



ISSN: 1859-3100

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC

KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 14, Số 10 (2017): 51-62

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

EDUCATION SCIENCE
Vol. 14, No. 10 (2017): 51-62

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ ĐỂ TÌM ĐẠI LƯỢNG MAX, MIN TRONG BÀI TOÁN VẬT LÝ VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA PHẦN MỀM MATHEMATICA

*Huỳnh Trọng Dương**

Trường Đại học Quảng Nam

Ngày nhận bài: 23-9-2017; ngày nhận bài sửa: 11-10-2017; ngày duyệt đăng: 18-10-2017

TÓM TẮT

Toán học không chỉ là một môn khoa học thuần túy về lí luận, mà còn có vai trò tích cực trong hoạt động nhận thức của con người. Vai trò của toán học trong khoa học rất dễ nhận thấy ở vật lí học. Điều đó thể hiện ở chỗ, người ta không đi từ các dữ kiện thực nghiệm có thực đến biểu thức toán học của chúng như trước kia đã làm, mà đi từ các dạng toán học đến những cái tương đương trong thực tế. Báo cáo này, trình bày một số ứng dụng phương pháp tìm cực trị hàm số để tìm đại lượng max, min trong bài toán vật lí cùng với sự hỗ trợ của phần mềm Mathematica. Ở đây, phần mềm Mathematica được sử dụng để thực hiện các thao tác tính toán và mô phỏng minh họa kết quả thu được.

Từ khóa: cực trị, Vật lí, Mathematica.

ABSTRACT

Applying the method of finding function's extreme values to find maximum and minimum quantities in physics problems with the support of the software Mathematica

Mathematics is not only a pure theoretical science, but it also has an active role in human cognitive activities. The role of mathematics in science is very visible in physics. It shows that people do not make mathematical expressions from experimental data like they did before, but from mathematical forms to equivalent things in reality. This article refers to the applications of the method of finding function's extreme values to find maximum and minimum quantities in physics problems with the support of the Mathematica software. Mathematica software is used to perform computational operations and illustrate the achieved results.

Keywords: extreme values, Physics, Mathematica.

1. Mở đầu

Toán học không chỉ là một môn khoa học thuần túy về lí luận, mà còn có vai trò tích cực trong hoạt động nhận thức của con người. Với những đặc điểm đối tượng của mình, toán học ngày càng thâm nhập sâu rộng vào các lĩnh vực khoa học khác nhau, giữ một vị trí đặc biệt trong nhiều khoa học; và vì thế, bao trùm một phạm vi rộng lớn của hoạt động thực tiễn.

* Email: htduong.dqu@gmail.com

Trước đây, với đối tượng còn ở trình độ trừu tượng thấp như các số và các hình hình học thì trong nghiên cứu khoa học, toán học chỉ được sử dụng chủ yếu vào việc cố định và chỉnh lí những dữ liệu thực nghiệm đã biết; để từ đó, rút ra các công thức toán học và áp dụng chúng. Ngày nay, sự áp dụng rộng rãi toán học trong nghiên cứu khoa học đã chứng tỏ vai trò phát kiến của toán học trong quá trình nhận thức thế giới khách quan.

Trong điều kiện phát triển của khoa học và công nghệ, quá trình toán học hóa các khoa học ngày càng diễn ra một cách sâu sắc thì việc áp dụng các phương pháp toán học cũng có những biến đổi căn bản. Điều đó thể hiện ở chỗ, người ta không đi từ các dữ kiện thực nghiệm có thực đến biểu thức toán học của chúng như trước kia đã làm, mà đi từ các dạng toán học đến những cái tương đương trong thực tế. Nếu như ở giai đoạn đầu, toán học đóng vai trò biểu diễn hình thức các dữ kiện hiện thực, thì ở giai đoạn sau, toán học nổi lên với tư cách lĩnh vực tham gia một cách tích cực vào việc hình thành các lí thuyết mới. Xét ở trình độ đó, toán học không còn chỉ là công cụ để chế biến các thông tin, mà đã tham gia vào việc nhận thức các quy luật. Như vậy, từ chỗ là công cụ hỗ trợ cho nghiên cứu, toán học đã trở thành một phương tiện nghiên cứu được sử dụng thường xuyên và nhiều khi là công cụ duy nhất có hiệu lực trong hoạt động khoa học.

Sự biến đổi vai trò của toán học trong khoa học rất dễ nhận thấy ở vật lí học. Điều này đã được nhà vật lí học người Mĩ – Edison khẳng định: "Đối với nhà vật lí, toán học không chỉ là một công cụ mà dựa vào đó, có thể diễn tả bất cứ hiện tượng nào về lượng, mà còn là cội nguồn chủ yếu của những khái niệm và nguyên tắc được lấy làm chỗ dựa cho việc xây dựng những lí thuyết mới". Nếu như trước kia, vật lí học cổ điển chỉ vạch rõ những mối quan hệ của các đại lượng toán học xác định đối với các vật thể và các quá trình vật lí để rồi sau đó, tìm ra các phương trình liên kết giữa chúng nhờ diễn tả được các quy luật vật lí, thì vật lí lí thuyết hiện đại lại sử dụng những đối tượng toán học trừu tượng dưới dạng các kí hiệu, rồi sau đó mới tìm những biểu hiện vật lí của chúng.

Vai trò sáng tạo của tư duy toán học trong nhận thức được thể hiện khá rõ nét ở chỗ, toán học được xem như một công cụ không thể thiếu được đối với các khoa học trong việc khám phá và tìm ra bản chất của các sự vật và hiện tượng của thế giới khách quan.

Báo cáo này trình bày một ứng dụng cụ thể, đơn giản nhất của toán học vào bài toán vật lí với tựa đề: **“Áp dụng phương pháp tìm cực trị của hàm số một biến số để tìm đại lượng max, min trong bài toán vật lí với sự hỗ trợ của phần mềm Mathematica”**.

Phần mềm Mathematica là một phần mềm tổ hợp các thao tác tính toán bằng kí hiệu, tính số, xử lí đồ họa và lập trình. Trong những năm gần đây, phần mềm Mathematica được sử dụng khá phổ biến trong lĩnh vực giáo dục. Việc sử dụng phần mềm trong nghiên cứu, học tập các môn khoa học tự nhiên nói chung và vật lí nói riêng, đã đem lại những thành tựu vô cùng quan trọng. Về cơ bản, phần mềm này cung cấp một nền tảng Toán học trên máy tính, đồng thời cho phép mô phỏng các hiện tượng khoa học và quá trình xảy ra của

hiện tượng đi kèm với sự thay đổi các thông số một cách tùy ý. Ở đây, phần mềm Mathematica được sử dụng để thực hiện các thao tác tính toán và mô phỏng kết quả thu được.

2. Nội dung

2.1. Phương pháp tìm cực trị hàm số

a) Tìm cực trị bằng cách sử dụng bảng biến thiên

Tìm cực trị cho hàm số $y = f(x)$ theo các bước sau:

* Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

* Bước 2: Tìm y' , giải phương trình $y' = 0$.

* Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận:

+ Nếu y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua điểm x_0 (từ trái sang phải) thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

+ Nếu y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua điểm x_0 (từ trái sang phải) thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

b) Tìm cực trị bằng cách sử dụng đạo hàm cấp 2

Phương pháp này thường được sử dụng đối với các hàm số mà việc lập bảng biến thiên tương đối khó khăn. Các bước thực hiện:

* Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

* Bước 2: Tìm y' , giải phương trình $y' = 0$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, \dots$) là các nghiệm của nó.

* Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$ rồi kết luận:

+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i .

+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i .

c) Áp dụng phương pháp tìm cực trị hàm số vào bài toán vật lí

* Bước 1: Tìm hiểu yêu cầu của bài toán vật lí. Xác định hàm và đối số của hàm. Ở đây đối số chính là ẩn số yêu cầu của bài toán.

Ví dụ: Hỏi phải ném một vật theo phương hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc α bằng bao nhiêu để với một vận tốc ban đầu cho trước, tầm xa của vật đạt cực đại?

Xuất phát từ yêu cầu bài toán, tầm xa của vật đóng vai trò là hàm, đối số của hàm là góc hợp giữa phương ném và mặt phẳng ngang.

* Bước 2: Đối chiếu các dữ kiện xuất phát và ẩn số phải tìm, xem xét bản chất vật lí của tình huống đã cho để nhận ra các định luật, công thức lí thuyết có liên quan. Xác lập các mối liên hệ cụ thể của các dữ kiện xuất phát và ẩn số phải tìm. Biểu diễn các mối liên hệ đó dưới dạng hàm và đối số.

Ví dụ: Ở bài toán vật ném xiên ở trên, tầm xa L của vật được biểu diễn dưới dạng hàm của góc α : $L = f(\alpha)$.

* Bước 3: Sử dụng một trong hai phương pháp tìm cực trị để tìm ẩn số của bài toán. Kết hợp sử dụng phần mềm Mathematica để tính toán và mô phỏng kết quả bài toán.

2.2. Giới thiệu về phần mềm Mathematica

Phần mềm Mathematica được ra mắt lần đầu tiên vào năm 1988 bởi hãng Wolfram Research. Với những tính năng vượt trội, phần mềm đã gây ấn tượng sâu sắc đối với người sử dụng máy tính trong kĩ thuật và các lĩnh vực khác. Đây là một phần mềm tổ hợp các thao tác tính toán bằng kí hiệu, bằng số, xử lí đồ họa và lập trình. Mục đích chính của phần mềm khi hãng Wolfram đưa ra lần đầu tiên là hỗ trợ nghiên cứu cho các ngành khoa học vật lí, công nghệ và toán học. Chỉ một vài năm sau đó, Mathematica trở nên rất quan trọng trong một phạm vi rộng hơn và được sử dụng trong toàn bộ các ngành khoa học thuộc lĩnh vực tự nhiên cũng như xã hội.

Ngày nay, với sự tiến bộ vượt bậc trong lĩnh vực công nghệ thông tin, các phiên bản Mathematica ngày càng hiện đại cùng với sự mở rộng nhiều tính năng ra đời, các ứng dụng của Mathematica được khai thác mạnh mẽ hơn bao giờ hết, nó không chỉ được sử dụng trong các ngành khoa học tự nhiên như vật lí, sinh học, toán học, hóa học, công nghệ mà còn là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho các ngành khoa học xã hội cũng như các lĩnh vực khoa học khác. Phần mềm Mathematica còn được các trường đại học trên thế giới sử dụng trong việc soạn thảo giáo án, nghiên cứu và hỗ trợ học tập cho sinh viên.

Thực tế cho thấy, việc sử dụng phần mềm trong giảng dạy, nghiên cứu, học tập các môn học nói chung, đã đem lại những thành tựu vô cùng quan trọng. Với giao diện thân thiện, Mathematica là công cụ hỗ trợ tích cực cho các hoạt động dạy - học, giúp cho sự tương tác giữa người dạy và người học đạt hiệu quả cao. Về cơ bản, phần mềm này cung cấp một nền tảng toán học trên máy tính, cho phép người dạy tập trung đi sâu vào các khái niệm vật lí thay vì mất thời gian đi qua các bước đại số hay toán học mà học sinh đã biết. Ngoài ra, Mathematica có thể mô phỏng các hiện tượng khoa học và quá trình xảy ra của hiện tượng đó đi kèm với sự thay đổi các thông số một cách tùy ý, từ đó giúp người học hiểu sâu hơn các hiện tượng khoa học. Bản thân người học, có thể sử dụng phần mềm này như một công cụ hỗ trợ khi học tập, làm bài tập cũng như nghiên cứu khoa học.

* Mathematica là hệ thống các thao tác tính toán:

Mathematica cho phép thực hiện các thao tác tính toán bằng kí hiệu, bằng số và xử lí đồ họa. Vì vậy, Mathematica có khả năng thực hiện các phép tính đại số cũng như số học. Ngoài ra, Mathematica còn cung cấp cho người dùng danh sách các hàm ứng dụng để giải các bài toán giải tích phức tạp như các bài toán tính đạo hàm, tích phân, phương trình vi phân... một cách nhanh chóng.

Đồ họa cũng là một trong những thế mạnh của Mathematica, nó hỗ trợ người dùng khi cần vẽ các hàm trong không gian hai chiều hoặc ba chiều, tạo dựng biểu đồ dựa trên các số liệu ngẫu nhiên, thiết kế hình thể, vật thể tùy ý.

* Mathematica được sử dụng như một ngôn ngữ lập trình:

Giống như các ngôn ngữ khác như ngôn ngữ C hay Fortran, Mathematica được biết đến như một ngôn ngữ lập trình. Với các hàm cần sử dụng không được dựng sẵn, Mathematica cho phép xây dựng một hàm mới với ngôn ngữ bậc cao và có tính trực quan một cách nhanh chóng và đơn giản. Mathematica cung cấp ngôn ngữ lập trình bậc cao đồng nhất và linh hoạt cho phép người sử dụng tập trung vào các vấn đề chính và lược bỏ thời gian dành cho các đoạn mã chương trình dài dòng.

* Vai trò của phần mềm Mathematica trong dạy học vật lí:

Trong giảng dạy vật lí, với sự hỗ trợ của Mathematica, giảng viên vật lí có thể tạo ra mô hình riêng và các điều khiển trực quan theo đúng ý đồ của mình. Giảng viên trong quá trình giảng dạy dễ dàng thay đổi các giá trị bằng các lệnh và thao tác đơn giản. Ngoài ra, sinh viên học vật lí có thể sử dụng Mathematica để hiểu sâu hơn các khái niệm, hoàn thành bài tập về nhà và thực hiện các dự án lớn hơn như nghiên cứu đề tài mà không cần thêm các phần mềm chuyên dụng khác.

Khi thiết kế hoặc sửa đổi nội dung môn học trên lớp, Mathematica cho phép giáo viên tổ chức và thử nghiệm ngay những ý tưởng, từ đó phát triển thành các bài học thực tế. Mathematica hỗ trợ người dạy và người học không chỉ trong suốt khóa học mà cả quá trình phát triển nghề nghiệp của họ sau này.

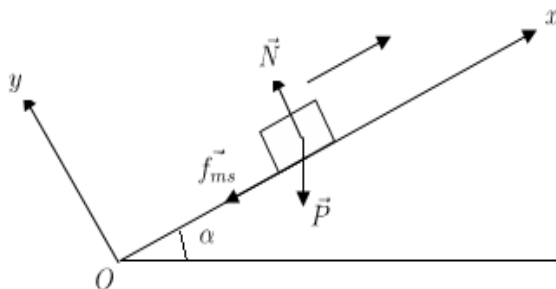
2.3. Áp dụng phương pháp tìm cực trị hàm số để tìm đại lượng max, min trong bài toán vật lí cùng với sự hỗ trợ của phần mềm Mathematica

a) Bài toán cơ học

Một viên gạch có khối lượng $m = 1kg$ trượt trên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương nằm ngang. Hệ số ma sát giữa viên gạch và mặt phẳng nghiêng là $k = 0,02$. Tại thời điểm khảo sát, viên gạch đang trượt lên trên với vận tốc $v_0 = 3m/s$. Hỏi khoảng thời gian để viên gạch lên đến độ cao cực đại?

* Bước 1: Xác định hàm và đối số của hàm.

Gọi A là vị trí của viên gạch tại thời điểm khảo sát (gốc tọa độ O được chọn trùng với vị trí A , $x_A = 0$), B là vị trí cao nhất của viên gạch (có hoành độ x_B), khoảng thời gian cần tìm t . Bài toán dẫn đến việc xác lập hàm $x = f(t)$.



* Bước 2: Xác lập các mối liên hệ cụ thể của các dữ kiện xuất phát và ẩn số phải tìm. Biểu diễn các mối liên hệ đó dưới dạng hàm và đối số.

Xét bài toán đối với hệ quy chiếu gắn với Trái Đất, chọn hệ toạ trục toạ độ như 0. Các lực tác dụng lên viên gạch gồm trọng lực \vec{P} , phản lực của mặt phẳng nghiêng \vec{N} và lực ma sát \vec{f}_{ms} .

Phương trình của định luật II Newton cho viên gạch:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{ms} = m\vec{a} \quad (1)$$

Chiếu phương trình (1) lên hai trục Ox, Oy ta được:

$$-P\sin\alpha - f_{ms} = ma_x \quad (2)$$

$$-P\cos\alpha + N = 0 \quad (3)$$

Với $f_{ms} = kN$, giải phương trình

$$a_x = -g(\sin\alpha + k\cos\alpha) \quad (4)$$

(2) ta được:

Ta thấy $a_x < 0$, viên gạch chuyển động chậm dần đều và dừng lại ở điểm cao nhất B .

Phương trình chuyển động của viên gạch trên trục Ox được xác định bởi biểu thức:

$$S = v_0t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (5)$$

* Bước 3: Tính toán và minh họa kết quả với sự hỗ trợ của phần mềm.

+ **Thời gian để viên gạch lên đến độ cao cực đại:**

Sử dụng các lệnh:

$$\text{Solve} \left[\left\{ -mg\sin[\alpha] - kN == ma_x, -mg\cos[\alpha] + N == 0, \partial_t \left(\frac{a_x t^2}{2} + v_0 t \right) == 0 \right\}, \{N, a_x, t\} \right]$$

Biểu thức thời gian cần tìm:

$$\left\{ \left\{ N \rightarrow gm\cos[\alpha], a_x \rightarrow -gk\cos[\alpha] - g\sin[\alpha], t \rightarrow \frac{v_0}{g(k\cos[\alpha] + \sin[\alpha])} \right\} \right\}$$

+ **Minh họa kết quả:**

Kết quả chạy chương trình sẽ cho giao diện bảng như Hình 1. Với các giá trị vận tốc ban đầu $v_0 = 3m/s$, góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$, hệ số ma sát $k = 0,02$, kết quả thu được:

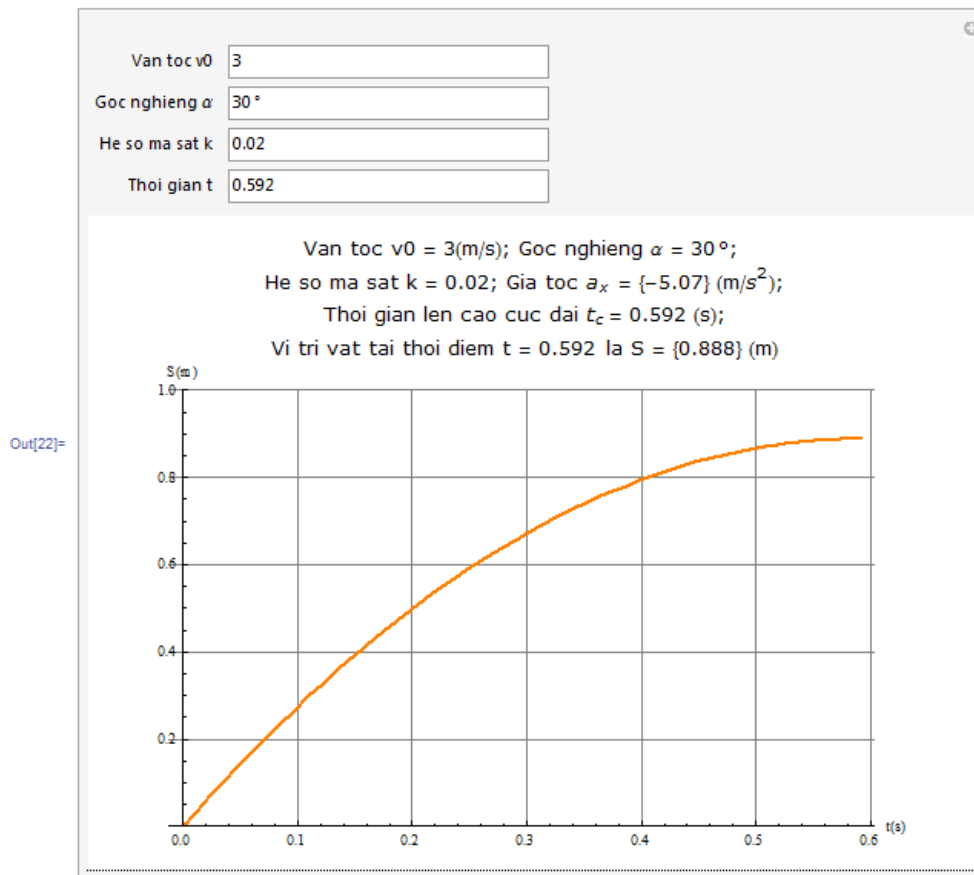
- Thời gian để vật lên đến vị trí cao nhất là $t_c = 0,592s$.
- Vị trí của vật trên trục Ox là $S = 0,888m$.
- Gia tốc của vật là $a_x = -5,07m/s^2$.

Để khảo sát với các giá trị khác, chỉ cần thay đổi các giá trị của vận tốc ban đầu, góc nghiêng, hệ số ma sát bằng cách nhập số liệu ở các ô hiển thị đại lượng tương ứng trên bảng, nhấn “Enter” trên giao diện sẽ hiển thị kết quả mới.

```

Manipulate [g = 9.8; m = 1; p1 = Solve [{-mgSin[α] - kN == ma_x,
- mg Cos[α] + N == 0, {N, a_x}]; Show [Plot [a_x t^2 / 2 + v0 t /. p1,
{t, 0, v0 / (g (k Cos[α] + Sin[α])}], PlotRange -> {0, 1.0}, AxesLabel -> {t(s), S(m)},
PlotStyle -> {Orange, Thick}, GridLines -> Automatic,
ImageSize -> {550, 400}, PlotLabel -> Style [Row [{Van toc v0 = ,
v0, (m/s), ; , Goc nghieng α = , α, ; , He so ma sat k = , k, ; ,
Gia toc a_x = , Round [a_x /. p1, .001], (m/s^2),
; ; Thoi gian len cao cuc dai t_c = , Round [v0 / (g (k Cos[α] + Sin[α])
, .001, (s), ; ; Vi tri vat tai thoi diem t = , t, (s); la S = ,
Round [a_x t^2 / 2 + v0 t /. p1, .001], (m), Black, Label, 13
, {{v0, 1, Van toc v0}, 10}, {{α, 10 Degree, Goc nghieng α}, 90 Degree},
{{k, 0.001, He so ma sat k}, 0.5}, {{t, 0, Thoi gian t}, 5}

```



Hình 1. Mô hình khảo sát vật chuyển động lên trên mặt phẳng nghiêng với vận tốc ban đầu $v_0 = 3\text{ m/s}$, góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$, hệ số ma sát $k = 0,02$

b) Bài toán điện trường do vật mang điện gây ra tại một điểm:

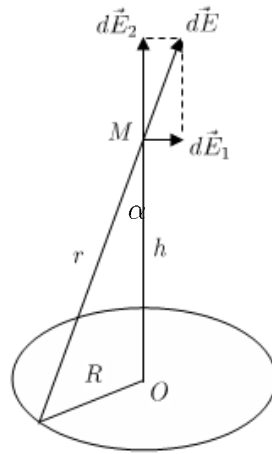
Một vòng tròn làm bằng một dây dẫn mảnh bán kính $R = 5\text{cm}$ mang điện tích $q = 5 \cdot 10^{-8}\text{C}$ và được phân bố đều trên dây. Tại điểm nào trên trục của vòng dây, cường độ điện trường có trị số cực đại? Tính trị số cực đại đó.

* Bước 1: Xác định hàm và đối số của hàm.

Gọi M là điểm trên trục của vòng dây mà tại đó cường độ điện trường có trị số cực đại, khoảng cách từ M đến tâm O của vòng dây là h . Bài toán dẫn đến việc xác lập hàm $E_M = f(h)$.

* Bước 2: Xác lập các mối liên hệ cụ thể của các dữ kiện xuất phát và ẩn số phải tìm. Biểu diễn các mối liên hệ đó dưới dạng hàm và đối số.

Cường độ điện trường do vòng dây gây ra tại một điểm nào đó bằng tổng các cường độ điện trường $d\vec{E}$ do các phần tử điện tích dq nằm trên vòng dây gây ra.



Hình 2. Vector cường độ điện trường $d\vec{E}$ gây ra bởi phần tử điện tích dq

Cường độ điện trường $d\vec{E}$ do một phần tử điện tích dq gây ra tại M được xác định như Hình 2, $d\vec{E}$ có độ lớn:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

Với $r = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Vector $d\vec{E}$ có thể được phân tích làm hai phần:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 \quad (2)$$

Do tính chất đối xứng nên các thành phần $d\vec{E}_1$ triệt tiêu lẫn nhau, chỉ còn lại các thành phần $d\vec{E}_2$ cùng phương, cùng chiều. Do đó: $\vec{E}_M = \int_{vd} d\vec{E}_2$

Hay:

$$E_M = \int_{vd} dE_2 \quad (3)$$

Theo Hình 2 ta có:

$$dE_2 = dE \cdot \cos\alpha = \frac{dq \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} (R^2 + h^2)^{-3/2} \quad (4)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} E_M &= \int_{vd} dE_2 = \int_{vd} \frac{dq \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} (R^2 + h^2)^{-3/2} \\ &= \frac{q \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} (R^2 + h^2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (5)$$

* Bước 3: Tính toán và minh họa kết quả với sự hỗ trợ của phần mềm.

+ **Khoảng cách h để E_M cực đại:**

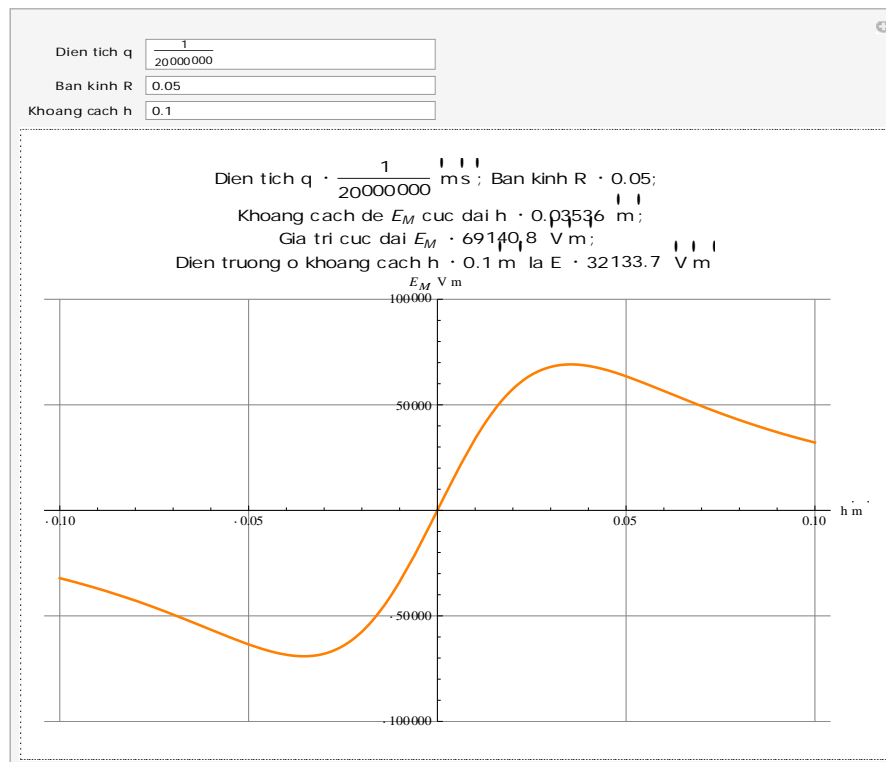
Biểu thức h tìm được:

$$\text{Solve} \left[\partial_h \left(\frac{qh}{4\pi\epsilon_0} (R^2 + h^2)^{-3/2} \right) == 0, h \right]$$

Kết quả:

$$\left\{ \left\{ h \rightarrow -\frac{R}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ h \rightarrow \frac{R}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$$

+ **Minh họa kết quả:**



Hình 3. Mô hình khảo sát điện trường gây ra bởi vòng dây tích điện

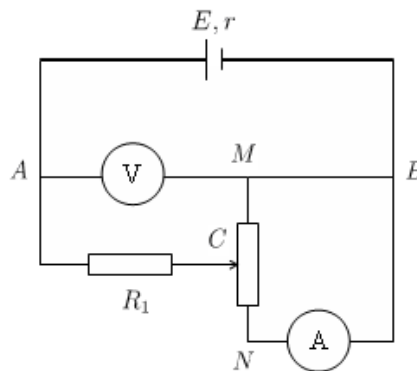
Sử dụng đoạn lệnh sau:

```
Manipulate [ε0 = 8.86 10-12; Show [Plot [  $\frac{qh}{4\pi\epsilon_0}$ 
(R2 + h2) $\frac{-3}{2}$ , {h, -1010-2, 10 10-2}, PlotRange → {-105, 105},
AxesLabel → {h(m), EM(V/m)}, PlotStyle → {Orange, Thick},
GridLines → Automatic, ImageSize → {600, 500},
PlotLabel → Style [Row [{Dien tich q = , q, (m/s), ; , Ban kinh R = , R, ; ,
Khoang cach de EM cuc dai h = , Round [  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ , .00001 ] ,
(m), ; , Gia tri cuc dai EM = , Round [  $\frac{q\frac{R}{\sqrt{2}}}{4\pi\epsilon_0} \left( R^2 + \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{\frac{-3}{2}}$ , .00001 ] ,
(V/m), ; , Dien truong o khoang cach h = , h, (m),
la E = , Round [  $\frac{qh}{4\pi\epsilon_0} (R^2 + h^2)^{\frac{-3}{2}}$ , .00001 ] , (V/m),
Black, Label, 13, {{q, 10-5, Dien tich q}, 10-3}, {{R, 5 10-2, Ban kinh R}, 10},
{{h, 10-2, Khoang cach h}, 10 10-2}
```

Kết quả chạy chương trình sẽ cho giao diện bảng như Hình 3.

c) Bài toán dòng điện không đổi

Cho mạch điện có sơ đồ như Hình 4. Cho $E = 9V$; $r = 1\Omega$; biến trở có điện trở toàn phần $R_{MN} = 10\Omega$; $R_1 = 1\Omega$; $R_A \approx 0$; R_v rất lớn. Phải để C ở vị trí nào để công suất tiêu thụ trong toàn biến trở là lớn nhất? Giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu.



Hình 4. Sơ đồ mạch điện

* Bước 1: Xác định hàm và đối số của hàm.

Đặt $R_{CM} = x$, bài toán dẫn đến việc xác lập hàm $P_b = f(x)$.

* Bước 2: Xác lập các mối liên hệ cụ thể của các dữ kiện xuất phát và ẩn số phải tìm.
Biểu diễn các mối liên hệ đó dưới dạng hàm và đối số.

R_{CM} và R_{CN} mắc song song với nhau, điện trở tương đương của R_{CM} và R_{CN} :

$$R_b = \frac{x(10-x)}{10} \quad (1)$$

Điện trở của mạch ngoài:

$$R = R_1 + R_b = 1 + \frac{x(10-x)}{10} \quad (2)$$

Cường độ dòng điện qua mạch chính:

$$I = \frac{E}{R+r} = \frac{9}{1 + \frac{x(10-x)}{10} + 1} = \frac{90}{20 + 10x - x^2} \quad (3)$$

Công suất tiêu thụ trên toàn biến trở:

$$P_b = R_b I^2 = \frac{810(10-x)x}{(20 + 10x - x^2)^2} \quad (4)$$

* Bước 3: Tính toán và minh họa kết quả với sự hỗ trợ của phần mềm.

+ **Giá trị của x để công suất tiêu thụ trong toàn biến trở là lớn nhất:**

Giải phương trình vi phân bậc một:

$$\text{Solve} \left[\partial_x \left(\frac{810(10-x)x}{(20 + 10x - x^2)^2} \right) == 0, x \right]$$

Kết quả

$$\left\{ \{x \rightarrow 5\}, \{x \rightarrow 5 - \sqrt{5}\}, \{x \rightarrow 5 + \sqrt{5}\} \right\}$$

Tiếp tục giải phương trình vi phân bậc hai:

$$\text{Simplify} \left[\partial_x \partial_x \left(\frac{810(10-x)x}{(20 + 10x - x^2)^2} \right) /. \left\{ \{x \rightarrow 5\}, \{x \rightarrow 5 - \sqrt{5}\}, \{x \rightarrow 5 + \sqrt{5}\} \right\} \right]$$

$$\text{Kết quả thu được: } \left\{ \frac{4}{45}, -\frac{81}{320}, -\frac{81}{320} \right\}$$

Kết quả cho thấy khi $x = 5 \pm \sqrt{5}$ thì $f''(x) < 0$, do đó công suất tiêu thụ trên toàn biến trở cực đại khi $R_{CM} = (5 \pm \sqrt{5})\Omega$.

Giá trị lớn nhất:

$$\text{Simplify} \left[\frac{810(10-x)x}{(20 + 10x - x^2)^2} /. \left\{ \{x \rightarrow 5\}, \{x \rightarrow 5 - \sqrt{5}\}, \{x \rightarrow 5 + \sqrt{5}\} \right\} \right]$$

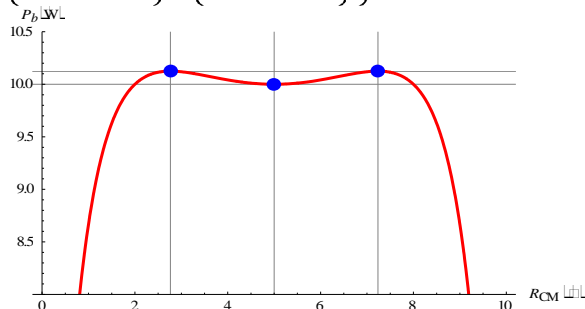
$$\left\{ 10, \frac{81}{8}, \frac{81}{8} \right\}$$

+ **Minh họa kết quả:**

Show [Plot [P_b , { x , 0, 10}], PlotRange \rightarrow {8, 10.5}, PlotStyle \rightarrow {Red, Thick}, GridLines

\rightarrow $\left\{ \left\{ 5, 5 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5} \right\}, \left\{ 10, \frac{81}{8}, \frac{81}{8} \right\} \right\}$, AxesLabel \rightarrow { $R_{CM}(\Omega)$, $P_b(W)$ },

ListPlot $\left[\left\{ \left\{ 5, 10 \right\}, \left\{ 5 + \sqrt{5}, \frac{81}{8} \right\}, \left\{ 5 - \sqrt{5}, \frac{81}{8} \right\} \right\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{ \text{Blue}, \text{PointSize}[0.03] \} \right]$



Hình 5. Minh họa giá trị cực đại của công suất tiêu thụ trong toàn biến trở

3. Kết luận

Ngày nay toán học không còn là một ngành khoa học khô khan trừu tượng, nó đóng vai trò quan trọng không chỉ trong các ngành khoa học tự nhiên, mà cả nhiều ngành khoa học xã hội khác. Trong đó, có thể nói vật lý học và toán học có mối quan hệ mật thiết, không thể tách rời. Trên đây là một trong những ứng dụng của toán học vào vật lý. Thay vì trải qua các công thức trong vật lý, chúng ta có thể vận dụng phương pháp tìm cực trị của hàm số để tìm đại lượng max, min trong bài toán vật lý. Phần mềm Mathematica được sử dụng để thực hiện các tính toán và minh họa kết quả bài toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lê Văn Đoán. (2007). Vai trò sáng tạo của tư duy toán học trong nhận thức khoa học. *Tạp chí Triết học*, số 4 (191).

<https://www1.trangcongnghe.com/tin-tuc-cong-nghe/31669-vai-tro-cua-nha-toan-hoc-lon-nhat-the-ky-20-gdel-trong-cuoc-tim-kiem-su-that.html>

<http://www.thongtincongnghe.com/article/14402>.

<http://ebook.net.vn/ebook/su-dung-ngon-ngu-lap-trinh-mathematica-de-giai-mot-so-bai-toan-ve-nang-luong-lien-ket-va-su-phong-xa-cua-hat-nhan-chuong-5955/>.

http://download2.nust.na/pub4/sourceforge/r/r/rlnvsp/2014/Individuals/NguyenThiThuTrang_Mathematica_Baitoan_giaitich.pdf.

<http://vienthongke.vn/tin-tuc/43-tin-tuc/1234-hoi-thao-khoa-hoc-thong-ke-truc-tuyen-cua-wolfram>.

<http://www.ebook.edu.vn/?page=1.39&view=1263>.

<http://www.pcworld.com.vn/articles/kinh-doanh/giai-phap/2010/12/1222458/mathematica-8-phan-mem-dai-so-hieu-ngon-ngu-tu-nhien/>.

<http://diendantoanhoc.net/topic/40210-mathematica-60/>.

<http://baohtb.com/chuyen-de/cac-phuong-phap-tim-cuc-tri-cua-ham-so.html>