TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 20, Số 1 (2023): 92-109
Website: https://journal.hcmue.edu.vn
ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 20, No. 1 (2023): 92-109
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.20.1.3418(2023)

**Bài báo nghiên cứu**

# KẾT QUẢ CHÍNH QUY NGHIỆM TRONG KHÔNG GIAN LORENTZ CHO PHƯƠNG TRÌNH DẠNG *p*-LAPLACE CHỨA SỐ HẠNG SCHRÖDINGER VỚI $p \geq n$

***Trần Đại Đình Phong**, Nguyễn Hữu Hải, Trần Phước An***

*Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

**Tác giả liên hệ: Trần Đại Đình Phong – Email: trandaidinhhphong.hcmue@gmail.com*

*Ngày nhận bài: 25-4-2022; ngày nhận bài sửa: 25-5-2022; ngày duyệt đăng: 18-06-2022*

**TÓM TẮT**

*Phương trình p-Laplace chứa số hạng Schrödinger có ứng dụng trong nhiều ngành khoa học. Tính chính quy nghiệm của phương trình này được nghiên cứu gần đây trên các không gian hàm khác nhau. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày các kết quả về tính chính quy nghiệm trong không gian Lorentz cho phương trình p-Laplace chứa số hạng Schrödinger trong trường hợp* $p \geq n$. *Phương pháp của chúng tôi là xây dựng bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức của các đại lượng liên quan đến gradient của nghiệm và hàm dữ liệu, dưới tác động của các toán tử cực đại cấp phân số. Đây là phương pháp được phát triển và sử dụng hiệu quả trong một số bài báo gần đây.*

***Từ khoá:*** tính chính quy nghiệm; toán tử cực đại cấp phân số; Không gian Lorentz; phương trình *p*-Laplace; đánh giá gradient

## 1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày chứng minh đánh giá gradient trong không gian Lorentz cho phương trình elliptic tựa tuyến tính chứa số hạng Schrödinger có dạng như sau

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mathbb{A}(x,\nabla u)) + \mathbb{V}\,|u|^{q-2}\,u &= -\mathrm{div}(\mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)) \quad \text{trong } \Omega, \\ u &= h \quad \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $q > 1$ và $\Omega$ là miền mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với $n \geq 2$. Toán tử $\mathbb{A}: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm Carathédory có giá trị vectơ và khả vi liên tục theo biến $\zeta$, thỏa mãn điều kiện: tồn tại $p > 1$, $\sigma \in [0,1]$ và hằng số $\Lambda > 0$ sao cho

$$|\mathbb{A}(x,\zeta)| \leq \Lambda\left(\sigma^2 + |\zeta|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}, \tag{1.2}$$

$$\left|\partial_\zeta \mathbb{A}(x,\zeta)\right| \leq \Lambda\left(\sigma^2 + |\zeta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}, \tag{1.3}$$

---

***Cite this article as:*** Tran Dai Dinh Phong, Nguyen Huu Hai, & Tran Phuoc An (2023). Regularity results for solutions to *p*-Laplace equations containing Schrödinger terms in Lorentz spaces with *p* ≥n. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *20*(1), 92-109.

$$\left(\mathbb{A}\left(x,\zeta_1\right)-\mathbb{A}\left(x,\zeta_2\right)\right).\left(\zeta_1-\zeta_2\right)\geq \Lambda^{-1}\left(\sigma^2+\left|\zeta_1\right|^2+\left|\zeta_2\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|\zeta_1-\zeta_2\right|^2, \tag{1.4}$$

với mọi $\zeta, \zeta_1, \zeta_2$ trong $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ và $x$ thuộc $\Omega$ hầu khắp nơi. Giả thiết về hàm $\mathbb{B}:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ là hàm Carathédory có giá trị vectơ thỏa mãn điều kiện

$$\left|\mathbb{B}\left(x,\mathbf{f},g\right)\right|\leq c_1\left|\mathbf{f}\right|^{p-1}+c_2\left|g\right| \tag{1.5}$$

với $c_1$, $c_2$ là số thực dương và các hàm dữ liệu $\mathbf{f}\in L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right), g\in L^{p'}\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ với $p'=\dfrac{p}{p-1}$. Liên quan đến điều kiện biên, chúng tôi xét điều kiện Dirichlet $\mathrm{h}\in W^{1,p}\left(\Omega\right)$ với $\Omega$ là miền Reifenberg.

Trong trường hợp đơn giản khi toán tử $\mathbb{V}\equiv 0$, $\mathbb{A}(x,\zeta)=|\zeta|^{p-2}\zeta$ và $\mathbb{B}\left(x,\mathbf{f},g\right)=|\mathbf{f}|^{p-2}\mathbf{f}$, phương trình (1.1) chính là phương trình $p$-Laplace quen thuộc. Khi $\mathbb{V}\neq 0$ và $p=q=2$, kết quả về tính chính quy nghiệm của phương trình (1.1) được Shen trình bày trong bài báo của ông (Shen, 1995) với điều kiện $\mathbb{V}$ thuộc lớp hàm Hölder ngược $\mathbb{RH}^\theta$, trong đó $\theta\geq\dfrac{n}{2}$. Ở đây, $\mathbb{V}\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ được gọi là thỏa mãn bất đẳng thức Hölder ngược với $\theta>1$, kí hiệu $\mathbb{V}\in\mathbb{RH}^\theta$, nếu tồn tại hằng số $C$ sao cho với mọi quả cầu $B\subset\mathbb{R}^n$ ta có

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\mathbb{V}^\theta(z)dz\right)^{\frac{1}{\theta}}\leq C\,\frac{1}{|B|}\int\mathbb{V}(z)dz. \tag{1.6}$$

Khi xét phương trình (1.1) với giả thiết $q=p$ và $\mathbb{V}\in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+\right)\cap\mathbb{RH}^\theta$ với $\theta\in\left[\dfrac{n}{p},n\right)$, trong (Lee & Ok, 2020) các tác giả chứng minh được kết quả chính quy trong không gian Lebesgue dưới dạng

$$\mathbf{f}\in L^t(\Omega)\Rightarrow|\nabla u|+\mathbb{V}^{\frac{1}{p}}|u|\in L^t(\Omega),\quad\forall t\in(p,p\theta).$$

Tiếp tục mở rộng kết quả này khi xét trường hợp $1<p<n$, trong (Tran, Nguyen & Nguyen, 2021) các tác giả đã chứng minh tính chính quy trong không gian Lorentz dưới dạng

$$\mathbf{M}_\alpha\left(|\mathbf{f}|^p+\Psi_\sigma(\mathrm{g})\right)\in L^{t,s}\left(\Omega\right)\Rightarrow\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi_\sigma(u)\right)\in L^{t,s}\left(\Omega\right) \tag{1.7}$$

với mọi $0<t<\dfrac{n\theta}{n-\alpha\theta}$ và $0<s\leq\infty$, trong đó $\alpha\in\left[0,\dfrac{n}{\theta}\right)$ và hàm $\Psi_\sigma:W^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}^+$ được định nghĩa bởi

$$\Psi_\sigma(\omega)=\sigma^p+|\nabla\omega|^p+\mathbb{V}|\omega|^p,\quad\omega\in W^{1,p}(\Omega).$$

Toán tử cực đại $\mathbf{M}_\alpha$ sẽ được định nghĩa ở Định nghĩa 2.2. Bài toán tổng quát (1.1) sau đó tiếp tục được khảo sát trong (Lee & Ok, 2021) và (Nguyen, Tran, Huynh, & Tran, 2020). Trong bài báo hiện tại, chúng tôi hướng đến chứng minh kết quả dạng (1.7) trong trường hợp $p \geq n$. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh rằng

$$\mathbf{M}_\alpha\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^\sigma_{p,q}(\mathrm{h})\right) \in L^{t,s}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right) \in L^{t,s}(\Omega), \tag{1.8}$$

trong đó hàm $\Psi^\sigma_{p,q}$ được định nghĩa bởi

$$\Psi^\sigma_{p,q}(\omega) = \sigma^p + |\nabla\omega|^p + \mathbb{V}|\omega|^q, \quad \omega \in L^q(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega). \tag{1.9}$$

Trong trường hợp này, chúng tôi giả thiết thế vị Schrödinger thỏa mãn điều kiện sau

$$\mathbb{V} \in L^1(\Omega) \cap \mathbb{RH}^\theta, \quad \theta > 1. \tag{1.10}$$

Phương pháp nghiên cứu chúng tôi dùng để chứng minh kết quả chính quy nghiệm trong không gian Lorentz (1.8) là xây dựng bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức ứng với các hàm $\mathbf{M}_\alpha\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^\sigma_{p,q}(\mathrm{h})\right)$ và $\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)$. Phương pháp này được đề xuất trong bài báo (Nguyen & Tran, 2021a), (Tran & Nguyen, 2022a) và có nguồn gốc từ kĩ thuật good-$\lambda$ trong (Nguyen & Tran, 2020a), (Tran & Nguyen, 2019a) và (Tran & Nguyen, 2020). Các phương pháp này đã được áp dụng thành công trong việc khảo sát tính chính quy nghiệm cho nhiều bài toán khác nhau (xem (Nguyen & Tran, 2021b), (Tran & Nguyen, 2022b), (Tran, Nguyen & Huynh, 2021) và (Tran, Nguyen, Pham, & Dang, 2021)). Hàm phân phối sẽ được định nghĩa trong phần tiếp theo của bài báo.

Chúng tôi phát biểu hai kết quả chính của bài báo. Trong hai định lí này, chúng tôi giả sử $u$ là nghiệm yếu của phương trình (1.1) với toán tử $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ thỏa mãn các điều kiện (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) và các hàm dữ liệu

$$\mathbf{f} \in L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right), \quad g \in L^{p'}\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right), \quad \mathrm{h} \in W^{1,p}(\Omega),$$

trong trường hợp $p \geq n$ và thế vị $\mathbb{V}$ thỏa mãn (1.10). Kết quả đầu tiên trong Định lí 1.1 là bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức.

***Định lí 1.1.*** Với mọi $\alpha \in \left[0, \frac{n}{\theta}\right)$ và $a \in \left(\frac{n-\alpha\theta}{n\theta}, \frac{n-\alpha}{n}\right)$, tồn tại hằng số $\delta = \delta\left(\theta, \Lambda, n, p, q\right) > 0, b = b(a, \theta, \alpha, n, p, q) > 0$ và $\varepsilon_0 = \varepsilon_0\left(\alpha, a, \theta, \Lambda, n, p, q, \mathrm{diam}(\Omega)/r_0\right) \in (0,1)$ sao cho nếu $\left(\mathbb{A}, \Omega\right) \in \mathrm{H}_{\delta, r_0}$ với một số $r_0 > 0$ thì bất đẳng thức sau

$$d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \leq C\varepsilon d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}(\Omega, \lambda) + d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)}\left(\Omega, \varepsilon^b\lambda\right) \tag{1.11}$$

đúng với mọi $\lambda > 0$, $C\left(\alpha, a, \theta, \Lambda, n, p, q, \mathrm{diam}(\Omega)/r_0\right) > 0$ và $\varepsilon > 0$.

Giả thiết $(\mathbb{A}, \Omega) \in \mathrm{H}_{\delta, r_0}$ sẽ được định nghĩa trong Định nghĩa 2.8. Định lí tiếp theo là kết quả về đánh giá gradient trong không gian Lorentz. Đánh giá này sẽ suy ra trực tiếp kết quả chính quy nghiệm trong (1.8). Chúng tôi nhấn mạnh rằng kết quả này với giả thiết $p \geq n$ chưa được khảo sát trong các bài báo trước đó (Tran & Nguyen, 2019a) và (Tran, Nguyen, Pham, & Dang, 2021).

***Định lí 1.2.*** Với mọi $\alpha \in \left[0, \frac{n}{\theta}\right)$ khi đó tồn tại $\delta = \delta(\theta, \Lambda, n, p, q) > 0$ sao cho nếu $(\mathbb{A}, \Omega) \in \mathrm{H}_{\delta, r_0}$ với một số $r_0 > 0$ thì bất đẳng thức

$$\left\| \mathbf{M}_\alpha \left( \Psi^\sigma_{p,q}(u) \right) \right\|_{L^{t,s}(\Omega)} \leq C \left\| \mathbf{M}_\alpha \left( |\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^\sigma_{p,q}(\mathrm{h}) \right) \right\|_{L^{t,s}(\Omega)} \tag{1.12}$$

đúng với mọi $t \in \left(0, \frac{n - \alpha\theta}{n\theta}\right)$ và $0 < s \leq \infty$ với $C = C\left(\alpha, \Lambda, \theta, n, p, q, \mathrm{diam}(\Omega)/r_0, t, s\right) > 0.$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi nhắc lại các khái niệm cơ bản liên quan đến nghiệm yếu, không gian Lorentz, hàm phân phối, các toán tử cực đại cấp phân số và tính bị chặn của nó. Trong Mục 3, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức so sánh địa phương giữa nghiệm yếu của bài toán ban đầu với phương trình thuần nhất tương ứng. Mục 4 trình bày quá trình xây dựng bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức, trong đó sử dụng hai kết quả về bất đẳng thức so sánh ở Mục 4 và bất đẳng thức Hölder ngược trong (Lee & Ok, 2021). Các kết quả chính về bất đẳng thức hàm phân phối và đánh giá gradient trong không gian Lorentz được chứng minh ở mục cuối cùng của bài báo.

## 2. Nội dung

### *2.1. Một số kiến thức chuẩn bị*

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng một số kí hiệu sau

- $|A|$ là độ đo Lebesgue của tập $A$ đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$.
- $\frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx$ là tích phân trung bình của hàm $f(x)$ trên tập $E$ đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{diam}(\Omega)$ là đường kính của $\Omega$.
- $B_\rho(x_0)$ là quả cầu mở tâm $x_0$ bán kính $\rho > 0$ và $\Omega_\rho(x_0) = B_\rho(x_0) \cap \Omega$.

Ngoài ra, hằng số $C$ trong bài báo này có thể thay đổi qua các bước đánh giá nhưng luôn phụ thuộc vào dữ liệu của bài toán. Dữ liệu của bài toán chúng tôi gồm có

$$data \equiv \left(\Lambda, \sigma, \alpha, \varepsilon_0, n, p, q, \mathrm{diam}(\Omega)\right).$$

***Định nghĩa 2.1.*** *(Không gian Lorentz)* Cho $\Omega$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và hai tham số $0 < t < \infty$ và $0 < s \le \infty$. Không gian Lorentz $L^{t,s}(\Omega)$ là không gian các hàm $f$ đo được Lebesgue trên $\Omega$ sao cho $\| f \|_{L^{t,s}(\Omega)} < \infty$ trong đó

$$\| f \|_{L^{t,s}(\Omega)} = \left( t\int_0^\infty \lambda^s \,|\{x\in\Omega : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{s}{t}} \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{s}}$$

*nếu* $0 < s < \infty$ *và*

$$\| f \|_{L^{t,\infty}(\Omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \,|\{x\in\Omega : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{t}},$$

*nếu* $s = \infty$.

***Định nghĩa 2.2.*** *(Toán tử cực đại cấp phân số)* Với mỗi số thực $\alpha \in [0, n]$, ta định nghĩa toán tử cực đại cấp phân số $\mathbf{M}_\alpha$ là toán tử được xác định bởi

$$\mathbf{M}_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^\alpha \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

với hàm $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Trong trường hợp $\alpha = 0$ thì $\mathbf{M}_0$ là hàm cực đại Hardy-Littlewood $\mathbf{M}$, được định nghĩa như sau

$$\mathbf{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

***Mệnh đề 2.3.*** *(Tính bị chặn của toán tử cực đại)* Giả sử $s \ge 1$ và $\alpha \in \left[0, \frac{n}{s}\right)$. Khi đó tồn tại hằng số $C = C(n,\alpha)$ sao cho với mọi $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\left|\{\mathbf{M}_\alpha f(x) > \lambda\}\right| \le C \left( \frac{1}{\lambda^s} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^s \, dy \right)^{\frac{n}{n-\alpha s}}$$

với mọi $\lambda > 0$.

***Định nghĩa 2.4.*** *(Nghiệm yếu)* Hàm số $u \in W^{1,p}(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của (1.1) nếu thỏa mãn công thức biến phân

$$\int_\Omega \mathbb{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \mathbb{V} |u|^{q-2} u \varphi dx = \int_\Omega \mathbb{B}(x, \mathbf{f}, g) \cdot \nabla \varphi dx,$$

với mọi $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

***Định nghĩa 2.5.*** *(Hàm phân phối)* Cho hàm $f$ đo được trên $\Omega$ và $K \subset \mathbb{R}^n$, hàm phân phối $d_f(K, .)$ của $f$ được định nghĩa bởi

$$d_f(K, \lambda) = |\{x \in K \cap \Omega : |f(x)| > \lambda\}| \quad \lambda \ge 0.$$

Trong trường hợp $\Omega \subset K$ , để đơn giản ta viết tắt thành $d_f(\lambda)$.

Tiếp theo dựa trên bài báo (Lee & Ok, 2021) chúng ta có bất đẳng thức Reverse Hölder như sau.

***Bổ đề 2.6.*** Lấy $x_0 \in \overline{\Omega}$ và $\rho \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right]$. Giả sử $u$ là nghiệm yếu của phương trình (1.1)và $v$ là nghiệm yếu của phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A}(x, \nabla v) + \mathbb{V} |v|^{q-2} v = 0 & \text{trong } \Omega_{2\rho}(x_0), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad v = u - h & \text{trên } \partial\Omega_{2\rho}(x_0). \end{cases}$$

Khi đó với $\theta \in (1, +\infty)$ và $\gamma \in (1, \theta)$ ta có bất đẳng thức sau đúng

$$\left( \frac{1}{|\Omega_\rho(x_0)|} \int_{\Omega_\rho(x_0)} \left(\Psi^\sigma_{p,q}(v)\right)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le C \frac{1}{|\Omega_{2\rho}(x_0)|} \int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \Psi^\sigma_{p,q}(v) dx. \tag{2.2}$$

***Định nghĩa 2.7.*** *(Giả thiết $(\delta, r_0)$)* Với $\delta \in (0,1)$và $r_0 > 0$ ta nói $(\mathbb{A}, \Omega)$ thỏa mãn giả thiết $(\delta, r_0)$ được kí hiệu là $(\mathbb{A}, \Omega) \in \mathrm{H}_{\delta, r_0}$. nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

i. Toán tử $\mathbb{A}$ thỏa mãn điều kiện nửa chuẩn BMO nhỏ nghĩa là

$$[\mathbb{A}]^r = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, 0 < \varrho \le r_0} \frac{1}{|B_\varrho(y)|} \int_{B_\varrho(y)} \left( \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\left|\mathbb{A}(x, \zeta) - \overline{\mathbb{A}}_{B_\varrho(y)}(\zeta)\right|}{|\zeta|^{p-1}} \right) dx \le \delta$$

trong đó $\overline{\mathbb{A}}_{B_\varrho(y)}(\zeta)$ kí hiệu trung bình tích phân của $\mathbb{A}(\cdot, \zeta)$ trên quả cầu $B_\varrho(y)$.

ii. $\Omega$ là miền $(\delta, r_0)$ - Reifenberg có nghĩa là với mọi $x \in \partial\Omega$ và $0 < \rho < (1-\delta) r_0$ thì tồn tại hệ trục tọa độ mới $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ sao cho trong hệ này này thì $x = -\rho\delta' \xi_n$ và

$$B_\rho(O) \cap \{\xi_n > 0\} \subset \Omega_{B_\rho(O)} \subset B_\rho(O) \cap \{\xi_n > -2\rho\delta'\},$$

với $\delta' = \delta / (1-\delta)$ và tập $\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \xi_n > \lambda\}$ được viết tắt thành $\{\xi_n > \lambda\}$.

### 2.2. *Bất đẳng thức so sánh với nghiệm của phương trình thuần nhất*

Phần này chúng tôi trình bày về các đánh giá so sánh cho phương trình thuần nhất.

***Bổ đề 3.1.*** Giả sử $(\mathbb{A}, \Omega) \in \mathrm{H}_{\delta, r_0}$ với một số $r_0 > 0$. Lấy $x_0 \in \bar{\Omega}, \rho \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right]$ và $\Omega_{2\rho} = B_{2\rho} \cap \Omega$. Giả sử $u$ là nghiệm yếu của phương trình (1.1) và $v$ là nghiệm yếu của phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A}(x, \nabla v) + \mathbb{V} |v|^{q-2} v = 0 & \text{trong } \Omega_{2\rho}, \\ \qquad v = u - h & \text{trên } \partial\Omega_{2\rho}. \end{cases} \tag{2.3}$$

*Khi đó với mọi* $\varepsilon \in (0,1)$ *tồn tại hằng số* $k = k(p,q) > 0$ *và* $C(\Lambda,\sigma,n,p,q) > 0$ *sao cho*

$$\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}} \Psi_{p,q}(u-v)dx \le \varepsilon \frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx + C\varepsilon^{-k} \frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}} \left(|\mathbf{f}|^{q} + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h})\right)dx. \tag{2.4}$$

*Chứng minh Bổ đề 3.1.* Do $u$ và $v$ lần lượt là nghiệm yếu của phương trình (1.1) và (3.1) nên thỏa mãn các công thức biến phân

$$\int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi dx + \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{V}|u|^{q-2}u.\varphi dx = \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)\cdot\nabla\varphi dx, \tag{2.5}$$

và

$$\int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{A}(x,\nabla v)\cdot\nabla\varphi dx + \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{V}|v|^{q-2}v.\varphi dx = 0, \tag{2.6}$$

với $\varphi \in W^{1,p}(\Omega_{2\rho})$. Chọn hàm thử $\varphi = u - v - h \in W^{1,p}_0(\Omega_{2\rho})$ và thay vào (3.3) và (3.4) sau đó trừ vế theo vế và rút gọn ta thu được

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{2\rho}} \left(\mathbb{A}(x,\nabla u) - \mathbb{A}(x,\nabla v)\right)\cdot\nabla(u-v)dx + \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{V}\left(|u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v\right)(u-v)dx \\
&= \int_{\Omega_{2\rho}} \left(\mathbb{A}(x,\nabla u) - \mathbb{A}(x,\nabla v)\right)\cdot\nabla h dx + \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{V}\left(|u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v\right)h dx \\
&+ \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)\cdot\nabla(u-v)dx - \int_{\Omega_{2\rho}} \mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)\cdot\nabla h dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Để thuận tiện trong việc chứng minh ta định nghĩa hàm $\Phi_\sigma : \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^2 \to \mathbb{R}^+$ như sau

$$\Phi_\sigma(\varphi,\psi) := \left(\sigma^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla(\varphi-\psi)|^2 + \mathbb{V}\left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right)^{\frac{q-2}{2}} |\varphi-\psi|^2$$

với mọi $\varphi$ và $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. Theo (Hamburger, 1992) ta có kết quả

$$\left||\varphi|^{q-2}\varphi - |\psi|^{q-2}\psi\right| \sim \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right)^{\frac{q-2}{2}} |\varphi-\psi|.$$

Lúc này áp dụng giả thiết (1.4) ta có số hạng ở vế trái (3.5) ta được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{A}(x,\nabla u) - \mathbb{A}(x,\nabla v))\cdot(\nabla u - \nabla v) + \mathbb{V}\left(|u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v\right)(u-v) \\
&\ge C(\Lambda)\left(\sigma^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u - \nabla v|^2 + C\mathbb{V}\left(|u|^2 + |v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}} |u-v|^2 \\
&\ge C(\Lambda)\left[\left(\sigma^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u - \nabla v|^2 + \mathbb{V}\left(|u|^2 + |v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}} |u-v|^2\right] \\
&\ge C(\Lambda)\Phi_\sigma(u,v).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Tiếp theo, áp dụng giả thiết (1.2) ta có đánh giá cho các số hạng ở vế phải (3.5) như sau. Đầu tiên

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{A}(x,\nabla u)-\mathbb{A}(x,\nabla v))\cdot\nabla h &\leq |\mathbb{A}(x,\nabla u)-\mathbb{A}(x,\nabla v)||\nabla h| \\
&\leq (|\mathbb{A}(x,\nabla u)|+|\mathbb{A}(x,\nabla v)|)|\nabla h| \qquad (2.9)\\
&\leq \Lambda\left[\left(\sigma^2+|\nabla u|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}+\left(\sigma^2+|\nabla v|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]|\nabla h|.
\end{aligned}
$$

Do $q>2$ nên ta có

$$\mathbb{V}\left(|u|^{q-2}u-|v|^{q-2}v\right)h\leq C(q)\mathbb{V}\left(|u|^2+|v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}}|u-v||h|. \qquad (2.10)$$

Cuối cùng, áp dụng giả thiết (1.5) với $C=\max\{c_1,c_2\}$ ta có

$$\mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)\cdot\nabla(u-v)-\mathbb{B}(x,\mathbf{f},g)\cdot\nabla h\leq C\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla u-\nabla v|+C\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla h|. \qquad (2.11)$$

Từ (3.6), (3.7), (3.8) và (3.9) và thay vào (3.5) ta được

$$
\begin{aligned}
C(\Lambda)\int_{\Omega_{2\rho}}\Phi_\sigma(u,v)dx &\leq \frac{C}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\left[\left(\sigma^2+|\nabla u|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}+\left(\sigma^2+|\nabla v|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]|\nabla h|dx \\
&+\frac{C}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}\left(|u|^2+|v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}}|u-v||h|dx \qquad (2.12)\\
&+\frac{C}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla u-\nabla v|dx+C\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla h|dx.
\end{aligned}
$$

Bây giờ, ta sẽ đánh giá phần tử chứa số hạng Schrödinger trong vế phải của (3.10) .Do $q>2$
, ta có bất đẳng thức sau

$$\left(|u|^2+|v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}}\leq C(q)\left(|u-v|^{q-2}+|u|^{q-2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}\left(|u|^2+|v|^2\right)^{\frac{q-2}{2}}|u-v||h|dx\leq\frac{C(q)}{|\Omega_{2\rho}|}\left(\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u-v|^{q-1}|h|dx+\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u|^{q-2}|u-v||h|dx\right). \qquad (2.13)$$

Tiếp theo ta có đánh giá sau

$$\left(\sigma^2+|\varphi_2|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\leq C(p)\left(\sigma^{p-1}+|\varphi_1|^{p-1}+|\varphi_1-\varphi_2|^{p-1}\right),$$

khi đó suy ra

$$(\sigma^2+|\nabla u|^2)^{\frac{p-1}{2}}+(\sigma^2+|\nabla v|^2)^{\frac{p-1}{2}}\leq C(p)(\sigma^{p-1}+|\nabla u-\nabla v|^{p-1}+|\nabla u|^{p-1}).$$

Bây giờ với $a,b$ và $c$ là ba số thực. Giả sử $p$ là số thực lớn hơn 2. Khi đó với mọi $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ ta có

$$|a|^{p-2}|b||c|\leq\varepsilon_1|a|^p+\varepsilon_2|b|^p+\varepsilon_1^{2-p}\varepsilon_2^{-1}|c|^p. \qquad (2.14)$$

Áp dụng đánh giá trên ta đánh giá lần lượt cho các số hạng ở vế phải (3.10) ta sẽ thu được

$$\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u|^{q-2}|u-v\|h|\,dx \le \frac{\varepsilon_1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u|^q\,dx + \frac{\varepsilon_2}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u-v|^q\,dx + \frac{\varepsilon_1^{2-q}\varepsilon_2^{-1}}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|h|^q\,dx, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u|^{q-1}|h|\,dx \le \frac{\varepsilon_2}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|u-v|^q\,dx + \frac{\varepsilon_2^{1-q}}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\mathbb{V}|h|^q\,dx, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla u-\nabla v|dx+\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^{p-1}+|g|\right)|\nabla h|dx &\le \varepsilon_2\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u-\nabla v|^p+\int_{\Omega_{2\rho}}\varepsilon_2^{1-p}|\nabla h|^p\,dx\\ &+\varepsilon_2^{\frac{1}{1-p}}\int_{\Omega_{2\rho}}(|f|^p+|g|^{p'})dx.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Kết hợp (3.11), (3.13), (3.14), (3.15) ta thu được kết quả

$$\begin{aligned}\frac{C(\Lambda)}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Phi_\sigma(u,v)dx \le C\Bigg[&\frac{\varepsilon_1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi^\sigma_{p,q}(u)dx+\frac{\varepsilon_2}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi_{p,q}(u-v)dx\\ &+\left(\frac{\varepsilon_2^{\frac{1}{1-p}}+\varepsilon_1^{1-p}+\varepsilon_2^{1-p}+\varepsilon_2^{1-q}+\varepsilon_1^{2-q}\varepsilon_2^{-1}}{|\Omega_{2\rho}|}\right)\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}+\Psi_{p,q}(h)\right)dx\Bigg],\end{aligned} \quad (2.18)$$

với mọi $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in(0,1)$.

Với $p,q>2$ áp dụng định nghĩa $\Psi^\sigma_{p,q}$ và $\Phi_\sigma$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(u,v) &\ge C(q)\left[\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)^{p-2}.|\nabla u-\nabla v|^2+\mathbb{V}\left(|u|+|v|\right)^{q-2}.|u-v|^2\right]\\ &\ge C(p,q)\left(|\nabla u-\nabla v|^p+\mathbb{V}|u-v|^q\right)\\ &= C(p,q)\Psi_{p,q}(u-v).\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi_{p,q}(u-v)\le\frac{C}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Phi_\sigma(u,v). \quad (2.19)$$

Kết hợp (3.16) và (3.17) ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi_{p,q}(u-v)dx \le &\frac{C\varepsilon_1}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi^\sigma_{p,q}(u)dx+\frac{C\varepsilon_2}{|\Omega_{2\rho}|}\int_{\Omega_{2\rho}}\Psi_{p,q}(u-v)dx\\ &+C\left(\frac{\varepsilon_2^{\frac{1}{1-p}}+\varepsilon_1^{1-p}+\varepsilon_2^{1-p}+\varepsilon_2^{1-q}+\varepsilon_1^{2-q}\varepsilon_2^{-1}}{|\Omega_{2\rho}|}\right)\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}+\Psi_{p,q}(h)\right)dx.\end{aligned} \quad (2.20)$$

Cuối cùng với $\varepsilon\in(0,1)$, ta có thể chọn $\varepsilon_1$ và $\varepsilon_2$ sao cho

$$C\varepsilon_1\le\frac{\varepsilon}{2},\quad C\varepsilon_2\le\frac{1}{2C}$$

dẫn đến $k$ được định nghĩa bởi

$$k=\max\{0,p-1,q-2\}.$$

### *2.3. Bất đẳng thức hàm phân phối*

***Bổ đề 4.1.*** Cho $\rho > 0$, $0 \le \alpha < n$ và $a > 0$. Ta có thể tìm được các hằng số $b = b(\alpha, a, n) > 0$ và $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, a, b, n, \mathrm{diam}(\Omega)/\rho) > 0$ sao cho nếu tồn tại $z_1 \in \Omega$ thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)(z_1) \le \varepsilon^b \lambda,$$

với $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \lambda > 0$ thì ta có bất đẳng thức sau đúng

$$d_{\mathrm{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \le \varepsilon \mathcal{L}^n(B_\rho(O)). \tag{3.1}$$

$$d_{\mathrm{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \le \varepsilon \mathcal{L}^n(B_\rho(O)).$$

*Chứng minh.* Áp dụng Mệnh đề 2.3 với $s = 1$, ta có:

$$\left|\{x \in \Omega : \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\}\right| \le C\left(\frac{1}{\varepsilon^{-a}\lambda}\int_\Omega \Psi^\sigma_{p,q} dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}},$$

khi đó theo đánh giá so sánh ở (3.1), ta được

$$\left|\{x \in \Omega : \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\}\right| \le C\left(\frac{1}{\varepsilon^{-a}\lambda}\int_\Omega (\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}) dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Định nghĩa $D$ là đường kính của $\Omega$, nghĩa là $D = \sup\limits_{x,y \in \Omega} d(x, y)$. Dễ dàng thấy $\Omega \subset B_D(z_1)$, điều đó dẫn đến

$$\begin{aligned}
\left|\{x \in \Omega : \left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\}\right| &\le C\left(\frac{1}{\varepsilon^{-a}\lambda}\int_{B_D(z_1)} (\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}) dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \\
&\le C\left(\frac{D^{n-\alpha}}{\varepsilon^{-a}\lambda}\varepsilon^b \lambda\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \\
&= C\left(\varepsilon^{a+b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} D^n \\
&= C\left(\frac{D}{\rho}\right)^n \varepsilon^{\frac{(a+b)n}{n-\alpha}} \left|B_\rho(0)\right|.
\end{aligned}$$

Từ đó chọn $b$ sao cho $\dfrac{(a+b)n}{n-\alpha} > 1$ và để (4.1) đúng với mọi $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_0\right)$ ta cần chọn $\varepsilon_0$ sao cho $C\left(\dfrac{D}{\rho}\right)^n \varepsilon_0^{\frac{(a+b)n}{n-\alpha}} < \varepsilon_0$. Vậy ta thu được điều phải chứng minh. □

***Bổ đề 4.2.*** Cho $\alpha \in [0, n)$ và $z_2 \in \Omega_\rho(\zeta)$ thỏa mãn $\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q})(z_2) \le \lambda$ với $\lambda > 0$. Khi đó với mọi $a > 0$ bất đẳng thức sau

$$d_{\mathrm{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho(\zeta), \varepsilon^{-a}\lambda\right) \le d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(\zeta)}\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho(\zeta), \varepsilon^{-a}\lambda\right), \tag{3.2}$$

đúng với mọi $0 < \varepsilon \leq 3^{-\frac{n+1}{a}}$.

*Chứng minh.* Lấy $x \in B_\rho(\zeta)$, khi đó

$$\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x) \leq \max\{\mathbf{U}_{\alpha,\rho}(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x); \mathbf{T}_{\alpha,\rho}(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x)\},$$

với

$$\mathbf{U}_{\alpha,\rho}(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x) = \sup_{0<\rho'<\rho} (\rho')^\alpha \frac{1}{\left|B_{\rho'(x)}\right|} \int_{B_{\rho'}(x)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx,$$

và

$$\mathbf{T}_{\alpha,\rho}(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x) = \sup_{\rho'\geq\rho} (\rho')^\alpha \frac{1}{\left|B_\rho(x)\right|} \int_{B_\rho(x)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx.$$

Chú ý rằng

$$\max\left\{\mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x); \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x)\right\} > \varepsilon^{-a}\lambda$$

nếu và chỉ nếu

$$\mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda \text{ hoặc } \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(\eta) > \varepsilon^{-a}\lambda.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| \\
&\leq \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \max\left\{\mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x); \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x)\right\} > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\} \cup \left\{\eta \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| \\
&\leq \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| + \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{a}\lambda\right\}\right|.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Do $x \in B_\rho(\zeta)$ nên với mọi $0 < \rho' < \rho$, ta có $|x - \zeta| < \rho$. Xét $z \in B_{\rho'}(x)$, khi đó

$$|z - \zeta| = |z - x + x - \zeta| < |z - x| + |x - \zeta| < \rho' + \rho < 2\rho.$$

Suy ra $B_{\rho'}(x) \subset B_\rho(\zeta)$, như vậy ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) &= \sup_{0<\rho'<\rho} \left(\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{\rho'}(x)\right|} \int_{B_{\rho'}(x)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&= \sup_{0<\rho'<\rho} \left(\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{\rho'}(x)\right|} \int_{B_{\rho'}(x)} \chi_{B_{2\rho}(\zeta)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&\leq \mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(\zeta)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x),
\end{aligned}$$

kéo theo

$$\left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{U}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(\zeta)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right|. \tag{3.4}$$

Do $z_2, x \in B_\rho(\zeta)$ nên với mọi $\rho' \geq \rho$, ta suy ra $|z_2 - \zeta| < \rho$ và $|x - \zeta| < \rho$. Với $z \in B_{\rho'(x)}$, ta có

$$|z - z_2| = |z - x + x - \zeta + \zeta - z_2| < |z - x| + |x - \zeta| + |\zeta - z_2| < 3r.$$

Điều này dẫn đến $B_{\rho'}(x) \subset B_{3\rho'}(z_2)$, như vậy ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) &= \sup_{\rho' \geq \rho}\left(\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{\rho'}(z_2)\right|}\int_{B_{\rho'}(z_2)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&\leq \sup_{\rho' \geq \rho}\left(\rho'\right)^\alpha \frac{\left|B_{3\rho'}(z_2)\right|}{\left|B_{\rho'}(z_2)\right|}\int_{B_{3\rho'}(z_2)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&= 3^n \sup_{\rho' \geq \rho}\left(\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{3\rho'}(z_2)\right|}\int_{B_{3\rho'}(z_2)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&= 3^{n-\alpha} \sup_{3\rho' \geq 3\rho}\left(3\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{3\rho'}(z_2)\right|}\int_{B_{3\rho'}(z_2)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&\leq 3^{n-\alpha} \sup_{\rho' > 0}\left(3\rho'\right)^\alpha \frac{1}{\left|B_{3\rho'}(z_2)\right|}\int_{B_{3\rho'}(z_2)} \Psi^\sigma_{p,q}(u)dx \\
&= 3^n \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(z_2) \\
&\leq 3^n \lambda.
\end{aligned}$$

Khi đó, với mọi $\varepsilon^{-a} \leq 3^{-\frac{n+1}{a}}$

$$\left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{T}_{\alpha,\rho}\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| = 0. \tag{3.5}$$

Kết hợp (4.3), (4.4) và (4.5) ta suy ra

$$\left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in \Omega_\rho(\zeta) : \mathbf{M}_\alpha(\chi_{B_{2\rho}(\zeta)}\Psi^\sigma_{p,q}(u))(x) > \varepsilon^{-a}\lambda\right\}\right|.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

***Bổ đề 4.3.*** Với mọi $\alpha \in \left[0, \frac{n}{\theta}\right)$ và $a \in \left(\frac{n - \alpha\theta}{n\theta}, \frac{n-\alpha}{n}\right)$. Khi đó tồn tại hằng số $b = b\left(\alpha, p, q, a, \alpha, p'\right) > 0$ và $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, \theta, a, b, n, p, q) > 0$ sao cho nếu có $x_1, x_2 \in B_\rho(x_0)$ thỏa mãn

$$\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x_1) \leq \lambda \text{ và } \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)(x_2) \leq \varepsilon^b\lambda. \tag{3.6}$$

thì bất đẳng thức

$$d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \leq \varepsilon\left|B_\rho(x_0)\right|. \tag{3.7}$$

đúng với mọi $\lambda > 0$ và $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

*Chứng minh.* Để chứng minh bất đẳng thức (4.7) ta cần kiểm tra hai trường hợp là $x_0 \in \Omega$ tức là $B_{4\rho}(x_0) \subset \Omega$ và $B_{4\rho}(x_0) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$.

**Trường hợp 1.** $B_{4\rho}(x_0) \subset \Omega$ ta xét phương trình thuần nhất sau

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A}(x, \nabla v) + \mathbb{V} \, |v|^{q-2} \, v = 0 & \text{trong } \partial B_{4\rho}(x_0), \\ v = u - h & \text{trên } \partial B_{4\rho}(x_0). \end{cases}$$

Bây giờ áp dụng Bổ đề 3.1 với $\varepsilon_1 \in (0,1)$ và hằng số $k = k(p, q, p')$ ta có đánh giá

$$\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u-v)dx \le \frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \left( \varepsilon_1 \int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx + C\varepsilon_1^{-k} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \left( |\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h}) \right) dx \right). \tag{3.8}$$

Bây giờ ta đặt

$$\begin{aligned} L := d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)\right)} \left( \Omega_\rho(x_0), \varepsilon^{-a}\lambda \right) &\le C d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u-v)\right)} \left( \Omega_\rho(x_0), c_p^{-1}\varepsilon^{-a}\lambda \right) \\ &\quad + C d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\right)\left(\Psi^{\sigma}_{p,q}(v)\right)} \left( \Omega_\rho(x_0), c_p^{-1}\varepsilon^{-a}\lambda \right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Từ giả thiết $a \in \left( \frac{n - \alpha\theta}{n\theta}, \frac{n-\alpha}{n} \right)$ ta suy ra $1 < \frac{n}{an+\alpha} < \theta$. Khi đó tồn tại hằng số $\gamma > 1$ sao cho

$$\frac{n}{an+\alpha} < \gamma < \theta.$$

Áp dụng **Bổ đề 2.3** ta đánh giá cho (4.9) ta thu được

$$L \le C \left( \frac{1}{\varepsilon^{-a}\lambda} \int_{B_{2\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u-v)dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} + C \left( \frac{1}{\left(\varepsilon^{-a}\lambda\right)^{\gamma}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} \left( \Psi^{\sigma}_{p,q}(v) \right)^{\gamma} dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha\gamma}}.$$

Ta chuyển quả cầu $2\rho$ thành quả cầu $4\rho$ ta thu được đánh giá

$$L \le C \left( \frac{(4\rho)^n}{\varepsilon^{-a}\lambda \left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u-v)dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} + C \left( \frac{(2\rho)^n}{\left(\varepsilon^{-a}\lambda\right)^{\gamma} \left|B_{2\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{2\rho}(x_0)} \left( \Psi^{\sigma}_{p,q}(v) \right)^{\gamma} dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha\gamma}}. \tag{3.10}$$

Tiếp theo ta áp dụng **Bổ đề 2.6** để đánh giá (4.9) và (4.10) như sau

$$\begin{aligned} L \le C \left( \frac{(4\rho)^n}{\varepsilon^{-a}\lambda} \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} &\left( \frac{\varepsilon_1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx + \frac{C\varepsilon_1^{-k}}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \left( |\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h}) \right) dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \\ &+ C \left( \frac{(2\rho)^{\frac{n}{\gamma}}}{\varepsilon^{-a}\lambda \left|B_{4\rho}(x_0)\right|} \int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(v)dx \right)^{\frac{n\gamma}{n-\alpha\gamma}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ta sẽ chứng minh $B_{4\rho}(x_0) \subset B_{5\rho}(x_1) \cap B_{5\rho}(x_2)$. Thật vậy, lấy $y \in B_{4\rho}(x_0)$ ta có $d(y,x_0) \le 4\rho$. Mặt khác $x_1, x_2 \in B_\rho(x_0)$ do đó $d(x_1,x_0), d(x_2,x_0) \le \rho$. Dẫn đến $d(y,x_1), d(y,x_2) \le 5\rho$. Do đó $y \in B_{5\rho}(x_1) \cap B_{5\rho}(x_2)$. Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx &\le \frac{C}{\left|B_{5\rho}(x_1)\right|}\int_{B_{5\rho}(x_1)} \Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx \\ &\le C(5\rho)^{-\alpha}\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^{\sigma}_{p,q}(u)\right)(x_1) \le C\rho^{-\alpha}\lambda,\end{aligned} \tag{3.12}$$

và

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h})\right)dx &\le C\,\frac{1}{\left|B_{5\rho}(x_2)\right|}\int_{B_{5\rho}(x_2)}\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h})\right)dx \\ &\le C(5\rho)^{-\alpha}\mathbf{M}_\alpha\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h})\right)(x_2) \\ &\le C\rho^{-\alpha}\varepsilon^b\lambda.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức tam giác và (4.8) với $\varepsilon_1 \in (0,1)$ ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\Psi^{\sigma}_{p,q}(v)dx &\le C\left(\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx + \frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\Psi^{\sigma}_{p,q}(u-v)dx\right) \\ &\le C\left(\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\Psi^{\sigma}_{p,q}(u)dx + \varepsilon_1^{-k}\,\frac{1}{\left|B_{4\rho}(x_0)\right|}\int_{B_{4\rho}(x_0)}\left(|\mathbf{f}|^q + |g|^{p'} + \Psi^{\sigma}_{p,q}(\mathrm{h})\right)dx\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Kết hợp (4.12), (4.13) và (4.14) thay vào (4.11) ta có

$$L \le C\left(\frac{(4\rho)^n}{\varepsilon^{-a}\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\left(\varepsilon_1\rho^{-\alpha}\lambda + \varepsilon_1^{-k}\rho^{-\alpha}\varepsilon^b\lambda\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} + C\left(\frac{(2\rho)^{\frac{n}{\gamma}}}{\varepsilon^{-a}\lambda}\left(\rho^{-\alpha}\lambda + \varepsilon_1^{-k}\rho^{-\alpha}\varepsilon^b\lambda\right)\right)^{\frac{n\gamma}{n-\alpha\gamma}}$$

Thực hiện rút gọn ta có

$$L \le C\left[\varepsilon^{\frac{an}{n-\alpha}}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-k}\varepsilon^b\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} + \varepsilon^{\frac{an\gamma}{n-\alpha\gamma}}\left(1 + \varepsilon_1^{-k}\varepsilon^b\right)^{\frac{n\gamma}{n-\alpha\gamma}}\right]\rho^n. \tag{3.15}$$

Trong (4.15) chọn $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{-k}\varepsilon^b$ và $b > \max\left\{0, \left(1 - a - \frac{\alpha}{n}\right)(k+1)\right\}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Trường hợp 2.** $B_{4R}(x_0) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Lấy $z_b \in \partial\Omega$ sao cho $\left|z_b - x_0\right| = d(x_0, \partial\Omega) \le 4R$. Ta xét phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\mathbb{A}(x,\nabla v') + \mathbb{V}\,|v'|^{q-2}\,v = 0 & \text{trong } \partial B_{24\rho}(z_b), \\ \qquad v' = u - h & \text{trên } \partial B_{24\rho}(z_b). \end{cases}$$

Từ đó ta chứng minh tương tự trường hợp 1. Vậy cả hai trường hợp ta đều có

$$d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \le \varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_\rho\left(x_0\right)\right).$$

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

### *2.4. Kết quả chính quy nghiệm trong không gian Lorentz*

Trước hết ta phát biểu bổ đề phủ của Vitali như sau

***Bổ đề 5.1.*** Cho $\Omega$ là miền thỏa điều kiện $(\delta, r_0)$ - Reifenberg với hằng số $r_0, \delta > 0$. Xét hai tập con đo được $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \Omega$. Giả sử $0 < \varepsilon < 1$ và $0 < \rho \le r_0$ thỏa mãn

i. $\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}\right) \le \varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_\rho(O)\right)$;

ii. $\forall x \in \Omega$ và $\varrho \in (0, \rho]$, nếu $\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V} \cap B_\varrho(x)\right) > \varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_\varrho(x)\right)$ thì $\Omega \cap B_\varrho(x) \subset \mathcal{W}$.

Khi đó tồn tại hằng số $C = C(n) > 0$ sao cho $\left|\mathcal{V}\right| \le C\varepsilon\left|\mathcal{W}\right|$.

*Chứng minh Định lí 1.1*

*Chứng minh.* Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega, \varepsilon^{-a}\lambda\right) - d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h)+|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}\right)}\left(\Omega, \varepsilon^b\lambda\right) \le C\varepsilon d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}(\Omega, \lambda). \tag{4.1}$$

Với mọi $\varepsilon > 0$ và $\lambda > 0$ ta đặt

$$\mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda} := \left\{x \in \Omega : \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x_0) > \varepsilon^{-a}\lambda, \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)(x_0) \le \varepsilon^b\lambda\right\}$$

và

$$\mathcal{W}_\lambda := \left\{x \in \Omega : \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x) > \lambda\right\}.$$

Bây giờ ta sẽ kiểm hai giả thiết của **Bổ đề 5.1** từ đó sẽ có điều phải chứng minh. Thật vậy với $\rho > 0$ tùy ý ta sẽ chứng minh $\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}\right) \le \varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_\rho(O)\right)$. Ta có thể giả sử $\mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}$ khác rỗng vì nếu bằng rỗng thì luôn đúng. Khi đó tồn tại $x_1 \in \mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}$ sao cho

$$\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)(x_0) \le \varepsilon^b\lambda.$$

Từ đó, theo **Bổ đề 4.1** ta suy ra

$$\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}\right) \le d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho, \varepsilon^{-a}\lambda\right) \le \varepsilon\mathcal{L}^n(B_\rho(O)).$$

Như vậy i. đúng với $\varepsilon$ đủ bé và $b > \max\left\{0; 1 - a - \dfrac{\alpha}{n}\right\}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh ii. đúng. Lấy $x_2 \in \Omega$ và $\varrho \in \left(0, \rho\right)$. Giả sử tồn tại $x_3 \in \Omega_\varrho(x_2) \cap \mathcal{W}_\lambda^c$ và $x_4 \in \mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda} \cap B_\varrho(x_2)$. Do $x_3 \in \mathcal{W}_\lambda^c$ và $x_4 \in \mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}$ nên ta có

$$\mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)(x_3) \le \lambda \text{ và } \mathbf{M}_\alpha\left(\Psi^\sigma_{p,q}(h) + |\mathbf{f}|^p + |g|^{p'}\right)(x_4) \le \varepsilon^b.$$

Lúc này áp dụng **Bổ đề 4.1** và **Bổ đề 4.3** với $\varepsilon_0 > 0$ và $b > 0$ sao cho với mọi $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ thì

$$\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}_{\varepsilon,\lambda}\cap B_\rho(x_2)\right)\le d_{\mathbf{M}_\alpha\left(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\Psi^\sigma_{p,q}(u)\right)}\left(\Omega_\rho,\varepsilon^{-a}\lambda\right)\le\varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_\rho(O)\right).$$

Từ đây định lí được chứng minh xong bằng cách sử dụng **Bổ đề 5.1.**

*Chứng minh Định lí 1.2*

*Chứng minh.* Với $t\in\left(0,\dfrac{n-\alpha\theta}{n\theta}\right)$ thì tồn tại $a\in\left(\dfrac{n-\alpha\theta}{n\theta},\dfrac{1}{t}\right)$ khi đó áp dụng **Định lí 1.1** ta có thể chỉ ra $\delta>0,b>0$ và $\varepsilon_0\in(0,1)$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$d_{\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))}(\Omega,\varepsilon^{-a}\lambda)\le C\varepsilon d_{\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))}(\Omega,\lambda)+d_{\mathbf{M}_\alpha(|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}+\Psi^\sigma_{p,q}(h))}(\Omega,\varepsilon^b\lambda),\tag{4.2}$$

đúng với mọi $\lambda>0$ và $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Xét trường hợp $0<s<\infty$, ta có

$$\|\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))\|^s_{L^{t,s}(\Omega)}=t\int_0^\infty\lambda^{s-1}(d_{\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))}(\lambda))^{\frac{s}{t}}d\lambda\;=\varepsilon^{-as}t\int_0^\infty\lambda^{s-1}(d_{\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))}(\varepsilon^{-a}\lambda))^{\frac{s}{t}}d\lambda,$$

kết hợp với (5.2) ta thu được

$$\begin{aligned}\|\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))\|^s_{L^{t,s}(\Omega)}\;&\le C\varepsilon^{-as+\frac{s}{t}}t\int_0^\infty\lambda^{s-1}(d_{\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))}(\lambda))^{\frac{s}{t}}d\lambda\\&+C\varepsilon^{-as}t\int_0^\infty\lambda^{s-1}(d_{\mathbf{M}_\alpha(|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}+\Psi^\sigma_{p,q}(h))}(\varepsilon^b\lambda))^{\frac{s}{t}}d\lambda.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Ta thấy rằng (5.3) tương đương với bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\|\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))\|_{L^{t,s}(\Omega)}&\le C\varepsilon^{-a+\frac{1}{t}}\|\mathbf{M}_\alpha(\Psi^\sigma_{p,q}(u))\|_{L^{t,s}(\Omega)}\\&+C\varepsilon^{-a-b}\|\mathbf{M}_\alpha(|\mathbf{f}|^p+|g|^{p'}+\Psi^\sigma_{p,q}(h))\|_{L^{t,s}(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Kết quả trên vẫn đúng cho trường hợp $s=\infty$, hơn nữa bằng cách chọn $a$ ở bước đầu tiên, ta chỉ ra được $\varepsilon$ ở (5.4) thỏa mãn $C\varepsilon^{-a+\frac{1}{t}}\le\dfrac{1}{2}$.

Khi đó bất đẳng thức được chứng minh.

## 3. Kết luận

Qua bài báo này, chúng tôi đã tiến hành chứng minh đánh giá gradient trong không gian Lorentz cho phương trình elliptic tựa tuyến tính chứa số hạng Schrödinger trong trường hợp $p\ge n$. Định hướng mở rộng sắp tới có thể là chứng minh bài toán trong trường hợp $p<n$ hoặc thay đổi không gian Lorentz thành không gian Morrey.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

Caffarelli, L. A, & Peral, I. (1998). On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form. *Commun. Pure Appl. Math.*, *51*(1), 1-21.

Calderón, A. P., & Zygmund, A. (1952). On the existence of certain singular integrals. *Acta Math. 88*, 85-139.

Cruz-Uribe, D., & Neugebauer, C. J. (1995). The structure of the reverse Hölder classes. *Transactions of the American Mathematical Society*, *347*(8), 2941-2960.

Hamburger, C. (1992). Regularity of differential forms minimizing degenerate elliptic functionals, *J. Reine Angew. Math. (Crelles J.)*, *431*, 7-64.

Johnson, R., & Neugebauer, C. J. (1991). Change of variable results for $A_p$ - and reverse Hölder $\mathrm{RH}_r$ - classes. *Transactions of the American Mathematical Society, 328*(2), *639-666.*

Lee, M., & Ok, J. (2020). Interior and boundary $W^{1,p}$ -estimates for elliptic quasilinear equations of Schrödinger type. *J. Differ. Equ.*, *269*(5), 4406-4439.

Lee, M., & Ok, J. (2021). $L^p$ regularity for nonlinear elliptic equations with Schrödinger -type lower order terms, preprint, arXiv:2108.13779.

Nguyen, T. N., & Tran, M. P. (2020a). Lorentz improving estimates for the p-Laplace equations with mixed data. *Nonlinear Anal.*, *200*, 111960.

Nguyen, T. N., & Tran, M. P (2021a), Level-set inequalities on fractional maximal distribution functions and applications to regularity theory. *J. Funct. Anal.*, *280*(1), 108797.

Nguyen, T. N., & Tran, M. P (2021b). Lorentz estimates for quasi-linear elliptic double obstacle problems involving a Schrödinger term. *Math. Methods Appl. Sci.*, *44*(7), 6101-6116.

Nguyen, T. N., Tran, Q. V., Huynh, P. N., & Tran, M. P. (2022). Weighted distribution approach for a class of nonlinear elliptic equations associated to Schrödinger-type operators, preprint, 17 pages.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019a). Generalized good-λ techniques and applications to weighted Lorentz regularity for quasilinear elliptic equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 357*(8), 664-670.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019b). Gradient estimates via Riesz potentials and fractional maximal operators for quasilinear elliptic equations with applications, preprint, arXiv:1907.01434v2.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2020). New gradient estimates for solutions to quasilinear divergence form elliptic equations with general Dirichlet boundary data. *J. Differ. Equ.*, *268*(4), 1427-1462.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2022a). Weighted distribution approach to gradient estimates for quasilinear elliptic double-obstacle problems in Orlicz spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, *509(*1), 125928.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2022b). Global gradient estimates for very singular quasilinear elliptic equations with non-divergence data. *Nonlinear Anal.*, *214*, 112613.

Tran, M. P., Nguyen, T. N, & Huynh, P. N. (2021). Calderón-Zygmund-type estimates for singular quasilinear elliptic obstacle problems with measure data, preprint, arXiv:2109.01026v2.

Tran, M. P., Nguyen, T. N., & Nguyen, G. B. (2021). Lorentz gradient estimates for a class of elliptic p-Laplacian equations with a Schrödinger term. *J. Math. Anal. Appl.*, *496*(1), 124806.

Tran, M. P., Nguyen, T. N., Pham, L. T. N., & Dang, T. T. T. (2021). Weighted Lorentz estimates for non-uniformly elliptic problems with variable exponents, preprint, 14 pages.

Shen, Z. (1995). $L^p$ estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Ann. Inst. Fourier, 45*(2), 513-546.

Vitali, G. (1908). Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali. *Atti R. Accad. Sci. Torino, 43*, 229-246.

---

**REGULARITY RESULTS FOR SOLUTIONS TO *p*-LAPLACE EQUATIONS CONTAINING SCHRÖDINGER TERMS IN LORENTZ SPACES WITH $p \geq n$**

***Tran Dai Dinh Phong*[*], *Nguyen Huu Hai, Tran Phuoc An***
*Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam*
[*]*Corresponding author: Tran Dai Dinh Phong – Email: trandaidinhhphong.hcmue@gmail.com*
*Received: April 25, 2022; Revised: May 25, 2022; Accepted: June 18, 2022*

**ABSTRACT**

*The p-Laplace equations containing the Schrödinger terms have been extensively applied in science. Recently, the regularity of the solution to this equation has been studied in different function spaces. This paper present the regularity results for solutions to p-Laplace equations containing the Schrödinger terms in Lorentz spaces with* $p \geq n$*. The method used is to establish the distribution function inequality on the level sets of quantities related to the gradient of the solution and the given data under the influence of fractional maximal operators. This method has been recently developed and used effectively.*

***Keywords:*** fractional-level maximal operator; gradient estimates; Lorentz space; *p*-Laplace equation; regularity theory