TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 19, Số 2 (2022): 251-265

Vol. 19, No. 2 (2022): 251-265

ISSN: 2734-9918

Website: http://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.2.3377(2022)

Bài báo nghiên cứu

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN VỀ SỰ HÌNH THÀNH ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM CỦA WEIERSTRASS

Nguyễn Ái Quốc

Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Ngày nhận bài: 04-6-2019; ngày nhận bài sửa: 04-9-2021; ngày duyệt đăng: 11-02-2022

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận làm rõ quá trình hình thành định nghĩa giới hạn hàm số theo epsilon-delta ($\varepsilon - \delta$) của Weierstrass. Nghiên cứu phân tích nguồn gốc ra đời của khái niệm giới hạn và điều kiện hình thành định nghĩa giới hạn hàm số của Weierstrass qua các giai đoạn từ thời Cổ đại đến cuối thế kỉ XIV. Các kết quả nghiên cứu cho phép xác định được hai quan điểm toán học đã ảnh hưởng lên sự hình thành định nghĩa của Weierstrass, đó là nghiêm ngặt hóa và số học hóa giải tích; và một số chướng ngại tri thức luận gắn liền với định nghĩa của Weierstrass. Kết quả nghiên cứu góp phần làm sáng tỏ nguồn gốc tri thức luận của các khó khăn, sai lầm mà sinh viên ngành Sư phạm Toán học gặp phải khi tiếp cận định nghĩa giới hạn hàm số theo epsilon-delta ($\varepsilon - \delta$) của Weierstrass.

Từ khóa: epsilon-delta; chướng ngại; giới hạn hàm số; phân tích tri thức luận; nghiêm ngặt hóa, số học hóa

1. Giới thiệu

1.1. Sự cần thiết nghiên cứu khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm theo nghĩa của Weierstrass

Khái niệm giới hạn là một trong những khái niệm cơ sở cho việc thiết lập nền tảng giải tích hiện đại. Nó được sử dụng để xây dựng những khái niệm khác trong giải tích như hội tụ, liên tục, khả vi và khả tích của hàm số; một số khái niệm trong giải tích hàm, xác suất và thống kê. Việc không hiểu rõ khái niệm giới hạn có thể dẫn đến những khó khăn khi học các khái niệm khác.

Lịch sử hình thành khái niệm giới hạn hàm số đã cung cấp những lí do sâu sắc tại sao SV gặp khó khăn khi hiểu ý tưởng của giới hạn. Trong suốt nhiều năm, các nhà giáo dục toán học đã nhận thấy định nghĩa giới hạn hàm số của Weierstrass gây khó khăn cho học sinh, sinh viên (SV) trong việc học và trong giảng dạy của giáo viên. Cụ thể là khi vừa tiếp

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc (2022). An epistemological analysis of the formulation of Weierstrass' limit definition of a function at a point. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(2), 251-265.

cận định nghĩa ε-δ của giới hạn hàm số tại một điểm, SV gặp nhiều khó khăn trong việc xác định δ sao cho x đủ gần x_0 để khoảng cách giữa $f(x)$ và giới hạn L bé hơn ε.

Liên quan đến khó khăn của SV trong việc sử dụng định nghĩa để chứng minh một giới hạn hàm số tại một điểm, chúng tôi đã tiến hành một thực nghiệm khảo sát đối với 23 SV năm 1 ngành Sư phạm Toán Trường Đại học Sài Gòn vào ngày 18/12/2018. Các SV này đang học học phần Giải tích 1. Thực nghiệm được tiến hành trong thời gian 30 phút. Nội dung thực nghiệm bao gồm 3 câu hỏi:

Câu 1. *Bạn hãy định nghĩa giới hạn hàm số* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *theo ngôn ngữ* ε, δ. *Bạn hãy mô tả định nghĩa trên theo cách hiểu của mình.*

Câu 2. *Bạn hãy dùng định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ* ε, δ *để chứng minh rằng:* $\lim_{x\to 3} x^2$

Câu 3. *Bạn hãy dùng định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ* ε, δ *để chứng minh rằng*: $\lim_{x\to 2}\frac{4x}{x-4} = -4$.

Mục tiêu của câu 1 là nhằm tìm hiểu SV có nhớ được và hiểu như thế nào về định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm. Theo Stewart (2016, p.73), giới hạn hàm số tại một điểm a được định nghĩa như sau: Cho f là hàm số xác định trên khoảng mở nào đó chứa số a, ngoại trừ có thể tại chính số a. Ta nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a là L, và ta viết $lim_{x\to a} f(x) = L$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x-a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Mục tiêu của câu hỏi 2 và 3 là nhằm tìm hiểu SV vận dụng định nghĩa như thế nào để chứng minh một giới hạn hàm số tại một điểm. Trong câu hỏi 2, việc ước lượng δ dễ dàng hơn so với câu hỏi 3 vì hàm số được cho là hàm đa thức bậc 2 đơn giản, còn trong câu hỏi 3 là hàm phân thức nên cần nhiều phép biến đổi hơn.

Ở câu hỏi 2, câu trả lời được mong đợi là:

Cho ε > 0, đặt $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$, nếu $0 < |x-3| < \delta$ thì $|x-3| < 1$, do đó $2 < x < 4$,

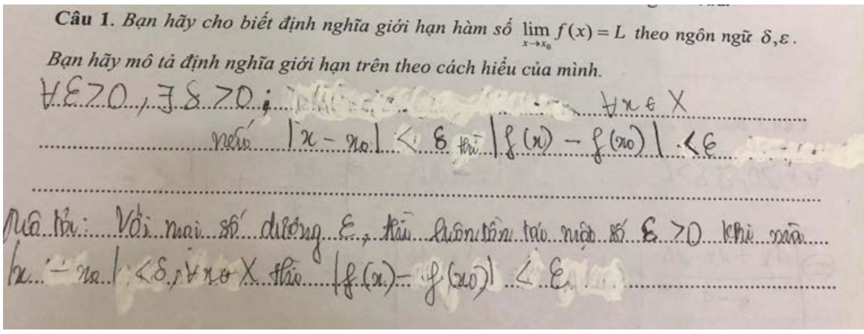
suy ra $|x+3| < 7$. Ta lại có $|x-3| < \varepsilon/7$, vì vậy $|x^2-9| = |x+3||x-3| < 7.\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$.

Ở câu hỏi 3, câu trả lời được mong đợi là: Cho ε > 0, đặt $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$,

nếu $0 < |x-2| < \delta < 1$ thì $-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow \frac{8}{|x-4|} < 8$.

Ta có: $\frac{8|x-2|}{|x-4|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|8x-16|}{|x-4|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4x}{x-4} - (-4)\right| < \varepsilon$.

Đối với câu hỏi 1, có 6/23 SV không viết được chính xác định nghĩa giới hạn hàm số. Có 10/23 SV mô tả khi x tiến dần đến x_0 thì $f(x)$ tiến dần đến L. Mô tả này không chính xác theo nghĩa toán học. Câu trả lời của SV S1:



Câu 1. Bạn hãy cho biết định nghĩa giới hạn hàm số $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ theo ngôn ngữ δ,ε.
Bạn hãy mô tả định nghĩa giới hạn trên theo cách hiểu của mình.

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$; $\forall x \in X$
nếu $|x-x_0|<\delta$ thì $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

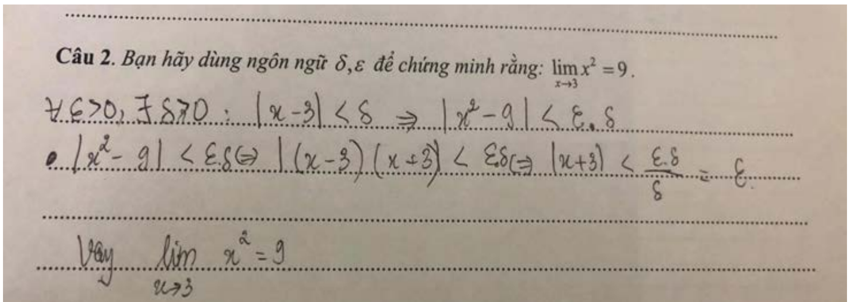
Mô tả: Với mọi số dương ε, luôn tồn tại một số $\delta>0$ khi mà $|x-x_0|<\delta, \forall x \in X$ thì $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

S1 viết chưa chính xác khái niệm $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ và cũng chỉ diễn đạt lại định nghĩa bằng lời và chưa mô tả được ý nghĩa của khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm.

Kết quả cho thấy SV còn lúng túng khi đề cập đến định nghĩa giới hạn hàm số và có biểu hiện của chướng ngại tri thức luận mà Lê Thái Bảo Thiên Trung (2017) đã chỉ ra (Le, 2017).

Đối với câu hỏi 2 và câu hỏi 3, không có SV nào thành công trong việc chứng minh giới hạn bằng định nghĩa ε-δ. Tất cả SV đều thất bại trong việc ước lượng δ.

Ở câu hỏi 2, có 3/23 SV không có câu trả lời, các SV còn lại đều có đáp án không chính xác và đầy đủ. Hầu như không có SV nào chọn được giá trị δ theo ε chính xác và chặt chẽ. Câu trả lời của SV S2 cho câu 2:

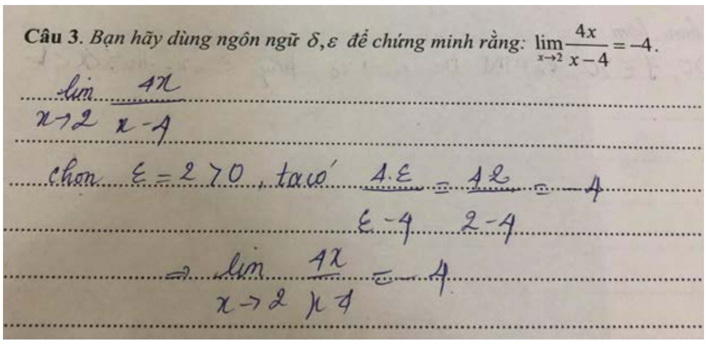


Câu 2. Bạn hãy dùng ngôn ngữ δ,ε để chứng minh rằng: $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: |x-3|<\delta \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon.\delta$
$|x^2-9|<\varepsilon\delta \Leftrightarrow |(x-3)(x+3)|<\varepsilon\delta \Rightarrow |x+3|<\frac{\varepsilon.\delta}{\delta}=\varepsilon$.
Vậy $\lim_{x\to 3} x^2=9$

Câu trả lời của S2 trên chưa đúng khi tự gán $|x-3|<\delta$ mà không chọn được giá trị δ theo ε. S2 cũng hiểu sai nghĩa của khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm dẫn đến chứng minh sai.

Ở câu hỏi 3, có 9/23 SV không có câu trả lời cho câu hỏi 3 và không có SV nào chọn được giá trị δ đủ chặt chẽ như đáp án. Câu trả lời của SV S3 cho câu 3:



Câu 3. Bạn hãy dùng ngôn ngữ δ,ε để chứng minh rằng: $\lim_{x\to 2}\frac{4x}{x-4}=-4$.

$\lim_{x\to 2}\frac{4x}{x-4}$
Chọn $\varepsilon=2>0$, ta có $\frac{4.\varepsilon}{\varepsilon-4}=\frac{4.2}{2-4}=-4$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{4x}{x-4}=-4$

S3 đã hiểu sai nghĩa của khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm, không chọn được giá trị δ theo ε mà lại chọn một giá trị ε bất kì.

Kết quả khảo sát cho thấy tồn tại các khó khăn sau ở SV:

- Không nhớ định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε-δ;
- Không hiểu nghĩa của khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm;
- Không ước lượng được δ theo ε để chứng minh giới hạn hàm số.

1.2. Sự cần thiết của phân tích tri thức luận

Việc xác định các khó khăn, sai lầm của SV trong học Toán và nguồn gốc của chúng luôn là nhiệm vụ đầu tiên đặt ra đối với các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước, đặc biệt là những nhà nghiên cứu người Pháp trước khi đưa ra các giải pháp giúp SV loại bỏ các sai lầm đó. Theo Brousseau:

> "Sai lầm không phải chỉ là hậu quả của sự không biết, không chắc chắn, ngẫu nhiên, như cách nghĩ của những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm và chủ nghĩa hành vi, mà còn có thể là hậu quả của những kiến thức đã có từ trước, đã từng có ích đối với việc học trước kia, nhưng lại là sai, hoặc đơn giản là không còn phù hợp nữa đối với việc lĩnh hội tri thức mới. Những sai lầm thuộc loại này không phải thất thường hay không dự đoán được. Chúng tạo thành chướng ngại. Trong hoạt động của giáo viên cũng như trong hoạt động của học sinh, sai lầm bao giờ cũng góp phần xây dựng nên nghĩa của kiến thức được thu nhận bởi những chủ thể này." (Brousseau, 1983, p.171)

Brousseau phân biệt các chướng ngại tùy theo nguồn gốc của chúng, trong đó ông định nghĩa chướng ngại tri thức luận là chướng ngại gắn liền với lịch sử phát triển của tri thức mà việc vượt qua nó đóng vai trò quyết định đối với quá trình xây dựng kiến thức của chủ thể. Trong học tập, việc vượt qua những chướng ngại tri thức luận là điều không thể tránh khỏi, bởi đó là yếu tố cấu thành nên kiến thức. Để nghiên cứu các chướng ngại tri thức luận, Brousseau đã đề nghị tiến trình sau :

- Xác định những sai lầm thường xuyên tái diễn, chứng tỏ rằng chúng có thể nhóm lại quanh một quan niệm.
- Nghiên cứu xem có tồn tại hay không những chướng ngại trong lịch sử xây dựng khái niệm toán học.
- Đối chiếu các chướng ngại lịch sử với chướng ngại học tập để nếu có thể thì thiết lập đặc trưng khoa học luận của chướng ngại.

1.3. Nghiêm ngặt hóa giải tích

Theo Kleiner (2012), nhìn lại 2500 năm sử dụng chứng minh trong toán học, không chỉ các tiêu chuẩn về nghiêm ngặt đã thay đổi mà còn có các công cụ toán học được sử dụng để thiết lập sự nghiêm ngặt. Do đó, ở Hi Lạp cổ đại, một định lí không phải là một tính chất được thiết lập cho đến khi nó được hình học hóa. Vào thời Trung cổ và Phục Hưng, hình học tiếp tục là người quyết định cuối cùng của sự nghiêm ngặt toán học và ngay cả trong đại số. Trực giác về không gian của các nhà toán học xuất hiện, có lẽ đáng tin cậy hơn so với hiểu biết của họ về số – một di sản thừa kế của các hậu quả của "cuộc khủng hoảng về tính vô ước" ở Hi Lạp cổ đại. Giải tích của thế kỉ XVII và đặc biệt là thế kỉ XVIII không còn dễ dàng được chứng minh bằng thuật ngữ hình học, và đại số đã trở thành công cụ chính của chứng minh. Có sự kết hợp giữa đại số và hình học trong tác phẩm của Cauchy. Với Weierstrass và Dedekind ở nửa phần sau của thế kỉ XIX, số học thay vì hình học hay đại số đã trở thành ngôn ngữ của toán học nghiêm ngặt. (p.163-164)

Theo Jahnke (2016), thế kỉ XIX thường được gọi là thời kì nghiêm ngặt trong toán học. Đây là sự mô tả đặc điểm chính xác theo nghĩa giải tích được thiết lập trên một nền tảng mà chúng ta luôn nhận ra thỏa đáng. Sự nghiêm ngặt hóa không chỉ là một vấn đề làm rõ một vài khái niệm cơ bản và thay đổi các chứng minh của một vài định lí cơ bản; mà nó còn xâm nhập hầu hết mọi lĩnh vực của giải tích và thay đổi nó thành ngành học mà chúng ta đang học ở trường trung học và tại các trường đại học. Phong trào hướng tới nghiêm ngặt thậm chí có thể được coi là một quá trình sáng tạo. Nó tạo ra toàn bộ các lĩnh vực mới của toán học, đặc biệt là các nền tảng vững chắc của giải tích liên quan đến các khái niệm hoàn toàn mới như tính liên tục điểm và liên tục đều, tính compac, tính đầy đủ… (p.155)

Theo Jahnke (2016), sự nghiêm ngặt hóa giải tích có thể được chia thành hai giai đoạn: thời kì Pháp do Cauchy thống trị và thời kì Đức do Weierstrass thống trị. Điều này phản ánh một bức tranh chung của toán học thế kỉ XIX, khi đó Pháp là nước dẫn đầu về toán học nửa thế kỉ đầu và Đức dẫn đầu ở nửa thế kỉ sau. (p.156)

Nền tảng của nghiêm ngặt được thể hiện qua các tác phẩm của Cauchy, Bolzano và Weierstrass. Các đặc điểm cơ bản chính yếu là:

- Sự xuất hiện của khái niệm giới hạn trở thành nền tảng của Giải tích;
- Vai trò quan trọng của bất đẳng thức trong các định nghĩa và các chứng minh;
- Xác định tính đúng đắn của các kết quả trong Giải tích phải xét đến miền xác định của hàm số.
- Để có nền tảng logic của Giải tích thì phải hiểu rõ bản chất của hệ thống số thực dựa trên số học chứ không phải trên quan niệm hình học về sự liên tục của các số thực. (Kleiner, 2001, p. 159)

1.4. Số học hóa giải tích

"Số học hóa giải tích" đề cập đến đồng thời tên các nhà toán học Cauchy, Weierstrass, Cantor, Dedekind, Dirichlet, Abel và Bolzano. Tiến trình số học hóa cho thấy sự cần thiết phải đưa ra sự nghiêm ngặt trong giải tích để vượt qua sự giới hạn trực quan của các phương pháp chứng minh của các nhà hình học. (Gauthier, 2010, p.5)

Theo Jahnke (2016), vào thế kỉ XVIII, một số nhà toán học đã cố gắng đặt nền móng giải tích dựa trên đại số thay cho hình học. Cách tiếp cận này phần lớn bị từ chối trong thế kỉ XIX. Thay vào đó, số tự nhiên và số học đã cung cấp nền tảng vững chắc, và khoảng năm 1870, "Số học hóa" đã trở thành một khẩu hiệu. Các số thực và số phức được xây dựng từ các số hữu tỉ, và các số hữu tỉ được xây dựng từ các số tự nhiên, và giải tích được dựa trực tiếp trên cách xây dựng mới này bằng cách hoàn toàn bỏ qua hình học. Mặc dù, Pasch, Peano, Pieri và Hilbert cùng lúc đã đưa ra một nền tảng tiên đề vững chắc về hình học, nhưng hình học không bao giờ lấy lại được vai trò cơ sở của giải tích. (p.156)

Theo Lakorff và Núñez (2000, p.262) và Ueno (2003, p.71), cụm từ "Số học hóa Giải tích" đề cập đến những nỗ lực của các nhà toán học thế kỉ XIX để tạo ra một "lí thuyết về số thực... sử dụng các kiến tạo lí thuyết tập hợp, bắt đầu từ các số tự nhiên". Những nỗ lực này đã diễn ra trong khoảng thời gian 50 năm, với các kết quả như sau:

- Thiết lập các khái niệm cơ bản liên quan đến giới hạn;
- Rút ra các định lí chính liên quan đến các khái niệm đó;
- Tạo ra lí thuyết về số thực.

Số học hóa Giải tích là cơ sở quan trọng cho việc xuất hiện định nghĩa giới hạn hàm số của Weierstrass.

> "Thuật ngữ "Số học hóa" (*Arithmetization*) được sử dụng vào thế kỉ XIX là một mô tả chung các chương trình khác nhau cung cấp các nền tảng phi hình học cho Giải tích hay các lĩnh vực toán học khác. Các chương trình này bao gồm các kiến tạo của tính liên tục của các số thực từ (các tập hợp vô hạn, hay các dãy) số hữu tỉ, cũng như làm rõ khái niệm về hàm số, giới hạn, v.v." (Petri & Schappacher, 2007, p.343)

Hai chủ đề chính trong các nghiên cứu của Weierstrass là "Số học hóa Giải tích" và chuỗi lũy thừa cùng với chuỗi hàm. Chương trình "Số học hóa giải tích" *(Arithmetisierung der Analyse)* của Weierstrass là chương trình để tách Giải tích khỏi Hình học và cung cấp cho nó một nền tảng giải tích vững chắc. Cung cấp một cơ sở logic cho các số thực, hàm số và giải tích là một giai đoạn cần thiết trong quá trình phát triển Giải tích. Weierstrass là một trong những người dẫn đầu của phong trào này trong các bài giảng và bài báo của ông.

"Ông không chỉ mang đến một tiêu chuẩn nghiêm ngặt mới cho toán học của ông, mà còn cố gắng làm điều tương tự với phần lớn giải tích toán học". (Pinkus, 2000, p.3)

Theo Jahnke (2016), đến cuối thế kỉ XIX, cùng lúc với xu hướng ngày càng tăng đối với sự nghiêm ngặt trong giải tích và số học hóa toán học, như Klein (Klein, 1895) đã gọi, là tiếp cận số học của Weierstrass đối với lí thuyết hàm giải tích đã trở thành ưu thế và cụm từ "Funktionenlehre" của Đức đã trở thành gần như đồng nghĩa với lí thuyết hàm giải tích theo các nguyên tắc của Weierstrass. (p.255)

2. Nội dung

2.1. Một phân tích tri thức luận về sự hình thành định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm của Weierstrass

Theo Sinkevich (2016), mặc dù kí hiệu ε và δ lần đầu tiên được Cauchy giới thiệu năm 1823, nhưng không có mối quan hệ phụ thuộc nào giữa δ và ε được Cauchy xác định cụ thể. Cho mãi đến năm 1861, phương pháp epsilon-delta mới được trình bày đầy đủ trong định nghĩa giới hạn hàm số của Weierstrass. (p.183)

Tổng quan lịch sử hình thành giới hạn từ thời Cổ đại đến thế kỉ XVII

Trong giai đoạn này, các bài toán về hình học như tính độ dài, tính diện tích, thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong đã được các nhà toán học né tránh các vấn đề vô hạn và sử dụng "phương pháp vét cạn".

Phương pháp vét cạn loại suy tính vô hạn bằng cách nhờ vào một số suy luận kéo theo một số hữu hạn các bước và các thao tác. Để thực hiện được, các nhà toán học phải chọn ra một số thực tùy ý và chỉ ra rằng có thể giải bài toán với số thực này, cuối cùng chỉ ra rằng có thể giải quyết bài toán theo cách tương tự cho mọi số thực bé tùy ý. Phương pháp này chứa đựng ngầm ẩn tư tưởng chuyển qua giới hạn. Xuất phát từ phương pháp vét cạn, việc tính tổng vô hạn của chuỗi được phát triển mạnh vào thế kỉ XVII tạo mầm mống cho sự nảy sinh của khái niệm giới hạn. Nhưng trong giai đoạn này, các nhà toán học quan tâm nhiều đến việc tính tổng của chuỗi hơn là suy nghĩ về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi. Khái niệm giới hạn vẫn là công cụ ngầm ẩn để giải toán, chưa phải là đối tượng nghiên cứu.

Từ sau thế kỉ XVII, Giải tích toán học được phát triển mạnh mẽ thông qua các bài toán tiếp tuyến của các đường cong, và sự phát triển của vô cùng bé, nhưng vẫn không có dấu vết của định nghĩa giới hạn chặt chẽ như ta biết ngày nay. Các nhà toán học đã làm việc dựa trên trực quan mà không tìm kiếm tính chính xác; trong khi đó các kết quả được tính dựa trên các phương pháp chính xác. Các đóng góp của các nhà toán học dưới đây đều đánh dấu sự phát triển của giới hạn.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

Năm 1635, Cavalieri đã công bố công trình nổi tiếng nhất, *Geometria indivisibilis continuorum nova*. Công trình này là sự kết hợp giữa các phương pháp của Archimedes và các thuyết của Kepler về việc tính các diện tích và thể tích. Trong nghiên cứu của mình, Cavalieri đã mô tả "Phương pháp không thể chia tách được", (*Method of Indivisibles*) về cơ bản liên quan đến việc chia các hình hình học thành các phần nhỏ hơn, mặc dù ông không sử dụng các hình tam giác như các nhà toán học trước đó đã làm. (Nevalainen, 2002, p.5)

Cavalieri hình dung mỗi diện tích bao gồm một số không xác định các đường thẳng song song và mỗi thể tích bao gồm một số không xác định các tiết diện phẳng. Ông gọi các đường thẳng và mặt phẳng này là không thể chia tách được. (Nevalainen, 2002, p.6)

Phần lớn các công trình của Cavalieri liên quan đến Hình học giải tích và Giải tích, mà cả hai lĩnh vực đó chưa được phát triển hoàn toàn vào lúc này. Ông không có kiến thức hình thức về giới hạn, mặc dù các phương pháp của ông cho thấy việc hiểu rõ khái niệm này. Khi có thể, Cavalieri đã thực sự tránh những ý tưởng về vô cùng lớn và vô cùng bé, do đó thiếu mất sự nghiêm ngặt trong nghiên cứu của ông. Mặc dù, đã tránh né về sự vô hạn nhưng Cavalieri đã đánh dấu sự phát triển của giới hạn, một chủ đề khá tương đồng với vô hạn. (Nevalainen, 2002, p.7)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat là một nhà toán học người Pháp ở thế kỉ XVII, đã ghi dấu cho sự đóng góp đối với khái niệm của giới hạn, mặc dù lúc bấy giờ giải tích và giới hạn chưa được định nghĩa. Fermat được ghi nhận với nhiều bước tiến trong hình học giải tích. Bằng cách sử dụng hình học giải tích, ông đã tìm ra phương trình các đường cong tương tự và xây dựng nhiều đường cong mới. Khi nghiên cứu các đường cong này, Fermat đã khảo sát điểm cực đại và điểm cực tiểu, từ đó áp dụng cho các tiến trình lân cận. Fermat trở nên tò mò về "bài toán tiếp tuyến". Ông đã nhận ra rằng ông có thể áp dụng kĩ thuật cho việc tìm các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối với việc tìm tiếp tuyến của đường cong. Fermat cũng đã phát triển một quá trình để tìm diện tích miền nằm phía dưới các đường cong. Tuy nhiên, mặc dù ông đã hiểu làm thế nào để phân hoạch một khoảng để tìm diện tích, ông vẫn chưa có sự kết nối giữa điều đó với tiếp tuyến của đường cong, điều này dẫn đến định lí cơ bản của giải tích mà cả Newton và Leibniz đã nhận ra. (Nevalainen, 2002, p.7-8)

Fermat sử dụng một "tiến trình giới hạn" trên cơ sở thông thường. Về sau tiến trình lân cận của ông chứng minh có thể áp dụng được khi xem xét đến một định nghĩa hình thức của giới hạn, nhưng không phải hàng trăm năm. (Nevalainen, 2002, p.10)

Isaac Newton (1642-1727) và Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Newton đã phát triển giải tích của ông dựa trên khái niệm vi phân (fluxion) vào khoảng 1665-1666. Ngay từ đầu, ông khám phá các yếu tố liên quan đến tính nghiêm ngặt. Quan niệm đầu tiên của Newton về giải tích là sử dụng khái niệm "vô cùng bé" (infinitesimal), các giá trị lớn hơn 0 nhưng nhỏ hơn bất kì đại lượng nào, làm cơ sở cho phương pháp xác định tiếp tuyến của ông. Tuy nhiên, việc sử dụng khái niệm này mặc dù tạo ra kết quả nói chung là chính xác, nhưng dẫn đến khó khăn về nghiêm ngặt. Newton tập trung vào cái mà ông gọi là "tỉ lệ trước và tỉ lệ cuối cùng" hay là "tỉ lệ đầu tiên và tỉ lệ sau", đó là tỉ lệ của các vô cùng bé xuất phát từ công thức được sử dụng để tìm độ dốc (hệ số góc) của đường tiếp tuyến. Công thức được sử dụng về cơ bản là giống công thức sử dụng ngày nay. Trong khi cơ sở này cho giải tích nghiêm ngặt hơn các vô cùng bé, Newton đã để lại một sự mơ hồ về những gì ông muốn nói chính xác về các tỉ lệ này. Do quan niệm của Newton về giải tích thiên về mặt hình học nhiều hơn, nên quan điểm của ông về một giới hạn "bị chặn trên với các trực giác hình học khiến ông đưa ra những phát biểu mơ hồ và không chính xác" (Boyer, 1949, p.197). Sự mơ hồ này trong công trình của Newton sẽ dẫn đến nhiều cuộc tranh luận giữa những người kế thừa ông về ý nghĩa thực sự của nó.

Cuối cùng, trong ấn phẩm năm 1704 của mình, chính Newton đã lưu ý rằng "các sai số không được coi thường trong toán học, bất kể là nhỏ như thế nào" (Boyer, 1949, p.201). Do đó, mặc dù sự mơ hồ còn sót lại, Newton đã thực hiện một nỗ lực có ý thức để làm cho nghiên cứu của mình nghiêm ngặt về bản chất.

Mặc dù, Newton và Leibniz thực hiện các nghiên cứu độc lập với nhau nhưng các ý tưởng của họ gần giống nhau. Mỗi xây dựng trong giải tích của họ dựa trên tỉ số và các tích của các vô cùng bé; Newton gọi những đại lượng như vậy là "fluxions" (vi phân), và

Leibniz gọi chúng là "differentials" (phép tính vi phân). Cả hai đều sử dụng lí thuyết về vô cùng bé trong việc phát triển toán giải tích. (Kline, 1972, p.279).

Mặc dù, Leibniz cung cấp nhiều kí hiệu hữu ích và nhiều kết quả mới cho giải tích, nhưng so với Newton thì nghiên cứu của ông thiếu sự nghiêm ngặt. Nghiên cứu của Liebniz dựa trên các đại lượng vô cùng bé, cho rằng thật hữu ích khi xem xét các đại lượng nhỏ vô cùng sao cho khi tỉ số của chúng được tìm kiếm thì nó sẽ không được coi là không. Leibniz đã biến những đại lượng vô cùng bé này thành những khái niệm cơ bản trong các phép tính vi phân của ông. (Adams, 2013, p.47)

Leonhard Euler (1707-1783)

Giải tích của Newton và Leibniz là giải tích biến số chứ không phải hàm số. Một bước đột phá lớn đã được Euler thực hiện vào khoảng giữa thế kỉ XVIII bằng cách biến khái niệm hàm số thành trung tâm mà giải tích xoay quanh (Kleiner, 2001). Không giống như Leibniz đã giải thích thương số *dy/dx* là thương của các vi phân, Euler giải thích nó là thương của các số không 0/0 (Boyer, 1949, p.269). Thương số 0/0 là vô nghĩa trong bối cảnh toán học vì phép chia cho số 0 không được phép. Tuy nhiên, quan niệm này phù hợp với quan điểm của Wallis, John Bernoulli và Fontenelle, những người quan niệm nhỏ vô là nghịch đảo của vô cùng lớn. Do đó, chúng đại diện cho vô cùng bé như $a/\infty = 0$ và vô cùng lớn là $1/0 = \infty$ (Boyer, 1949, p.245). Mặc dù ngày nay, điều này không có ý nghĩa gì, nhưng lúc đó chúng có ý nghĩa tạo mối liên quan giữa các khái niệm "vô cùng bé" và "vô cùng lớn".

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

"D'Alembert đã nhận ra rằng khái niệm giới hạn là rất quan trọng đối với giải tích và đạo hàm cần có sự hiểu biết về khái niệm giới hạn" (Kline, 1972; Hollingdale, 1989). D'Alembert khẳng định rằng giới hạn là thứ không thể vượt quá. Giới hạn cũng không thể đạt được. Bây giờ chúng ta biết rằng giới hạn của các hàm số liên tục có thể đạt được. D'Alembert đã đưa ra một định nghĩa của giới hạn như sau và giới hạn của D'Alembert không phải là hằng số:

> Một đại lượng được cho là giới hạn của một đại lượng khác khi đại lượng thứ hai có thể tiến gần đến đại lượng thứ nhất trong bất kì đại lượng cho trước, tuy nhiên nhỏ, mặc dù đại lượng thứ hai có thể không bao giờ vượt quá đại lượng mà nó tiến gần đến, do đó sự khác biệt của một đại lượng như vậy với giới hạn của nó là không thể gán được... Không chỉ đại lượng có thể không bao giờ vượt quá giới hạn của nó, mà nó còn không thể thực sự đạt được nó. (Hollingdale, 1989, p.305)

Bernard Bolzano (1781-1848)

Không giống như Euler giải thích *dy/dx* là tỉ số của các số 0, Bolzano quan niệm kí hiệu *dy/dx* không được giải thích như một tỉ số hoặc một thương số của các số không mà là kí hiệu cho một hàm duy nhất (Boyer, 1949, p.269). Ông nói thêm rằng nếu một hàm rút gọn thành 0/0, thì nó không có giá trị xác định tại một điểm. Tuy nhiên, nó có thể có giá trị giới hạn vì hàm có thể liên tục tại điểm đó. Giải thích này của Bolzano vẫn còn có giá trị đến ngày nay. Giá trị giới hạn có thể tồn tại ngay cả khi hàm số không được xác định. Nhưng giá trị của hàm số không tồn tại ở điểm đó.

Như vậy, sự nghiêm ngặt hóa giải tích và chương trình số học hóa giải tích là một bước tiến quan trọng, thay đổi các quan niệm của giải tích từ quan niệm hình học sang quan niệm đại số vào thế kỉ XVIII. Đến thế kỉ XIX, quan niệm số học đã đặt nền móng cho các định nghĩa và khái niệm trở nên chặt chẽ.

Augustin – Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy đã chọn một vài khái niệm cơ bản là giới hạn, tính liên tục, sự hội tụ, đạo hàm và xác định rằng khái niệm giới hạn là trung tâm của tất cả khái niệm đó (Kleiner, 2001, p.161). Định nghĩa khái niệm giới hạn của Cauchy như sau:

> Khi các giá trị liên tiếp được gán cho một biến số tiến gần vô hạn đến một giá trị cố định, cuối cùng sẽ khác với giá trị đó nhỏ theo mong muốn, giá trị cố định đó được gọi là giới hạn của tất cả các giá trị khác. (Kleiner, 2001, p.161)

Mặc dù, Cauchy nói về giới hạn của một biến thay vì giới hạn của hàm, tuy nhiên, ông không cam kết nói điều gì xảy ra khi biến đó tiến dần đến giới hạn của nó. Có vẻ ở đây Cauchy muốn nói là nếu một dãy được tạo ra, thì các số hạng của dãy được sinh ra sẽ trở nên càng lúc nhỏ hơn và các giá trị số của chúng sẽ rất gần với 0. Vì mức giảm là không xác định, điều đó có nghĩa là chúng không bao giờ có thể bằng không. Cauchy là người đầu tiên trình bày một phương pháp xử lí cẩn thận có hệ thống các chuỗi hội tụ. Cauchy đưa ra định nghĩa sau: “Một chuỗi hội tụ nếu tăng giá trị của *n*, tổng s_n của *n* số hạng đầu tiên tiến gần đến một giới hạn s, được gọi là tổng của chuỗi.” (Boyer 1968, p.458).

Định nghĩa này vẫn đúng cho các giới hạn của chuỗi hội tụ. Cauchy cũng đã chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một chuỗi vô hạn hội tụ là: “Đối với một giá trị *p* đã cho, độ lớn của hiệu giữa $s_n$và s_{n+p} tiến về phía 0 khi *n* tăng vô hạn.” (Boyer, 1968, p.458). Định nghĩa này tương tự như định nghĩa không hình thức về giới hạn được sử dụng ngày nay.

Như vậy, các nhà toán học đã quen với việc lấy các nền tảng nghiêm ngặt hóa giải tích như một tổng thể hoàn chỉnh. Tuy nhiên, trong tác phẩm của Cauchy, một dấu vết thực sự còn sót lại từ nguồn gốc của nghiêm ngặt hóa giải tích trong các phép tính gần đúng đó là kí hiệu epsilon**.** Cauchy đã không sử dụng ngôn ngữ epsilon – delta trong các chứng minh thậm chí là trong các công trình sau này và kí hiệu delta không phụ thuộc vào kí hiệu epsilon cho đến khi định nghĩa giới hạn được chính xác hóa bởi Weierstrass.

Karl Weierstrass (1815-1897)

Mặc dù, Bolzano là người ủng hộ chính cho sự nghiêm ngặt, nhưng nhà toán học người Đức Weierstrass (1815-1897) là người đầu tiên xây dựng định nghĩa tĩnh của giới hạn được sử dụng ngày nay, giới hạn L của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 bằng cách đưa ra định nghĩa rõ ràng và chính xác như ngày nay. (Boyer, 1949, p.287).

Weierstrass đã mang lại sự chính xác cho giải tích ngày nay. Ông cho rằng để đặt giải tích trên một nền tảng vững chắc, trước tiên hệ thống số thực phải được nghiêm ngặt hóa và sau đó các khái niệm cơ bản của giải tích có thể được rút ra từ hệ thống số này. Do đó, giải tích đã được thiết lập trên nền tảng hệ thống số thực.

Weierstrass trình bày lại định nghĩa ban đầu của Cauchy về giới hạn theo số học nghiêm ngặt, trong đó chỉ sử dụng các giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức, đưa ra định nghĩa theo epsilon – delta đang được sử dụng ngày nay trong môn giải tích. Weierstrass được ghi nhận tạo ra các giới hạn tĩnh và độc lập với thời gian, và đã cung cấp định nghĩa epsilon – delta hình thức: "$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$" (Dunham, 2008, p.130)

Định nghĩa phát biểu rằng một số L gọi là giới hạn của một hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, nếu, cho trước một số epsilon ε nhỏ tùy ý, tìm được số delta δ khác sao cho với mọi giá trị của x sai khác với x_0 nhỏ hơn δ nhưng lớn hơn 0, thì các giá trị của $f(x)$ sai khác với L nhỏ hơn ε.

Định nghĩa giới hạn này, ngày nay được gọi là định nghĩa epsilon – delta của giới hạn hàm số, được xem là công thức giải tích chặt chẽ. Định nghĩa đã loại bỏ các thuật ngữ bé, vô cùng bé, *x* tiến gần và càng gần như mong muốn, và câu hỏi liệu một biến tiến gần đến giới hạn của nó có thể đạt được giới hạn đó hay không. Định nghĩa chính xác của một giới hạn không liên quan đến ý tưởng tiếp cận, mà chỉ là một trạng thái tĩnh. Ngoài ra, Weierstrass cũng cung cấp cho chúng ta kí hiệu $lim_{x\to x_0}$ để thể hiện "giới hạn khi *x* tiến gần x_0", và trong bài báo năm 1841, Weierstrass viết "lim". (Burton, 2007, p.619)

Như vậy, kết quả của phân tích tri thức luận cho thấy lịch sử hình thành định nghĩa được bắt đầu từ sự xuất hiện của các khái niệm vô hạn vào thời Cổ đại (Thế kỉ thứ VI trước Công Nguyên) và kéo dài cho đến những nỗ lực của các nhà toán học thế kỉ XVIII để làm cho giải tích được trở nên nghiêm ngặt và đến thế kỉ XIX, nhà toán học Weierstrass thực hiện "Chương trình số học hóa giải tích", định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ epsilon – delta chính thức được ra đời.

2.2. Các kết luận rút ra từ phân tích lịch sử hình thành của định nghĩa Weierstrass

- *Các quan điểm về sự hình thành định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ* ε -δ

Theo Lê Thái Bảo Thiên Trung (2011, p.63-64), có ba quan điểm về sự hình thành giới hạn như sau:

- Quan điểm "xấp xỉ *x*": Nếu một đại lượng *x* tiến về một giá trị *a* của đại lượng này (theo nghĩa, nó nhận các giá trị ngày càng gần *a*) thì đại lượng y – đại lượng phụ thuộc *x* (một hàm số biến *x*) – tiến về một giá trị *l*. Nghĩa là *x* càng lúc càng gần *a* kéo theo *y* càng lúc càng gần l.

- Quan điểm "xấp xỉ $f(x)$": độ xấp xỉ của $f(x)$ với *l* mà ta mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ của *x* với *a* cần chọn.

- Quan điểm "đại số" : người ta có thể thao tác theo các quy tắc đại số trên các giới hạn mà không đề cập đến nghĩa của khái niệm giới hạn. (Le, 2011)

- *Các quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε-δ*

Từ phân tích tri thức luận ở mục 6.1, chúng tôi xác định được hai quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm theo ngôn ngữ ε-δ như sau:

- Quan niệm *nghiêm ngặt hóa*: quan niệm này manh nha từ thời cổ đại, nhưng mãi đến thế kỉ XIV nó ảnh hưởng lên toàn bộ tư tưởng các nhà toán học với mong muốn củng cố nền tảng toán học.
- Quan niệm *số học hóa*: gắn liền với quan niệm nghiêm ngặt hóa với sự nỗ lực của các nhà toán học trong suốt 50 năm của thế kỉ XIX nhằm tách Giải tích khỏi Hình học.

- *Các đặc trưng tri thức luận*

Từ phân tích quá trình lịch sử hình thành định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε - δ dựa trên các tài liệu tham khảo của Pinkus (2000), Boyer (1969), Nevalainen (2002), Edwards (1979), Sinkevich (2016), Petri và Schappacher (2007), chúng tôi rút ra được hai đặc trưng tri thức luận đáng chú ý sau:

- Đặc trưng *tính nghiêm ngặt*: thể hiện sự chính xác của khái niệm giới hạn hàm số;
- Đặc trưng *kí hiệu hóa bởi epsilon – delta*: mô tả giới hạn hàm số bằng ngôn ngữ ε - δ;
- Đặc trưng *mối quan hệ phụ thuộc*: delta được xác định phụ thuộc theo epsilon.

- *Chướng ngại tri thức luận*

Liên quan đến việc làm rõ các công trình của Cornu (1983), Sierpinska (1987) đề xuất danh sách gồm năm kiểu chướng ngại liên quan đến giới hạn:

- Chướng ngại gắn liền với tính vô cực;
- Chướng ngại gắn liền với hàm số: tính đơn điệu, cận trên nhỏ nhất, cận dưới lớn nhất, dãy giá trị;
- Chướng ngại hình học: trực giác hình học như chướng ngại cho việc xây dựng một định nghĩa chặt chẽ, giới hạn như biên của một tập hợp;
- Chướng ngại logic gắn liền với vấn đề các toán tử;
- Chướng ngại của kí hiệu;
- Chướng ngại gắn liền với tính phụ thuộc của delta theo epsilon: Kết quả thực nghiệm trong mục 1.1. cho thấy có sinh viên gặp một trong ba khó khăn là không ước lượng được δ để khoảng cách từ giá trị hàm số $f(x)$ đến giới hạn L nhỏ hơn ε, với việc xem xét δ độc lập với ε vì không nhận ra mối quan hệ phụ thuộc của δ theo ε. Mặt khác, kết quả phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε - δ được Weierstrass cải thiện từ công trình nghiên cứu của Bolzano, Cauchy, và ông cố gắng tránh trực giác và tránh đề cập đến phát biểu "một biến tiến gần đến một giới hạn" vì nó sẽ gợi ý những ý tưởng về thời gian và chuyển động, và xây dựng định nghĩa trên các khái niệm hình học (Kline, 1972, p.952). Mặc dù, Bolzano và Cauchy đã thực hiện nghiêm ngặt hóa

giải tích, nhưng trong định nghĩa giới hạn hàm số, hai ông chỉ mô tả epsilon và delta một cách ngầm ẩn và không thể hiện được sự phụ thuộc của delta vào epsilon, và đây có thể được xem là một trở ngại trong mong muốn nghiêm ngặt hóa khái niệm giới hạn hàm số. Từ các kết quả phân tích này, cho phép chúng tôi rút ra một chướng ngại tri thức luận của định nghĩa Weierstrass về giới hạn hàm số là *chướng ngại gắn liền với tính phụ thuộc của delta theo epsilon.*

2.3. Giả thuyết nghiên cứu

Từ kết quả phân tích tri thức luận ở các mục 2.1, 2.2, và từ ba khó khăn xác định được trong thực nghiệm khảo sát ban đầu trên SV trong mục 1.1:

- Không nhớ định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε-δ;
- Không hiểu nghĩa của khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm;
- Không ước lượng được δ theo ε để chứng minh giới hạn hàm số.

chúng tôi xây dựng giả thuyết nghiên cứu H về các khó khăn của SV khi lần đầu tiếp cận định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ epsilon-delta như sau:

Tồn tại khó khăn không ước lượng được δ sao cho khoảng cách giữa giá trị hàm số $f(x)$ và giới hạn L trong chứng minh giới hạn của một hàm số ở sinh viên khi lần đầu tiếp cận định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ epsilon-delta có nguồn gốc từ chướng ngại tri thức luận: chướng ngại gắn liền với mối quan hệ phụ thuộc của δ theo ε.

3. Kết luận

Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy quá trình hình thành định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm theo ngôn ngữ epsilon-delta chịu ảnh hưởng mạnh mẽ hai quan niệm lớn: nghiêm ngặt hóa và số học hóa. Định nghĩa của Weierstrass thể hiện tính chặt chẽ và chính xác của giới hạn hàm số tại một điểm. Trong hai thế kỉ trước, định nghĩa epsilon-delta đã dẫn đến những tiến bộ hiệu quả trong giải tích và làm rõ ý nghĩa của một số khái niệm cho các nhà toán học chuyên nghiệp. Ngày nay, nó được dạy trong học phần "Giải tích hàm một biến", nhưng đối với SV mới bắt đầu học giải tích, nó tỏ ra quá phức tạp và khó hiểu. Do đó, một số nhà đào tạo sử dụng một phiên bản trực quan nhấn mạnh trên "tính xấp xỉ" và "tiến gần đến", nhưng luôn chứa đựng các yếu tố phức tạp và mơ hồ (Tall, 1981; Juter, 2005).

Hiểu được tính chặt chẽ và chính xác của định nghĩa của Weierstrass bằng ngôn ngữ epsilon-delta sẽ giúp SV có một cái nhìn về những khó khăn mà họ phải đương đầu khi tiếp cận tri thức này.

Chúng tôi sẽ tiến hành một thực nghiệm để kiểm chứng giả thuyết H trong một nghiên cứu tiếp theo.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Adams, M. S. (2013). *Students' conceptual knowledge of limits in calculus: A two-part constructivist case study*. Dissertation submitted to the faculty of The University of North Carolina at Charlotte.

Boyer, C. B. (1949). *The history of calculus and its conceptual development.* New York: Dover publications

Boyer, C. B. (1968). A history of mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Boyer, C. B. (1969). *The history of the calculus-an overview*. Thirty First Yearbook. Washington D.C. National Council of Teachers of Mathematics.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches in Didactique des Mathematiques, 4(2),* 165-198.

Burton, D. M. (2007). *The History of Mathematics* – An Introduction, 6th Ed., The McGraw Hill Companies, Inc.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et Obstacles*. Doctoral Thesis, Grenoble.

Dunham, W. (2008). *The calculus gallery: Masterpieces from Newton to Lebesque.* New Jersey: Princeton University Press.

Edwards, C. (1979). *The historical development of the calculus.* New York: Springer Verlag.

Gauthier, Y. (2010). *Toward an Arithmetical Logic: The Arithmetical Foudations of Logic*. Birkhäuser.

Jahnke, H. N. (2016). *A history of Analysis*. American Mathematical Society.

Hollingdale, S. (1989). *Makers of mathematics.* London: Penguin Group.

Juter, K. (2005). Students' attitudes to mathematics and performance in limits of functions. *Mathematics Education Research Journal, 17(2),* 92-110.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

Kleiner, I. (2012). *Excursions in the History of Mathematics*. Birkhäuser.

Lakorff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Le, T. B. T. T. (2011). Day va hoc khai niem gioi han ham so o truong pho thong [Teaching and learning concept of limit of function on secondary]. *Journal of Science of Ho Chi Minh City University of Education, 27,* 62-67.

Le, T. B. T. T. (2017). Cac tinh huong tranh luan khoa hoc xoay quanh mot so chuong ngai tri thuc luan cua khai niem gioi han [Situations of scientific controversies revolve around some epistemological obstacles of the concept of limits]. *Actes du sixième colloque international en didactique desmathématiques*. Ho Chi Minh City University of Education.

Le, T. B. T. T., & Pham, H. T. (2017). Day va hoc dinh nghia chinh xac ve gioi han cua ham so thong qua qua trinh mo hinh hoa toan hoc [Teaching and learning exact definition of limit of function through mathematical modelization]. *Journal of Science of Can Tho University, 51*, 1-6.

Nevalainen, L. A. (2002). *LIMIT Highlights from over 2000 years of developments in calculus limits*. Honor Thesis. Bemidji State University.

Petri B., & Schappacher N. (2007). On Arithmetization. In: *Goldstein C., Schappacher N., Schwermer J. (eds) The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin, Heidelberg.

Pinkus, A. (2000). Weierstrass and Approximation Theory. *Journal of Approximation Theory 107,* 1-66

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18(4),* 371-397.

Sinkevich, G. I. (2016). On the history of epsilontics**.** *Antiquitates Mathematicae*, *10*, 183-204.

Stewart, J. (2016). *Calculus*. Eighth Ed., Cengage Learning.

Tall, D. O. (1981). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *For the Learning of Mathematics, 2,* 16-21.

Ueno, Y. (2003). Kronecker's idea of arithmetization of mathematics. *Academic reports*, Fac. Eng. Tokyo Polytech. Univ, *26*(1).

AN EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF THE FORMULATION OF WEIERSTRASS' LIMIT DEFINITION OF A FUNCTION AT A POINT

Nguyen Ai Quoc

Saigon University, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Received: June 04, 2019; Revised: September 04, 2021; Accepted: February 11, 2022

ABSTRACT

This paper presents an epistemological analysis that clarifies the process of forming the Weierstrass' epsilon-delta limit definition of functions. The study analyzes the origin of the concept of limit and the conditions for forming the Weierstrass limit definition of functions over the periods from Antiquity to the end of the 19th century. The research results allow determining two mathematical perspectives that influenced the formulation of Weierstrass' definition, rigorization and arithmetization of analysis; and the epistemological obstacles associated with Weierstrass' definition. The research results contribute to clarifying the epistemological origin of the difficulties and mistakes encountered by preservice students of Mathematics when approaching the Weierstrass' epsilon-delta limit definition of functions.

Keywords: arithmetization; epistemological analysis; epsilon-delta; obstacle; limit of function; rigorization