TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 5 (2021): 804-816

Vol. 18, No. 5 (2021): 804-816

ISSN: 2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM VỀ SAI LẦM TRONG ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH CỦA HÀM MỘT BIẾN THỰC CỦA SINH VIÊN NGÀNH TOÁN

Nguyễn Ái Quốc**, Trần Thị Thanh Nhi

Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: nguyenaq2014@gmail.com*

Ngày nhận bài: 25-3-2021; ngày nhận bài sửa: 24-4-2021; ngày duyệt đăng: 04-5-2021

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả của một thực nghiệm về các sai lầm của sinh viên (SV) ngành Toán khi giải quyết các kiểu nhiệm vụ (KNV) liên quan đến ứng dụng của tích phân xác định của hàm một biến thực (UDTPXĐHMBT). Các KNV được quan tâm đến trong thực nghiệm liên quan đến việc tính diện tích của một hình phẳng giới hạn được xét trong hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cực. Các sai lầm mà sinh gặp phải xuất phát từ những ràng buộc của thể chế Toán của hai Trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Sài Gòn. Kết quả nghiên cứu giúp các nhà đào tạo sư phạm có thể hình dung được những trở ngại mà sinh viên gặp phải khi tiếp cận vai trò công cụ của Tích phân xác định của hàm một biến thực.

Từ khóa: quy tắc hành động; diện tích hình phẳng; tích phân xác định; sai lầm; chướng ngại

1. Mở đầu

1.1. Sai lầm và chướng ngại

Theo Brousseau (1983, p. 171),

> Sai lầm không phải chỉ là hậu quả của sự không biết, không chắc chắn, ngẫu nhiên, như cách nghĩ của những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm và chủ nghĩa hành vi, mà còn có thể là hậu quả của những kiến thức đã có từ trước, những kiến thức đã từng có ích đối với việc học trước kia, nhưng lại là sai, hoặc đơn giản là không còn phù hợp nữa đối với việc lĩnh hội tri thức mới. Những sai lầm thuộc loại này không phải thất thường hay không dự đoán được. Chúng tạo thành chướng ngại. Trong hoạt động của giáo viên cũng như trong hoạt động của học sinh, sai lầm bao giờ cũng góp phần xây dựng nên nghĩa của kiến thức được thu nhận bởi những chủ thể này.

Như vậy, theo G. Brousseau (1983), nếu ở học sinh có những sai lầm nào đó mang tính hời hợt, hết sức riêng biệt, thì cũng còn có những sai lầm khác không phải ngẫu nhiên

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc, & Tran Thi Thanh Nhi (2021). An experimental study on Mathematics students' errors in definite integral's application of functions of a real variable. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *18*(5), 804-816.

được sinh ra. Những sai lầm đó không nằm ngoài kiến thức, chúng chính là biểu hiện của kiến thức. Ở cùng một chủ thể, những sai lầm khác nhau có thể có chung một nguồn gốc.

1.2. Chướng ngại có nguồn gốc sư phạm

Theo Brousseau (1983), chướng ngại có nguồn gốc sư phạm là chướng ngại dường như chỉ phụ thuộc vào sự lựa chọn của hệ thống dạy học. Để xác định chướng ngại có nguồn gốc sư phạm, cần thực hiện một phân tích các giáo trình được sử dụng trong dạy học để làm rõ tri thức cần dạy được chuyển hóa như thế nào từ cấp độ tri thức bác học, được đưa vào giáo trình như thế nào, bao gồm các dạng bài toán gì, có mối liên kết với các tri thức khác như thế nào, và ảnh hưởng tác động qua lại giữa các tri thức với nhau.

Trong nghiên cứu này, chướng ngại có nguồn gốc sư phạm sẽ được nhận diện qua nghiên cứu phân tích giáo trình được sử dụng cho việc giảng dạy Ứng dụng của Tích phân xác định hàm một biến thực.

1.3. Quy tắc hành động

> Một quy tắc hành động là một mô hình được xây dựng nhằm giải thích và chỉ rõ những kiến thức mà học sinh đã sử dụng để đưa ra câu trả lời khi thực hiện một nhiệm vụ xác định. Quy tắc hành động này liên quan đến một hay nhiều tính chất toán học gắn bó rất chặt chẽ với các quy trình hay câu trả lời của học sinh…
>
> Các quy tắc hành động này – được chỉ rõ qua việc nghiên cứu những câu trả lời sai của học sinh, vẫn có thể mang lại câu trả lời đúng trong một số tình huống. (Bessot, Comiti, Le, & Le, 2009, p. 81)

Để thuận tiện cho việc trình bày, chúng tôi gọi thể chế Toán của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên là thể chế K, thể chế Toán của Trường Đại học Sài Gòn là thể chế S, giáo trình Giải tích – Hàm một biến được sử dụng trong thể chế K là giáo trình K, và giáo trình Giải tích toán học I được sử dụng trong thể chế S là giáo trình S.

2. Một số ghi nhận và giả thuyết nghiên cứu

2.1. Một kết quả nghiên cứu ban đầu

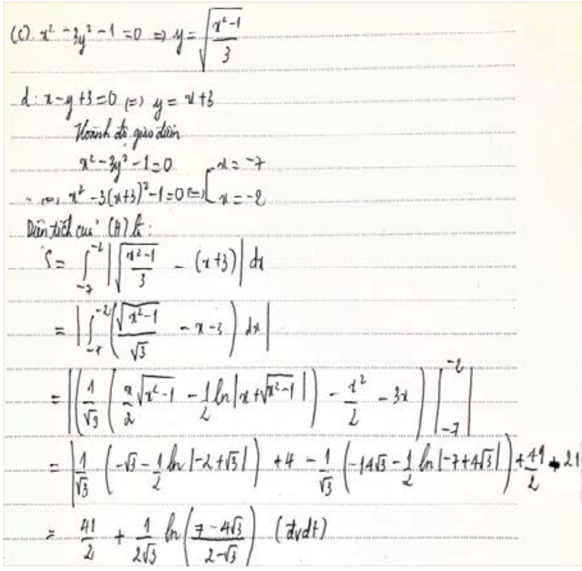
Thực tế dạy học cho thấy, dù tiếp cận UDTPXĐHMBT ở lớp 12 (Ministry of Education and Training, 2009) và năm thứ nhất đại học, nhưng vẫn tồn tại ở SV một số sai lầm, chẳng hạn thiết lập không đúng công thức tích phân tính diện tích của miền được giới hạn bởi các đường. Xuất phát từ thực tiễn trên, ngày 26/3/2020 chúng tôi tiến hành một khảo sát ban đầu đối với 14 SV năm nhất đã kết thúc phần UDTPXĐHMBT trong Giải tích: 9 SV của thể chế S và 5 SV của thể chế K. Mục đích của khảo sát là nhằm tìm hiểu quan niệm của SV về UDTPXĐHMBT sau khi học xong học phần trên. Các SV này thuộc ngành Toán Lí thuyết thuộc thể chế K, và ngành Sư phạm Toán và Toán Ứng dụng thuộc thể chế S. Chúng tôi lựa chọn các SV thuộc nhiều ngành Toán khác nhau để quan sát xem các sai lầm họ gặp phải có giống nhau hay không sau khi học cùng một nội dung tri thức về UDTPXĐHMBT. Nội dung khảo sát là một bài toán tính diện tích của một hình phẳng (không cho kèm hình vẽ):

Bài toán. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đường (C): $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ và đường thẳng (d): $x - y + 3 = 0$.

Mục tiêu của bài toán này là nhằm tìm hiểu xem SV có tính được diện tích của một hình phẳng giới hạn bởi hai đường giao nhau bất kì không. Chúng tôi đã lựa chọn hình phẳng (*H*) giới hạn bởi một đường thẳng và một nhánh của hyperbol, nhằm tìm hiểu xem SV sẽ ứng xử như thế nào với một đường cong không phải là đồ thị của một hàm số khi tính diện tích hình phẳng (*H*). Kết quả mong đợi của bài toán là $S=\frac{15}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$ (đvdt)

Kết quả khảo sát có 6 SV trình bày lời giải đúng với hình vẽ kèm theo, trong đó 4 SV tính tích phân theo biến *x* và chia hình phẳng thành hai miền giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số. Hai SV còn lại đã tính tích phân theo biến *y*. Trong số 8 bài giải không đúng, có 7 SV sau khi xác định hoành độ giao điểm của (*C*) và (*d*), từ phương trình của (*C*) đã chọn một phương trình biểu diễn *y* theo *x* và kết hợp với phương trình của (*d*) để thiết lập công thức tính diện tích $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$. SV còn lại sau khi xác định hoành độ giao điểm của (*C*) và (*d*), đã không viết được hàm dưới dấu tích phân.

Như vậy, kết quả khảo sát cho thấy, hầu hết SV đều sử dụng chiến lược xác định hàm số *y* theo biến *x* từ phương trình của đường hyperbol và sử dụng công thức $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ để tính diện tích hình phẳng. Kĩ thuật tính bao gồm các bước: biểu diễn *y* theo *x*, tìm hoành độ giao điểm, lập hiệu của hai hàm số, tính tích phân của giá trị tuyệt đối của hiệu hai hàm số. Tuy nhiên, kĩ thuật này không cho giá trị đúng của diện tích hình phẳng cần tìm vì việc chọn hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ (C_1) hay $y=-\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}(C_2)$ đều dẫn đến miền được tính diện tích không phải là miền cần tính diện tích. Rõ ràng hơn, nếu SV chọn hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ thì miền được tính diện tích là hình tam



(C): $x^2-3y^2-1=0 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$

d: $x-y+3=0 \Leftrightarrow y=x+3$

Hoành độ giao điểm

$x^2-3y^2-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-3(x+3)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-7\\ x=-2\end{array}\right.$

Diện tích của (H) là:

$S=\int_{-7}^{-2}\left|\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}-(x+3)\right|dx$

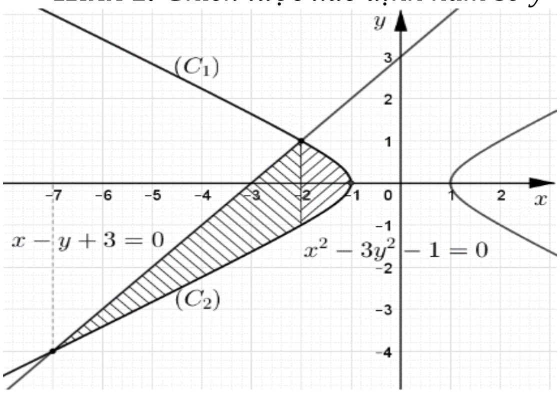
$=\left|\int_{-7}^{-2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3}}-x-3\right)dx\right|$

$=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)-\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_{-7}^{-2}\right|$

$=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln|-2+\sqrt{3}|\right)+4-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-14\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln|-7+4\sqrt{3}|\right)+\frac{49}{2}+21\right|$

$=\frac{41}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$ (đvdt)

Hình 1. *Chiến lược xác định hàm số y*



Hình 2. *Hình (H) giới hạn bởi (C) và (d)*

giác nằm phía trên đường thẳng (d), và nếu chọn hàm số $y = -\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ thì miền được tính diện tích không bao gồm phần diện tích trong đoạn $[-2, -1]$ (xem Hình 1).

2.2. Ứng dụng tích phân xác định của hàm một biến thực trong hai thể chế Toán đại học

Tích phân xác định của hàm một biến thực (TPXĐHMBT) và UDTPXĐHMBT được dạy cho SV năm nhất của ngành Toán trong cả hai thể chế K và thể chế S. Lí do lựa chọn hai thể chế này là vì thể chế K là cơ sở đào tạo SV chuyên ngành Toán Lí thuyết, thể chế S là cơ sở đào tạo SV ngành Toán Ứng dụng và Sư phạm Toán học.

2.3. Thể chế Toán K của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Trong thể chế K, TPXĐHMBT được giảng dạy cho SV năm thứ nhất ở học kì I và nằm trong học phần Vi tích phân 1A. Thời lượng cho học phần này là 60 tiết, gồm 30 tiết lí thuyết và 30 tiết bài tập. (University of Sciences, 2016)

UDTPXĐHMBT được trình bày trong chương 5: "Phép tính tích phân" của giáo trình Giải tích – Hàm một biến, ở bài 4: "Ứng dụng tích phân" và đề cập đến 6 ứng dụng chính: Tính diện tích hình phẳng, Tính thể tích vật thể, Tính độ dài của cung, Tính diện tích mặt tròn xoay, Tính khối lượng vật thể, Tính moment và trọng tâm. (Dang, Dinh, Nguyen, & Nguyen, 2012)

2.4. Thể chế Toán S của Trường Đại học Sài Gòn

Trong thể chế S, TPXĐHMBT được giảng dạy ở học kì I cho SV năm thứ nhất và nằm trong học phần Giải tích toán học I. Thời lượng cho học phần này là 90 tiết, gồm 60 tiết lí thuyết và 30 tiết bài tập. (Saigon University, 2016)

UDTPXĐHMBT được trình bày trong chương 2: "Tích phân xác định và Tích phân suy rộng" của giáo trình Giải tích toán học I phần 2, ở bài 3: "Ứng dụng tích phân" và đề cập đến 6 ứng dụng chính: Tính diện tích hình phẳng, Tính thể tích vật thể, Tính độ dài của cung, Tính diện tích mặt tròn xoay, Khối lượng bản mỏng, Ứng dụng vào xác suất. (Pham, Dang, Dinh, & Le, 2020)

2.5. Kết quả phân tích mối quan hệ thể chế K và S đối với UDTPXĐHMB

Phân tích hai giáo trình S và K cho thấy sự tồn tại 8 KNV liên quan đến UDTPXĐHMB được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. *Các KNV liên quan UDTPXĐHMBT trong hai thể chế S và K*

Kiểu nhiệm vụ	**Thể chế S**			**Thể chế K**		
	Ví dụ	**Bài tập**	**Tổng**	**Ví dụ**	**Bài tập**	**Tổng**
T_1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục Ox	1	2	3/14			
T_2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$	2	1	3/14	0	1	1/3

T_3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$	0	2	2/14			
T_4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường khép kín có phương trình cho trước	0	1	1/14			
T_5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường có phương trình cho trước	0	2	2/14			
T_6: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ trên đoạn $[\alpha , \beta]$	1	0	1/14	0	1	1/3
T_7: Tính diện tích hình quạt cong giới hạn bởi đồ thị của hàm $r = r(\varphi)$ trên đoạn $[\alpha , \beta]$	1	0	1/14			
T_8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$	0	1	1/14	0	1	1/3

Qua phân tích hai giáo trình K và S, cho phép rút ra một số điểm tương đồng về cách xây dựng các KNV trong hai thể chế K và S như sau:

- Phân loại các bài toán diện tích thành ba nhóm: hình thang cong trong tọa độ Descartes, hình quạt cong trong tọa độ cực và hình thang cong giới hạn bởi đường cho bởi phương trình tham số.
- Đều xuất hiện KNV tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số, diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cho bởi phương trình tham số trên đoạn $[\alpha, \beta]$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm trong tọa độ cực.
- Số lượng bài tập gắn với hệ tọa độ Descartes nhiều hơn (14/17) so với số lượng bài tập gắn với hệ tọa độ cực. Trong số 14 bài tập đó, số bài tập tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số theo biến *x* chiếm đa số (9/14), trong khi chỉ có 3/14 bài tập tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình cho trước và trong đó chỉ có một bài được hướng dẫn tính diện tích theo biến *y*. Mặt khác, khi giải quyết bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường, thể chế không trình bày bước kiểm tra một đường hay một phần của đường có phải là đồ thị hàm số hay không.
- Các KNV gắn liền với tính diện tích hình quạt cong hoặc hình phẳng trong tọa độ cực chưa đa dạng và số lượng bài tập gắn liền với tọa độ cực khá nhỏ (3/17). Hơn nữa, chỉ có 1 ví dụ tính diện tích hình quạt cong trong tọa độ cực với bài giải được đưa ra (trong thể chế S).

- Trong cả hai thể chế K và S, công thức và kĩ thuật giải quyết KNV tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trong tọa độ cực đều không được trình bày ngoại trừ công thức tính diện tích hình quạt cong giới hạn bởi đồ thị của một hàm số. Có thể hai thể chế ngầm ẩn SV sẽ sử dụng kĩ thuật hiệu của hai diện tích để giải quyết các bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hay ba hàm số. Tuy nhiên, SV có thể sử dụng kĩ thuật tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trong tọa độ Descartes: tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị, lập hiệu của hai hàm số, và tính tích phân của hiệu hai hàm số trên đoạn xác định bởi hoành độ của hai giao điểm, và lấy giá trị dương. Kĩ thuật này là một quy tắc hành động R, hợp lí nếu xét trong hệ tọa độ Descartes, nhưng trong một số tình huống có thể dẫn đến kết quả sai nếu xét trong hệ tọa độ cực. Lí do là vì, hiệu của hai hàm số trong hệ tọa độ Descartes là dương nếu đồ thị hàm số thứ nhất nằm phía trên đồ thị hàm số thứ hai xét theo phương thẳng đứng, nhưng trong hệ tọa độ cực hiệu này là dương nếu hai đồ thị nằm trên cùng đoạn xác định bởi hướng của hai giao điểm và đồ thị hàm số thứ nhất nằm ở vị trí xa tâm O hơn đồ thị hàm số thứ hai. Hơn nữa, phần đồ thị của hai hàm số giới hạn hình phẳng cần tính diện tích không phải lúc nào cũng nằm trên cùng đoạn xác định bởi hướng của hai giao điểm.

2.6. Giả thuyết nghiên cứu

Từ các kết quả từ ghi nhận thực tế và phân tích mối quan hệ thể chế K và S đối với UDTPXĐHMBT, cho phép chúng tôi rút ra giả thuyết nghiên cứu sau:

H: Tồn tại chướng ngại có nguồn gốc sư phạm trong hai thể chế K và S đối với UDTPXĐHMB, gắn liền với "công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trong tọa độ Descartes". Chướng ngại này biểu hiện bằng quy tắc hành động R và là nguyên nhân gây ra sai lầm của SV như sau:

Khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm trong tọa độ cực, tồn tại sai lầm trong việc thiết lập công thức tích phân tính diện tích của hình phẳng đó.

Để kiểm chứng giả thuyết nghiên cứu, chúng tôi thiết kế và tiến hành một thực nghiệm trên SV ngành Toán của cả hai thể chế K và S.

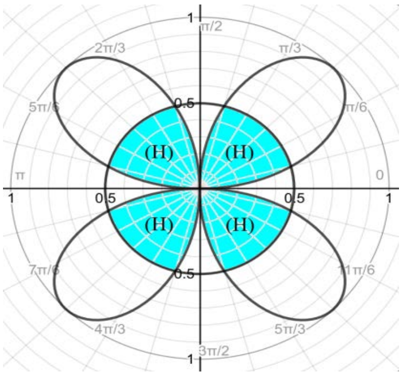
3. Thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành vào 20/01/2021 trên 97 SV, trong đó gồm 47 sinh viên ngành Toán học của thể chế K, 50 SV ngành Sư phạm Toán học của thể chế S. Tất cả 97 SV đều là thuộc năm nhất vừa hoàn thành xong học phần "Vi tích phân 1A" (trong thể chế K) hay "Giải tích Toán học I" (trong thể chế S).

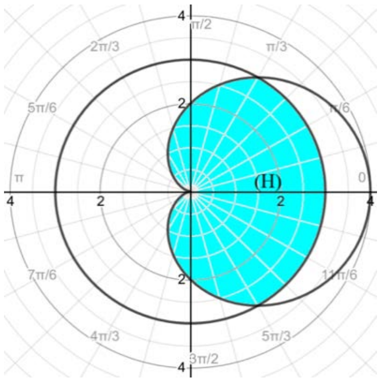
3.1. Nội dung thực nghiệm

Thực nghiệm bao gồm 2 bài toán tự luận yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường trong tọa độ cực.

Bài toán 1. Đường cong hoa hồng bốn cánh cho bởi hàm $r = sin2\varphi$ và đường tròn bán kính $r_1 = 1/2$ được vẽ trong cùng hệ tọa độ cực (Hình 3). Gọi (*H*) là phần trong của đường $r = sin2\varphi$ và nằm trong đường tròn bán kính $r_1 = 1/2$. Hãy tính diện tích của (*H*).



Hình 3.



Hình 4.

Bài toán 2. Tính diện tích phần trong của đường cardioid $r = 2(1 + cos\varphi)$ nằm trong đường tròn bán kính $r_1 = 3$ (Hình 4).

Mục đích của hai bài toán 1 và 2 là nhằm xác định sai lầm của SV trong việc thiết lập công thức tích phân tính diện tích. Đáp án của Bài toán 1 là $S_{(H)} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (đơn vị diện tích). Đáp án của Bài toán 2 là $S_{(H)} = 7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị diện tích).

3.2. Dự kiến các chiến lược giải (CLG) của SV

Đối với Bài toán 1, các CLG có thể đối với KNV tính diện tích hình (*H*) là:

CLG1. Tính gián tiếp

CLG1a. Tính diện tích phần bù của (*H*) trong hình tròn bán kính r_1 = ½.

Kí hiệu (*K*) là miền gạch chéo trong Hình 5.

Kĩ thuật 1a₁. Xem (*K*) *giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $r_1 = 1/2$ và $r = sin2\varphi$*

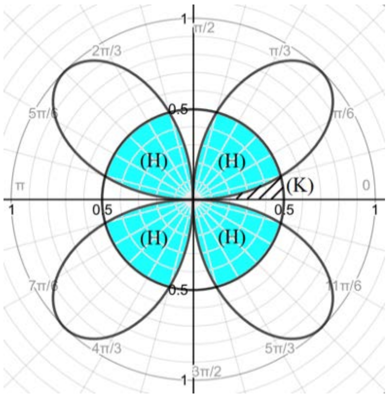
Diện tích của (*K*):

$$S_{(K)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(\frac{1}{4} - sin^2 2\varphi\right)d\varphi = -\frac{\pi}{96} + \frac{\sqrt{3}}{32} \text{ (đvdt).}$$

Diện tích của (*H*):

$$S_{(H)} = \pi r_1^2 - 8S_{(K)} = \frac{\pi}{4} - 8\left(-\frac{\pi}{96} + \frac{\sqrt{3}}{32}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(đvdt).



Hình 5.

Kĩ thuật này cho kết quả đúng.

Kĩ thuật 1a₂. Xem phần bù giới hạn bởi đồ thị của hàm $r = sin2\varphi$, trục hoành, và đường tròn r_1 = ½.

Chia (*K*) thành hai hình phẳng thành phần, giới hạn bởi đồ thị của hai hàm.

Diện tích của (*K*): $S_{(K)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(sin^2 2\varphi - 0^2)d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right]d\varphi = \frac{\pi}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}$ (đvdt).

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = \pi r_1^2 - 8S_{(K)} = \frac{\pi}{4} - 8\left(\frac{\pi}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

Kĩ thuật này cho kết quả sai vì SV sử dụng quy tắc hành động R khi tính diện tích của (*K*).

CLG1b. Tính phần bù của (*H*) trong các cánh hoa.

Gọi (*H*′) là phần của (*H*) trong 1 góc phần tư của mặt phẳng tọa độ.

Kĩ thuật 1b. Tính diện tích phần bù của (*H'*) *trong một cánh hoa* (Hình 6)

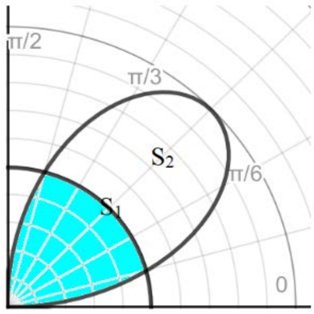
Diện tích một cánh hoa: $S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8}$ (đvdt).

Diện tích phần bù của (*H*′) với cánh hoa:

$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(sin^2 2\varphi - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}$ (đvdt).

Diện tích của (*H*′): $S_{(H')} = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ (đvdt).

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = 4S_{(H')} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Kĩ thuật này cho kết quả đúng.



Hình 6.

CLG2. Tính trực tiếp

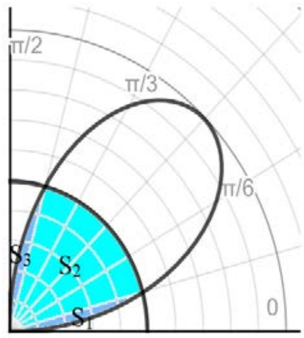
Kĩ thuật 2a. Tính tổng diện tích bằng cách chia (*H'*) *thành các hình quạt cong giới hạn bởi đồ thị của một hàm trên đoạn* [*α, β*] (Hình 7)

Diện tích của S_1 và S_3: $S_3 = S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{32}$ (đvdt).

Diện tích của S_2: $S_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{48}$ (đvdt).

Diện tích của (*H*′): $S_{(H')} = 2S_1 + S_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ (đvdt).

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = 4S_{(H')} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Kĩ thuật này cho kết quả đúng.



Hình 7.

Kĩ thuật 2b. Xem (*H*′) *giới hạn bởi đồ thị của hai hàm* $r_1 = 1/2$ *và r = sin2φ trên cùng đoạn* [*α, β*] ($r_1 \geq r$).

$S_{(H)} = 4S_{(H')} = 4\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - sin^2 2\varphi\right) d\varphi\right] = -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

(đvdt). Vì diện tích chỉ nhận giá trị dương, nên diện tích phải là $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Kĩ thuật này cho kết quả sai vì SV sử dụng quy tắc hành động R khi tính diện tích của (*H*′).

Như vậy, đối với bài toán 1, sự tồn tại của hai kĩ thuật 1a2 và 2b trong thực nghiệm sẽ cho phép kiểm chứng giả thuyết nghiên cứu H.

Đối với Bài toán 2, các CLG có thể được trình bày như sau:

Phương trình đường tròn bán kính $r_1 = 3$ là $r_1 = \pm 3$.

Giải phương trình $2(1 + cos\varphi) = \pm 3$, tìm được hướng giao điểm $\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

CLG1. Tính gián tiếp

CLG1a. Tính phần bù của (*H*) trong phần trong của đường cardioid

Kĩ thuật 1a. Xem phần bù giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $r = 2(1 + cos\varphi)$ *và* $r_1 = 3$ *trên cùng đoạn* $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

Diện tích phần trong của đường cardioid: $S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4(1 + cos\varphi)^2 d\varphi = 6\pi$ (đvdt).

Diện tích phần trong của đường cardioid nằm ngoài đường tròn:

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [4(1 + cos\varphi)^2 - 9] d\varphi = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi \text{ (đvdt)}.$$

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = S_1 - S_2 = 7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đvdt). Kĩ thuật này cho kết quả đúng.

CLG1b. Tính phần bù của (*H*) trong hình tròn bán kính $r_1 = 3$

Kĩ thuật 1b. Xem phần bù giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $r = 2(1 + cos\varphi)$ *và* $r_1 = 3$ *trên cùng đoạn* $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$

Diện tích phần ngoài của đường cardioid nằm trong đường tròn:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} [9 - 4(1 + cos\varphi)^2] d\varphi = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = \pi r_1^2 - S_1 = 9\pi - \left(2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = 7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đvdt). Kĩ thuật này cho kết quả đúng.

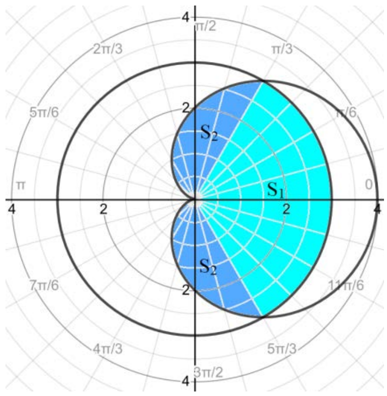
CLG 2. Tính trực tiếp

Kĩ thuật 2a. Chia (*H*) *thành các hình quạt cong giới hạn bởi đồ thị của một hàm* (Hình 8)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 9 d\varphi = 3\pi \text{ (đvdt)}.$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} 4(1 + cos\varphi)^2 d\varphi = 4\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Diện tích của (*H*): $S_{(H)} = S_1 + S_2 = 7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đvdt). Kĩ thuật này cho kết quả đúng.



Hình 8.

Kĩ thuật 2b. Xem (*H*) *giới hạn bởi đồ thị của hai hàm* $r = 2(1 + cos\varphi)$ *và* $r_1 = 3$ *trên cùng đoạn* $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

Nếu dựa vào hình vẽ (Hình 4), diện tích của (*H*):

$S_{(H)} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [9 - 4(1 + cos\varphi)^2] d\varphi = \pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đvdt). Vì diện tích chỉ nhận giá trị dương, nên diện tích phải là $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$.

Nếu không dựa vào hình vẽ, diện tích của (*H*):

$$S_{(H)} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |9-4(1+cos\varphi)^2|d\varphi = \frac{1}{2}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[9-4(1+cos\varphi)^2]d\varphi\right| = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$$

(đvdt).

Kĩ thuật này cho kết quả sai vì SV cho rằng nếu hai đồ thị giới hạn (*H*) cắt nhau tại hai điểm có hướng $\varphi_1 = \alpha + k2\pi, \varphi_2 = \beta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì (*H*) giới hạn bởi hai đồ thị đó trong cùng đoạn $[\alpha; \beta]$. Đây cũng là hệ quả của quy tắc hành động R.

3.3. Phân tích hậu nghiệm

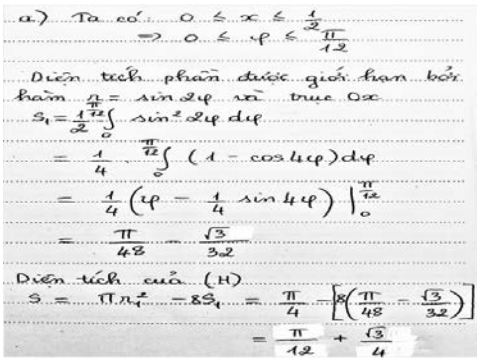
❖ *Phân tích kết quả Bài toán 1*

Có 12/97 SV đưa ra chiến lược khác và 7 SV không giải bài toán. CLG2 (tính trực tiếp) được huy động nhiều hơn CLG1 (tính gián tiếp).

***Bảng 2.** Các CLG được huy động cho Bài toán 1*

Chiến lược		**Kĩ thuật**	**Tổng**	
1	1a	$1a_1$	5/97	5,1%
		$1a_2$	**32/97**	**33%**
	1b	1b	0/97	0%
2	2a	2a	7/97	7,2%
	2b	**2b**	**34/97**	**35,1%**
Khác			12/97	12,4%
Bỏ trống			7/97	19,6%

Ba kĩ thuật cho kết quả đúng là $1a_1$, 1b và 2a không hoặc ít được SV lựa chọn. Chỉ có 12/97 SV đưa ra đáp số đúng, trong đó có 5/97 SV sử dụng kĩ thuật $1a_1$, 7/97 SV sử dụng kĩ thuật 2a, và không có SV nào sử dụng kĩ thuật 1b. Trong các kĩ thuật cho kết quả sai, kĩ thuật được huy động nhiều nhất là kĩ thuật 2b thuộc CLG2 với 34/97 trường hợp, tiếp đến là kĩ thuật $1a_2$ thuộc CLG1 với 32/97 trường hợp.



a) Ta có $0 \le x \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{12}$

Diện tích phần được giới hạn bởi hàm $r = \sin 2\varphi$ và trục Ox

$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi$

$= \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}}$

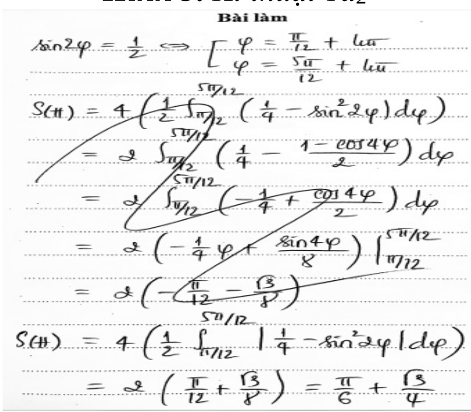
$= \frac{\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{32}$

Diện tích của (H)

$S = \pi r_1^2 - 8S_1 = \frac{\pi}{4} - 8\left(\frac{\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{32}\right)$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

Hình 9. *Kĩ thuật $1a_2$*



Bài làm

$\sin 2\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \varphi = \frac{5\pi}{12} + k\pi\end{array}\right.$

$S(H) = 4\left(\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\left(\frac{1}{4} - \sin^2 2\varphi\right)d\varphi\right)$

$= 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\left(\frac{1}{4} - \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi$

$= 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\left(-\frac{1}{4} + \frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi$

$= 2\left(-\frac{1}{4}\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12}$

$= 2\left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$S(H) = 4\left(\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\left|\frac{1}{4} - \sin^2 2\varphi\right|d\varphi\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

Hình 10. *Kĩ thuật 2b*

Các SV sử dụng kĩ thuật $1a_2$ và 2b đã áp dụng quy tắc hành động R, đặc biệt trong đó có hai SV xem (*K*) là hình phẳng trong tọa độ Descartes giới hạn bởi đồ thị của hàm $y = sin2x \geq 0$ trên đoạn [0;½] nên suy ra diện tích của (*K*) được tính bằng công thức $S_{(K)} = \int_0^{\frac{1}{2}} sin2xdx$; năm SV viết phương trình đường tròn bán kính $r_1 = 1/2$ trong tọa độ Descartes, đồng nhất $r = sin2\varphi$ với $y = sin2x$. Trong Hình 9, là bài làm của SV1 minh họa cho kĩ thuật $1a_2$. SV này đã xác định (*K*) giới hạn chỉ bởi đồ thị của hàm $r = \sin2\varphi$ và trục *Ox* mà không quan tâm đến đường tròn r_1 = ½, từ đó dẫn đến thiết lập không đúng công thức tích phân tính diện tích của (*K*). Trong Hình 10, là bài làm của SV27 minh họa cho kĩ thuật 2b. SV này nhận thấy kết quả diện tích âm nên đã gạch bỏ và thêm dấu giá trị tuyệt đối vào công thức tích phân để nhận được giá trị dương.

Ngoài ra, có 12 SV sử dụng chiến lược khác, trong đó tính diện tích của (*H*) bằng công thức $S_{(H)} = 4S_{(H')} = \frac{1}{2}\left[4\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} sin^2 2\varphi\, d\varphi\right)\right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ (đvdt). Có thể các SV này quan niệm rằng diện tích hình phẳng cần tìm bằng nửa diện tích hình cánh hoa hồng bốn cánh, nhưng không đưa ra lập luận.

❖ *Phân tích kết quả Bài toán 2*

Có 14/97 SV đưa ra chiến lược khác và 5/97 SV không giải bài toán. CLG2 (tính trực tiếp) được huy động nhiều hơn CLG1 (tính gián tiếp).

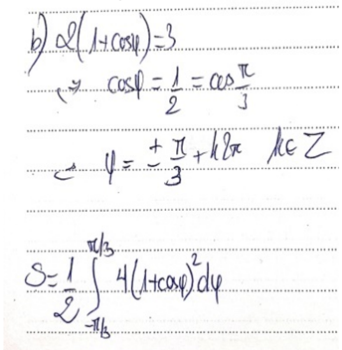
Bảng 3. *Các CLG được huy động cho KNV T_8*

Chiến lược		Kĩ thuật	Tổng	
1	1a	1a	7/97	7,2%
	1b	1b	3/97	3,1%
2		2a	8/97	8,2%
		2b	**60/97**	**61,9%**
Khác			**14/97**	**14,4%**
Bỏ trống			5/97	5,2%

Có 18/97 SV giải quyết đúng bài toán, trong đó 8 SV sử dụng kĩ thuật 2a, 7 SV sử dụng kĩ thuật 1a, và 3 SV sử dụng kĩ thuật 1b. Trong các kĩ thuật đã tiên nghiệm cho kết quả sai, kĩ thuật được huy động nhiều nhất là kĩ thuật 2b với 60/97 trường hợp (61,9%).

Có 14/97 SV sử dụng chiến lược khác, trong đó có 12 SV tính diện tích của (*H*) bằng công thức:

$S_{(H)} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4(1+cos\varphi)^2 d\varphi = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (đvdt). Có thể các SV này quan niệm rằng diện tích hình phẳng cần tìm bằng diện tích hình quạt cong giới hạn bởi đường cardioid trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. Hình 11 minh họa bài làm của SV63 sử dụng chiến lược khác.



Hình 11. *Kĩ thuật*

Ngoài ra, có 2 SV khác cũng xem (*H*) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $r = 2(1+cos\varphi)$ và $r_1 = 3$ trong cùng đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ nhưng lại thiết lập công thức tích phân tính diện tích của (*H*) không đúng. SV thứ nhất khi thiết lập công thức tích phân đã lấy bình phương của hiệu thay cho hiệu bình phương của hai hàm. SV thứ hai thiết lập công thức tích phân tính diện tích như trong tọa độ Descartes khi lấy hiệu của hai hàm mà không có sự xuất hiện của nhân tử ½ và bình phương của hai hàm.

4. Kết luận

Các kết quả thực nghiệm đã cho phép khẳng định giả thuyết nghiên cứu H nêu trong Mục 2.4. về sự tồn tại chướng ngại có nguồn gốc sư phạm trong hai thể chế K và S đối với UDTPXĐHMB, gắn liền với "công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trong tọa độ Descartes". Chướng ngại này biểu hiện ở sự tồn tại quy tắc hành động R: "Tìm hoành độ của hai giao điểm, lập hiệu của hàm số có đồ thị nằm phía trên với hàm số có đồ thị nằm phía dưới, và tính tích phân của hiệu hai hàm số trên đoạn xác định bởi hoành độ của hai giao điểm." Chướng ngại này là nguyên nhân của các sai lầm sau đây ở một số SV:

- Tồn tại ở SV sự đồng hóa cách lập công thức tích phân tính diện tích hình phẳng trong tọa độ cực với hình phẳng trong tọa độ Descartes. Theo đó, để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số, SV xác định đoạn lấy tích phân dựa vào hướng của các giao điểm, tính tích phân hiệu của hàm số có đồ thị nằm phía trên với hàm số có đồ thị nằm phía dưới theo phương thẳng đứng. Sai lầm này thể hiện ở kĩ thuật $1a_2$ cho Bài toán 1.
- Tồn tại ở SV quan niệm: xem hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm trong tọa độ cực cắt nhau tại hai điểm có hướng $\varphi_1 = \alpha + k2\pi,\ \varphi_2 = \beta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}),$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm đó trên cùng đoạn $[\alpha, \beta]$. Quan niệm như trên đã dẫn đến sai lầm trong việc thiết lập công thức tích phân tính diện tích của một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm trong tọa độ cực, thể hiện ở kĩ thuật 2b cho Bài toán 2.

Kết quả nghiên cứu cho thấy xuất hiện chiến lược chia đôi diện tích ở Bài toán 1, và chiến lược đồng diện tích ở Bài toán 2. Chiến lược này có thể xuất phát từ quan sát hình vẽ được cung cấp kèm theo đề bài toán, nhưng SV lại không đưa ra lập luận cho tính toán này.

Kết quả nghiên cứu có thể giúp các nhà đào tạo sư phạm có cái nhìn chính xác về các sai lầm mà SV gặp phải khi giải quyết các KNV tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hay ba hàm số trong tọa độ cực. Từ đó, nhà đào tạo có thể thiết kế hệ thống bài tập và các tình huống dạy học nhằm giúp SV hạn chế được các sai lầm.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bessot, A., Comiti, C., Le, T. H. C., & Le, V. T. (2009). Nhung yeu to co ban cua *didactic Toan* [*Fundamental elements of mathematics didactic*]. Publishing House of Vietnam National University Ho Chi Minh City.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Dang, D. T., Dinh, N. T., Nguyen, C. T., & Nguyen, D. P. (2012). *Giai tich – Ham mot bien* [*Analyse – Function of one variable*]. Publishing House of Vietnam National University Ho Chi Minh City.

Le, T. H. C. (2017). *Su can thiet cua phan tich tri thuc luan doi voi cac nghien cuu ve hoat dong day hoc va dao tao giao vien* [*The necessity of epistemological analysis for the studies of teaching activities and teacher training*]. *6th International Seminar on Mathematics Didactic*]. Ho Chi Minh City University of Education.

Ministry of Education and Training (2009). *Chuong trinh giao duc pho thong – Cap trung hoc pho thong* [*General education Curriculum – High school level*]. Vietnam Education Publishing House.

Pham, H. Q., Dang, D. T., Dinh, N. T., & Le, M. T. (2020). Giai tich toan hoc I – Phan 2 [*Analysis I – Part 2*]. Publishing House of Vietnam National University Ho Chi Minh City.

University of Sciences (2016). *Chuong trinh dao tao nganh Toan hoc* [*Mathematics training Curriculum*].

Saigon University (2016). *Chuong trinh dao tao trinh do dai hoc nganh su pham Toan* [*Curriculum at the university level of Mathematics Pedagogy*].

AN EXPERIMENTAL STUDY ON MATHEMATICS STUDENTS' ERRORS IN DEFINITE INTEGRAL'S APPLICATION OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE

Nguyen Ai Quoc**, *Tran Thi Thanh Nhi

Saigon Unversity, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: nguyenaq2014@gmail.com*

Received: March 25, 2021; Revised: April 24, 2021; Accepted: May 04, 2021

ABSTRACT

In this paper, we present the results of an experiment on math students' mistakes in solving types of tasks involving the application of the definite integral of a real variable function. The types of tasks that are of interest in experimentation are concerned with calculating the area of a finite plane shape considered in Cartesian and polar coordinates. The mistakes that students face come from the constraints of the Mathematical institutions of the University of Science and the Saigon University. The results can be beneficial for pedagogical trainers in a way that they can visualize the obstacles that students face when approaching the instrumental role of the definite integral of a real variable function.

Keywords: action rule; area of a plane shape; definite integral; error; obstacle