le Anh Nhat*[2*]**

[1] *Cao Nguyen Practical High school, Tay Nguyen University, Dak Lak, Vietnam*

[2] *Tan Trao University, Tuyen Quang, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Le Anh Nhat – Email: leanhnhat@tuyenquang.edu.vn*

Received: November 24, 2020; Revised: June 10, 2021; Accepted: June 15, 2021

ABSTRACT

Inverse mapping has been studied and used extensively in mathematics. Especially, it is also widely accepted in information technology and electromagnetic devices. This article studies an existence of an inverse mapping function in the neighbourhood of a degenerate point under weak smoothness assumptions. Initially, a continuous map x is regarded at the degenerate point, specifically at zero points, when the first derivative is zero and exists the second derivative with an assumption that the map has weakened smoothness. We then prove that there exists an inverse mapping. From there, we develop and prove the existence of an inverse mapping when the first derivative at a given degenerate point with the weak smoothness of that mapping.

Keywords: Brouwer; degenerate point; inverse function; inverse mapping; quadratic map; reverse mapping; weak smoothness