



ỨNG DỤNG MATLAB VÀ PHƯƠNG PHÁP EULER-GROMER ĐỂ KHẢO SÁT DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA CON LẮC ĐƠN

*Trần Thị Thanh Thu, Quách Khả Quang**

Trường Đại học Đồng Tháp

Ngày nhận bài: 13-7-2017; ngày nhận bài sửa: 15-11-2017; ngày duyệt đăng: 20-12-2017

TÓM TẮT

Bài toán con lắc đơn dao động dưới tác dụng của ngoại lực cưỡng bức tuần hoàn là một trong những bài toán quan trọng và thú vị trong vật lý học. Phương trình dao động tổng quát của con lắc có dạng phương trình vi phân phi tuyến bậc hai. Do đó, chúng ta không thể giải trọn vẹn bài toán bằng phương pháp giải tích thông thường mà cần phải sử dụng đến phương pháp số. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp gần đúng Euler-Gromer và ngôn ngữ lập trình Matlab để mô phỏng tính chất hỗn loạn của con lắc dưới tác dụng của ngoại lực cưỡng bức tuần hoàn ở những biên độ khác nhau.

Từ khóa: phương pháp Euler-Gromer, lập trình Matlab, tính chất hỗn loạn, ngoại lực cưỡng bức.

ABSTRACT

Using Matlab and the Euler-Cromer method to solve the driven pendulum problem

The driven pendulum problem is one of the most important and interesting in physics. The equation for the general oscillation of a driven pendulum is the second order nonlinear differential equation. Therefore, it is difficult to solve completely the equation of the driven pendulum by analytical method. So, we must construct a program to calculate a numerical solution. In this paper, the Euler-Gromer method and Matlab code will be used to investigate the chaotic properties of driven pendulum under four levels of driven forces.

Keywords: Euler-Gromer method, Matlab code, chaotic properties, driven force.

1. Đặt vấn đề

Matlab là một trong những phần mềm ứng dụng được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu đặc biệt là trong lĩnh vực mô phỏng các bài toán vật lý và kỹ thuật [1]. Sử dụng Matlab không những giải quyết triệt để được bài toán một cách tổng quát mà còn giúp người đọc hiểu rõ hơn bản chất của bài toán cũng như dự đoán được những hiện tượng có thể xảy ra. Bài toán dao động của con lắc đơn là một trong những bài toán quan trọng và khá thú vị trong chương trình vật lý [2]. Tuy nhiên, khi khảo sát đến sự tác dụng của ngoại lực cưỡng bức tuần hoàn lên con lắc, phương trình dao động của con lắc đơn sẽ có dạng là một phương trình vi phân phi tuyến bậc hai, khi đó bài toán không thể giải được bằng giải tích. Trong trường hợp này, bài toán chỉ có thể được tiến hành khảo sát chi tiết bằng phương

* Email: quachkhaquang@gmail.com

pháp số. Bài viết này sẽ trình bày phương pháp gần đúng Euler-Gromer và sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab để khảo sát, mô phỏng tính chất dao động của con lắc đơn dưới tác dụng của ngoại lực cưỡng bức với các biên độ ngoại lực khác nhau.

2. Phương trình vi phân của dao động

Xét con lắc đơn gồm một quả cầu có khối lượng m được buộc cố định trên một đầu của một sợi dây không giãn, có chiều dài là l , đầu còn lại của sợi dây được treo cố định. Giả sử biên độ dao động của con lắc (θ) có giá trị luôn luôn nhỏ, khi đó ta có thể sử dụng phép tính gần đúng: $\sin\theta \approx \theta$ (rad). Con lắc đơn khi dao động chịu ảnh hưởng của lực ma sát chẳng hạn như lực cản của không khí, lực ma sát này sẽ làm cho biên độ dao động của con lắc bị giảm dần theo thời gian. Ta gọi con lắc đang thực hiện dao động tắt dần. Một cách tổng quát, ta giả sử lực ma sát có dạng: $F_{ms} = -\mu \frac{d\theta}{dt}$, trong đó thông số μ là hệ số ma sát, dấu “-” có nghĩa là chiều của lực ma sát luôn luôn ngược với chiều chuyển động của con lắc. Để duy trì sự chuyển động của con lắc, cần tác dụng vào quả cầu một ngoại lực tuần hoàn, ngoại lực này được gọi là lực cưỡng bức có biên độ và tần số lần lượt là F_{nl} và ω_{nl} , phương trình của ngoại lực có dạng: $f_{nl} = F_{nl} \sin(\omega_{nl} t)$. Khi đó, phương trình dao động tổng quát của con lắc đơn được xác định như sau:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta - \mu \frac{d\theta}{dt} + F_{nl} \sin(\omega_{nl} t) \quad (1.1)$$

3. Phương pháp Euler-Gromer

Phương trình (1.1) là một phương trình chuyển động của con lắc tắt dần, cưỡng bức, phi tuyến tính và chứa đựng nhiều biến số. Để giải phương trình trên không thể dùng giải tích để giải một cách đầy đủ, trọn vẹn và chính xác. Do đó, để khảo sát tính chất chuyển động của con lắc trong trường hợp này, chúng tôi sử dụng bằng phương pháp gần đúng Euler-Gromer [3].

Vận tốc góc của con lắc β có dạng:

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta \quad (1.2)$$

Thay (1.2) vào (1.1) ta được phương trình

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{g}{l} \sin\theta - \mu \frac{d\theta}{dt} + F_{nl} \sin(\omega_{nl} t) \quad (1.3)$$

θ và β là những hàm phụ thuộc thời gian.

Theo Euler-Cromer, thời gian dao động của con lắc được chia thành những khoảng gián đoạn bằng nhau và được xác định: $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ suy ra $t = i \cdot \Delta t$ với $i = 1, 2, 3, \dots$

Từ (1.2) và (1.3) áp dụng phương pháp Euler-Cromer ta có:

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \beta_i - \frac{g}{l} \sin(\theta_i) \Delta t - q \beta_i \Delta t + F_{nl} \sin(\omega_{nl} t_i) \Delta t \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \beta_{i+1} \Delta t \end{cases} \quad (1.4)$$

Phương trình (1.4) là phương trình chuyển động của con lắc đơn dưới tác dụng của ngoại lực tuần hoàn và lực ma sát được thiết lập theo phương pháp gần đúng Euler-Cromer.

4. Mô phỏng và thảo luận kết quả

4.1. Mô phỏng

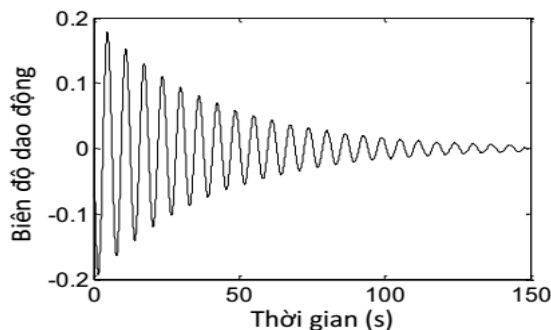
Khảo sát phương trình (1.4) bằng phương pháp Euler-Cromer với các hằng số được sử dụng để mô phỏng như sau: $\mu = 0.05$, $l = g = 9.8$, $\omega_{nl} = \frac{1}{3}$, $dt = 0.04$ (tất cả sử dụng đơn vị

SI). Các hằng số này được chọn để mô phỏng lại quá trình chuyển động hỗn loạn của con lắc đơn trong phòng thí nghiệm và có sự tác dụng của lực ma sát của không khí [4]. Thời gian khảo sát là 150 giây đủ để con lắc bộc lộ được tính chất chuyển động hỗn loạn. Các điều kiện ban đầu: $\theta(0) = 0.2$, $\beta(0) = 0$. Nghĩa là tại thời điểm ban đầu con lắc được kéo lệch khỏi vị trí cân bằng một góc có biên độ là 0.2, tại đó con lắc được thả ra không vận tốc đầu. Để nghiên cứu tính chất dao động của con lắc đơn dưới tác dụng của ngoại lực, chúng tôi sẽ khảo sát giá trị biên độ của lực cưỡng bức ở 4 mức độ: $F_{nl} = 0, 0.1, 0.5$ và 1.2.

Sau đây là một đoạn chương trình được thực hiện bằng ngôn ngữ Matlab mô tả thuật toán Euler-Cromer:

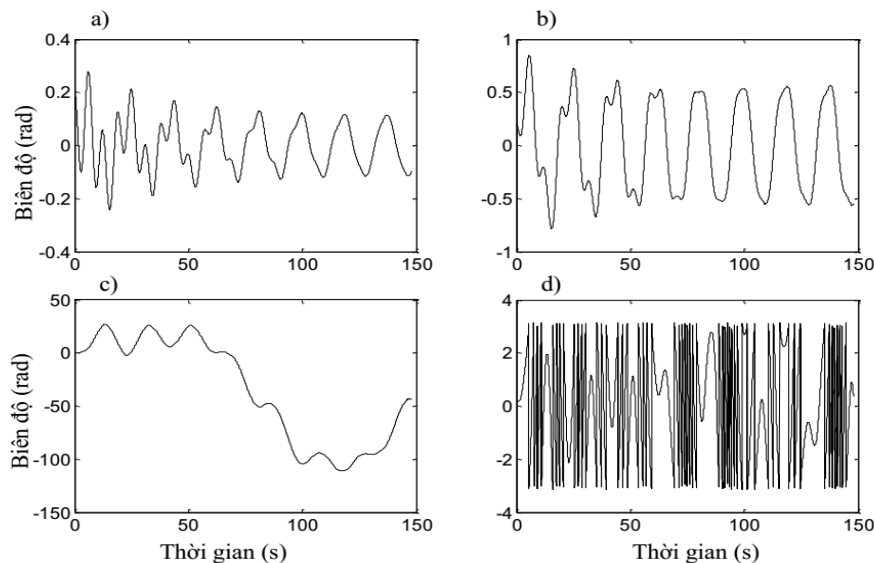
```
beta = zeros(npoints,1);
theta = zeros(npoints,1);
time = zeros(npoints,1);
theta(1) = 0.2;
beta(1) = 0;
for step = 1:npoints-1;
    beta(step+1)=beta(step)+(-(g/length)*sin(theta(step))-
    q*beta(step)+F_nl*sin(Omega_nl*time(step)))*dt;
    temporary_theta_step_plus_1 = theta(step)+beta(step+1)*dt;
    if (temporary_theta_step_plus_1 < -pi)
        temporary_theta_step_plus_1 = temporary_theta_step_plus_1+2*pi;
    else if (temporary_theta_step_plus_1 > pi)
        temporary_theta_step_plus_1 = temporary_theta_step_plus_1-2*pi;
    end;
    theta(step+1)=temporary_theta_step_plus_1;
    time (step+1) = time(step) + dt;
end;
```

4.2. Kết quả và thảo luận



Hình 1. Biên độ dao động của con lắc dao động tắt dần

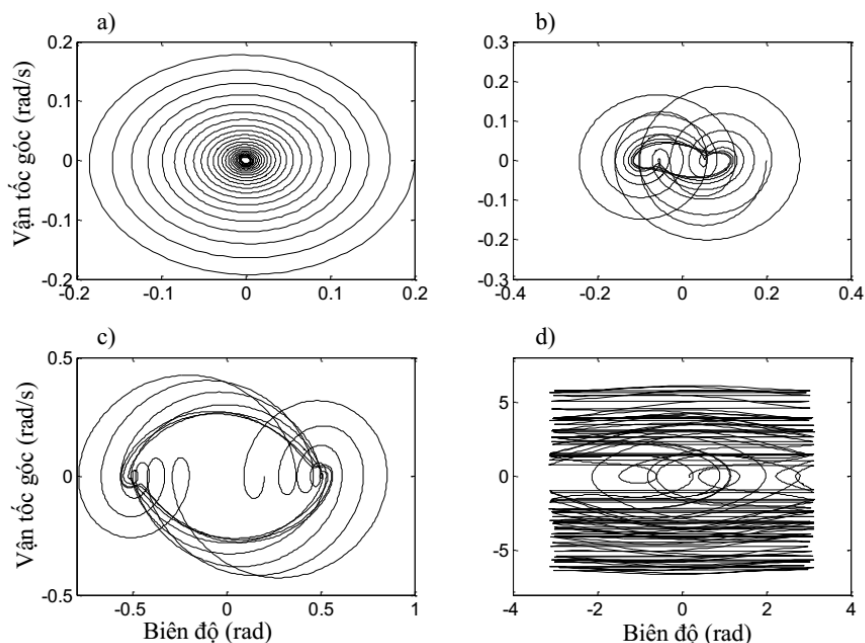
Hình 1 biểu diễn trạng thái dao động tắt dần của con lắc đơn theo thời gian. Khi không có tác dụng của lực cưỡng bức, dưới tác dụng của lực ma sát, chuyển động của con lắc là tắt dần và con lắc trở về vị trí cân bằng sau khoảng thời gian là $t = 150s$. Khi có tác dụng của ngoại lực cưỡng bức tuần hoàn với biên độ của ngoại lực nhỏ $F_{nl} = 0.1$ (Hình 2a) và $F_{nl} = 0,5$ (Hình 2b), ta thấy có hai trường hợp xảy ra. Thứ nhất, trong những dao động đầu tiên ($t < 60s$), vật chuyển động như một dao động tắt dần giống như không có lực cưỡng bức tác dụng vào hệ. Sau đó, vật dần dần dao động ổn định dưới tác dụng của ngoại lực, con lắc chuyển động với tần số bằng với tần số ngoại lực ω_f . Biên độ của dao động lúc này là không đổi, năng lượng của ngoại lực thêm vào cân bằng với năng lượng mất đi (tắt dần). Nói một cách khác, chuyển động của con lắc được thực hiện với hai tần số ω và ω_f , tần số riêng của hệ và tần số của ngoại lực.



Hình 2. Biên độ dao động của con lắc khi dưới tác dụng của lực cưỡng bức với các biên độ ngoại lực khác nhau: a) $F_{nl} = 0,1$, b) $F_{nl} = 0,5$, c) $F_{nl} = 1,2$, d) $-\pi \leq \theta \leq +\pi$.

Tính chất của dao động thay đổi một cách nhanh chóng khi lực cưỡng bức tăng lên $F_{nl}=1,2$. Chuyển động của con lắc trở nên phức tạp, trong quá trình chuyển động, góc θ biến đổi (Hình 2c), giá trị của θ tại cùng một vị trí của con lắc có giá trị sai khác nhau 2π . Để thuận tiện trong quá trình tính toán ta giới hạn θ trong khoảng từ $-\pi \rightarrow \pi$. Quy ước nếu $\theta < -\pi$ nghĩa là giá trị của nó tăng lên 2π , nếu $\theta > +\pi$, giá trị của nó giảm đi 2π . Bằng cách này ta thu được giá trị của θ là: $-\pi \leq \theta \leq +\pi$ (hình 2d). Quan sát hình vẽ ta thấy dao động của con lắc khi chịu tác dụng của lực cưỡng bức không phải là dao động điều hòa.

Khi khảo sát mối liên hệ giữa biên độ và vận tốc góc của dao động, khi không có tác dụng của ngoại lực cưỡng bức (Hình 3a), quỹ đạo xuất hiện trong không gian pha, không gian được tạo bởi trục hoành là biên độ (θ) và trục tung là vận tốc góc (β), tại thời điểm ban đầu phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $\theta(0) = 0,2$ và $\beta(0) = 0$. Và sau đó quỹ đạo có xu hướng giảm dần về vị trí cân bằng tương ứng với chuyển động dao động giảm dần của biên độ và vận tốc góc.



Hình 3. Đồ thị biểu diễn mối liên hệ giữa biên độ và vận tốc góc của con lắc trong không gian pha (biên độ - vận tốc góc): a) $F_{nl} = 0$, b) $F_{nl} = 0,1$, c) $F_{nl} = 0,5$, d) $F_{nl} = 1,2$.

Khi tăng dần biên độ của ngoại lực tác dụng $F_{nl}=0,1$ (hình 3b) và $F_{nl}=0,5$ (Hình 3c). Ta thấy quỹ đạo của đồ thị tăng dần độ phức tạp, giá trị của biên độ và vận tốc góc lúc đầu hỗn loạn ($t < 60s$) và sau đó giảm dần và “gần như ổn định”. Giá trị tuyệt đối của biên độ và vận tốc góc tại thời điểm “gần như ổn định” tỉ lệ thuận với ngoại lực cưỡng bức. Tuy

nhiên, nếu tăng giá trị của ngoại lực cưỡng bức lên đủ lớn $F_{nl} = 1,2$ (Hình 3d) thì tính ổn định lúc này của hệ gần như biến mất. Giá trị của biên độ dao động lúc này liên tục tăng, giảm từ π đến $-\pi$ và ngược lại. Nói cách khác tính chất hỗn loạn của hệ con lắc chuyển động dưới tác dụng của ngoại lực cưỡng bức được thể hiện rõ ràng hơn trong không gian pha (biên độ - vận tốc góc).

5. Kết luận

Bài toán chuyển động hỗn loạn của con lắc đơn dưới tác dụng của ngoại lực cưỡng bức đã được khảo sát ở 4 mức độ khác nhau của biên độ ngoại lực. Với các thông số đã cho, sử dụng phương pháp gần đúng Euler-Gromer và ngôn ngữ lập trình Matlab, kết quả bài viết đã chỉ rõ được đặc tính chuyển động hỗn loạn của con lắc khi chịu tác dụng của ngoại lực. Các kết quả ở Hình 2 cho thấy biên độ dao động của con lắc thay đổi khi chịu tác dụng của ngoại lực. Hình 3, chỉ rõ những tính chất hỗn loạn trong quá trình dao động của con lắc khi chịu tác dụng của ngoại lực cưỡng bức ở những biên độ lực khác nhau. Đây là một trong những kết quả khá thú vị của bài toán dao động của con lắc.

Tóm lại, ngôn ngữ Matlab và các phương pháp gần đúng Euler-Gromer là những công cụ hỗ trợ thực sự hữu ích giúp mô phỏng, khảo sát thành công bài toán dao động của con lắc đơn chuyển động dưới tác dụng của ngoại lực tuần hoàn.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Phùng Quang, *Matlab & Simulink dành cho kỹ sư điều khiển tự động*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005.
- [2] Lương Duyên Bình, *Vật lý đại cương (tập 1)*. NXB Giáo dục, 1997.
- [3] Kevin Berwick, *Computational Physics using MATLAB®*, West Lafayette, Indiana, USA, 2012.
- [4] Louis Ehwerhemuepha, Godfrey E. Akpojotor, *Simulation and Visualization of Chaos in a Driven Nonlinear Pendulum – An Aid to Introducing Chaotic Systems in Physics*, Nguồn: arXiv, 2013.