

**Bài báo nghiên cứu****ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CỦA HỌC SINH:  
TRƯỜNG HỢP CHỦ ĐỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC Ở LỚP 10***Nguyễn Thị Nga<sup>1\*</sup>, Trần Ngọc Thanh Trúc<sup>2</sup>*<sup>1</sup>*Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam**\*Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Nga – Email: ngant@hcmue.edu.vn**Ngày nhận bài: 16-6-2020; ngày nhận bài sửa: 02-7-2020; ngày duyệt đăng: 20-02-2022***TÓM TẮT**

Bài báo trình bày những khái niệm cơ bản, làm cơ sở cho việc xây dựng thang tiêu chí đánh giá năng lực mô hình hóa toán học như: năng lực mô hình hóa toán học, kỹ năng thành phần của năng lực mô hình hóa, rubric trong kiểm tra – đánh giá và quan điểm mô hình hóa trong dạy học hệ thức lượng trong tam giác trong sách giáo khoa Hình học 10 hiện hành. Đồng thời bài báo cũng đề xuất một thang tiêu chí đánh giá chi tiết năng lực mô hình hóa gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10 và sau đó là thang vận dụng cho các bài toán cụ thể liên quan đến chủ đề này. Cuối cùng, kết quả khảo sát trên giáo viên và thực nghiệm trên học sinh cho thấy tính khả thi và hiệu quả của các thang tiêu chí đánh giá đã xây dựng.

**Từ khóa:** thang tiêu chí đánh giá; năng lực mô hình hóa toán học; hệ thức lượng trong tam giác

**1. Mở đầu**

Trong bối cảnh đổi mới giáo dục theo hướng chuyển từ chủ yếu trang bị kiến thức, kỹ năng sang phát triển toàn diện năng lực và phẩm chất người học, đổi mới kiểm tra – đánh giá có ảnh hưởng rất lớn đến việc nâng cao chất lượng đào tạo, trở thành nhu cầu cấp thiết của ngành giáo dục. Trên thực tế hiện nay, mục tiêu, nội dung trong chương trình, sách giáo khoa và phương pháp dạy học đã dần được đổi mới nhằm phát huy tính tích cực của học sinh nhưng việc kiểm tra – đánh giá kết quả học tập tại các trường phổ thông lại chưa thay đổi nhiều. Chúng tôi đã thực hiện một cuộc khảo sát ý kiến của giáo viên và kết quả cho thấy, cách kiểm tra đánh giá hiện nay còn thiên về đánh giá khả năng ghi nhớ và tái hiện kiến thức, coi trọng đến lý thuyết hàn lâm và chưa quan tâm đúng mức đến việc đánh giá sự thông hiểu, vận dụng kiến thức, tư duy bậc cao trong giải quyết vấn đề và thực hành.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, (Ministry of Education and Training, 2018), giáo dục toán học hình thành, phát triển cho học sinh những phẩm chất, năng lực chung và năng lực toán học. Và mô hình hóa toán học là một trong những năng lực quan

---

*Cite this article as:* Nguyen Thị Nga, & Tran Ngọc Thanh Trúc (2022). Assessment of students' mathematical modeling competences: case of the topic of trigonometric system in grade 10. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 19(5), 817-831.

trọng cần hình thành cho học sinh vì nó giúp học sinh kết nối, ứng dụng những kiến thức, kỹ năng toán học vào giải quyết các vấn đề thực tế trong cuộc sống hằng ngày. Nhưng câu hỏi đặt ra là làm thế nào đánh giá được năng lực này ở học sinh?

Xuất phát từ nhu cầu thực tế nêu trên, chúng tôi mong muốn xây dựng được một thang đánh giá năng lực mô hình hóa với các tiêu chí cụ thể góp phần hỗ trợ giáo viên có thể đánh giá được năng lực mô hình hóa toán học ở học sinh. Thang đánh giá này được cụ thể hóa trong việc đánh giá năng lực mô hình hóa khi dạy học chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10.

## 2. Nội dung

### 2.1. Năng lực mô hình hóa toán học

Năng lực mô hình hóa toán học là một trong những thành tố cốt lõi của năng lực toán học. Có nhiều định nghĩa khác nhau của các nhà nghiên cứu về năng lực mô hình hóa.

Maaß (2006), định nghĩa năng lực mô hình hóa bao gồm các kỹ năng thực hiện quá trình mô hình hóa nhằm đạt được mục tiêu xác định.

Kaiser (2007), cho rằng một trong những mục tiêu hàng đầu của giáo dục toán là hình thành và phát triển năng lực sử dụng toán để giải quyết các vấn đề nảy sinh trong cuộc sống hiện tại và tương lai cho người học. Để đáp ứng được mục tiêu đó, việc dạy học Toán trong nhà trường phải mang đến cơ hội để học sinh thấy được sự cần thiết của toán trong cuộc sống và trong các ngành khoa học khác đồng thời phải hình thành ở các em năng lực giải quyết các vấn đề thực tế bằng công cụ toán học.

### 2.2. Kỹ năng thành phần của năng lực mô hình hóa toán học

Năng lực mô hình hóa toán học có 8 kỹ năng thành phần, cụ thể đó là:

- (1) Đơn giản giả thiết;
- (2) Làm rõ mục tiêu (xác định được yêu cầu của đề bài);
- (3) Thiết lập vấn đề toán học;
- (4) Xác định biến, tham số, hằng số (kèm theo điều kiện);
- (5) Thiết lập mệnh đề toán học;
- (6) Lựa chọn mô hình;
- (7) Biểu diễn mô hình bằng biểu đồ, đồ thị;
- (8) Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn.

### 2.3. Yêu cầu cần đạt đối với năng lực mô hình hóa ở cấp trung học phổ thông

Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 mô tả biểu hiện cụ thể của năng lực mô hình hóa toán học và yêu cầu cần đạt ở cấp trung học phổ thông như sau:

**Bảng 1. Biểu hiện của năng lực mô hình hóa và yêu cầu cần đạt ở cấp trung học phổ thông**

<b>Biểu hiện của năng lực mô hình hóa</b>	<b>Yêu cầu cần đạt</b>
- Xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn	- Thiết lập được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, sơ đồ, hình vẽ, bảng biểu, đồ thị...) để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn
- Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập	- Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập
- Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nêu cách giải quyết không phù hợp	- Lí giải được tính đúng đắn của lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tiễn hay không). Đặc biệt, nhận biết được cách đơn giản hóa, cách điều chỉnh những yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa...) để đưa đến những bài toán giải được

**2.4. Thang tiêu chí đánh giá (Rubric) trong kiểm tra – đánh giá**

Có nhiều nhà nghiên cứu nêu định nghĩa về rubric, chúng tôi đã tổng hợp các định nghĩa về rubric như sau:

Theo Natalie Pham (2010), rubric là một hệ thống cho điểm theo các tiêu chí đánh giá cho trước, nêu rõ người chấm đánh giá bài theo những kì vọng nào và mô tả các cấp độ tiêu chí dùng để đánh giá.

Heidi Goodrich là một chuyên gia về rubric, trong công trình *Sử dụng rubrics để khuyến khích tư duy và học tập* (Heidi Goodrich, 2000), ông đã định nghĩa rubric là một công cụ dùng để cho điểm bằng cách liệt kê tất cả các tiêu chí đánh giá bài học, bài tập, bài làm hay công việc mà người học thực hiện bằng cách xếp loại theo thứ bậc.

Theo Tran và Nguyen (2009), rubric là bản mô tả đầy đủ những gì người học cần chứng tỏ để được xếp hạng năng lực giỏi, khá, trung bình, yếu, kém đối với các yêu cầu môn học.

Tóm lại, có thể hiểu rubric là một bảng mô tả chi tiết, rõ ràng có hệ thống các tiêu chuẩn, tiêu chí hay các mức độ mà học sinh cần phải thực hiện để đạt được mục đích cuối cùng của nhiệm vụ học tập như thuyết trình, làm việc nhóm, bài tập, bài kiểm tra... để có thể nhận được một điểm số hoặc đánh giá tương ứng.

**2.5. Tiêu chí đánh giá một rubric chất lượng**

Theo các nhà giáo dục, một rubric được đánh giá là chất lượng nếu thỏa các tiêu chí trong Bảng 2.

**Bảng 2. Bảng tiêu chí đánh giá chất lượng của một rubric**

Phạm trù đánh giá	Các tiêu chí đánh giá phản ánh đầy đủ nội dung, mục tiêu học tập không?
Mức độ	Hướng dẫn có các mức độ khác nhau được đặt tên và giá trị điểm số phù hợp không?
Tiêu chí	Các thông tin có mô tả rõ ràng, thể hiện theo một chuỗi liên kết và đảm bảo cho sự phát triển của học sinh không?
Thân thiện với học sinh	Ngôn ngữ có rõ ràng, dễ hiểu đối với học sinh không?
Thân thiện với giáo viên	Có dễ sử dụng với giáo viên không?
Tính phù hợp	Có thể đánh giá sản phẩm công việc được không? Nó có thể được dùng để đánh giá nhu cầu không? Học sinh có thể xác định dễ dàng những lĩnh vực phát triển cần thiết không?

Để đánh giá một rubric có chất lượng hay không, ta cần quan tâm đến các mặt như sau: các tiêu chí đánh giá được xây dựng trong thang đánh giá phải phản ánh được đầy đủ nội dung, mục tiêu học tập. Đồng thời, các mức độ đánh giá khác nhau và giá trị điểm số của nó được xây dựng trong thang tiêu chí đánh giá phải phù hợp và các thông tin trong thang tiêu chí phải được mô tả một cách rõ ràng, thể hiện theo một chuỗi liên kết, đảm bảo cho sự phát triển của học sinh. Bên cạnh đó, phải xét xem ngôn ngữ được sử dụng trong thang tiêu chí có rõ ràng, dễ dàng sử dụng đối với giáo viên và cả học sinh hay không. Hơn thế nữa, thang tiêu chí đánh giá phải có tính phù hợp, có thể dùng để đánh giá được năng lực của học sinh.

## **2.6. Quan điểm mô hình hóa trong dạy học hệ thức lượng trong tam giác trong sách giáo khoa Hình học 10 hiện hành**

Đặc trưng của các bài toán thực tế gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác được trình bày trong sách giáo khoa và sách bài tập Hình học 10 là đưa về bài toán xác định khoảng cách giữa hai địa điểm khi gặp vật cản, xác định chiều cao của vật khi không thể đo trực tiếp, tính diện tích... Đối chiếu với bốn bước của quá trình mô hình hóa toán học (Nguyen, 2014), chúng tôi có kết luận như sau:

### *Bước 1. Chuyển hệ thống ngoài toán học thành một mô hình trung gian*

Trong chủ đề hệ thức lượng trong tam giác, bước này không tồn tại vì đề bài đã được thu hẹp thành mô hình trung gian hoặc mô hình toán học.

### *Bước 2. Chuyển mô hình trung gian thành mô hình toán học*

Trong hầu hết các bài toán thực tế gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10, học sinh nên vẽ hình minh họa cụ thể. Sau đó, học sinh sẽ xây dựng tam giác dựa vào hình ảnh minh họa vừa vẽ, chuyển bài toán thực tế thành bài toán giải tam giác, cho biết yếu tố xác định rồi tìm đại lượng nào đó.

### *Bước 3. Giải quyết bài toán toán học*

Học sinh cần vận dụng các công thức định lý côsin, định lý sin, công thức tính độ dài đường trung tuyến, các công thức tính diện tích... để giải quyết bài toán.

### *Bước 4. Phân tích và kiểm định lại kết quả thu được*

Đối với các bài toán trong chủ đề hệ thức lượng trong tam giác, bước này chỉ là hình thức vì học sinh không có trách nhiệm đối chiếu kết quả toán học phù hợp với thực tế hay không.

## **2.7. Thang tiêu chí đánh giá năng lực mô hình hóa gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10**

Chúng tôi đã tham khảo đề xuất về thang đánh giá năng lực mô hình hóa theo 4 mức độ của tác giả Nguyen (2019), đồng thời dựa vào đặc trưng của các bài toán thực tế gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác để xây dựng một thang tiêu chí đánh giá năng lực mô hình hóa gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10, trong đó thể hiện rõ các mức độ biểu hiện của mỗi tiêu chí đánh giá như sau:

**Bảng 3.** Thang tiêu chí đánh giá năng lực mô hình hóa và các mức độ biểu hiện của mỗi tiêu chí gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10

Năng lực thành phần	Kĩ năng và tiêu chí cho từng kĩ năng	Các mức độ biểu hiện của mỗi tiêu chí và mức điểm tương ứng			
		Mức 1	Mức 2	Mức 3	Mức 4
		0-2.5 điểm	2.6-5.0 điểm	5.1-7.5 điểm	7.6-10 điểm
	Chuyên đổi ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học	Không chuyên đổi được ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học	Chuyên đổi được một phần ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học	Chuyên đổi ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học nhưng không xác định được mối quan hệ giữa các yếu tố được cho trong bài toán	Chuyên đổi ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học, từ đó xác định chính xác mối quan hệ giữa các yếu tố được cho trong bài toán
Năng lực hiểu các vấn đề thực tế để xây dựng mô hình mô tả vấn đề thực tế	Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu.	Không đơn giản hóa vấn đề. Không phân biệt được các yếu tố, thông tin có liên quan hay không liên quan đến tình huống.	Đơn giản hóa được vấn đề. Xác định được một số thông tin cốt lõi, cần thiết, liên quan đến tình huống.	Đơn giản hóa được vấn đề. Xác định được toàn bộ thông tin cốt lõi, cần thiết, liên quan đến tình huống nhưng chỉ hiểu đúng một phần trong tất cả thông tin đó.	Đơn giản hóa được vấn đề. Xác định được toàn bộ thông tin cốt lõi, cần thiết, liên quan đến tình huống và hiểu đúng tất cả thông tin đó.
	Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài (nhận biết được dạng toán: tìm chiều cao, tìm khoảng cách, tính diện tích...)	Không xác định được mục tiêu, cụ thể là: - Không xác định được đối tượng cần tìm - Không xác định được những yếu tố (tham số) cơ bản, quan trọng và không loại bỏ được những tham số phụ - Không liệt kê được các từ khóa cốt lõi, không diễn đạt lại được vấn đề.	Xác định được một phần của mục tiêu, cụ thể: - Xác định được đối tượng cần tìm. - Xác định được những yếu tố (tham số) cơ bản, quan trọng nhưng không loại bỏ được những tham số phụ - Không liệt kê được các từ khóa cốt lõi, không diễn đạt lại được vấn đề	Xác định được phần lớn mục tiêu, cụ thể là: - Xác định được đối tượng cần tìm - Xác định được những yếu tố (tham số) cơ bản, quan trọng, loại bỏ được những tham số phụ - Liệt kê được các từ khóa cốt lõi, diễn đạt lại được vấn đề nhưng còn chưa mạch lạc, rõ ràng	Xác định được chính xác mục tiêu, cụ thể là: - Xác định được đối tượng cần tìm - Xác định được những yếu tố (tham số) cơ bản, quan trọng, loại bỏ được những tham số phụ - Liệt kê được các từ khóa cốt lõi, diễn đạt lại được vấn đề một cách chính xác, rõ ràng, mạch lạc, dễ hiểu

<p>Năng lực xây dựng mô hình toán học từ mô hình mô tả vấn đề thực tế</p>	<p>Biểu diễn mô hình bằng hình vẽ minh họa</p>	<p>Không vẽ được hình vẽ minh họa hoặc vẽ được hình minh họa nhưng chưa phù hợp với mô hình mô tả thực tế</p>	<p>Vẽ được hình minh họa phù hợp với mô hình mô tả thực tế nhưng chưa biểu thị chính xác các đại lượng bằng kí hiệu toán học</p>	<p>Vẽ được hình minh họa phù hợp với mô hình mô tả thực tế và biểu thị chính xác các đại lượng bằng kí hiệu toán học</p>	<p>Vẽ được hình minh họa đẹp, dễ nhìn, phù hợp với mô hình mô tả thực tế và biểu thị chính xác các đại lượng bằng kí hiệu toán học</p>
	<p>Xây dựng tam giác từ hình vẽ minh họa</p>	<p>Không xây dựng được tam giác từ hình vẽ minh họa</p>	<p>Xây dựng sai tam giác từ hình vẽ minh họa</p>	<p>Xây dựng được tam giác từ hình vẽ minh họa nhưng chỉ đúng một phần</p>	<p>Xây dựng được tam giác từ hình vẽ minh họa một cách chính xác</p>
	<p>Xác định biến, tham số, hằng số (kèm theo điều kiện)</p>	<p>Không xác định được biến, tham số</p>	<p>Xác định chưa đầy đủ các biến, tham số và chưa thiết lập được điều kiện ban đầu</p>	<p>Xác định được đầy đủ các biến, tham số nhưng chưa thiết lập được điều kiện ban đầu</p>	<p>Xác định được đầy đủ các biến, tham số và thiết lập được điều kiện ban đầu</p>
<p>Năng lực giải quyết các vấn đề toán học trong mô hình toán học</p>	<p>Kĩ năng đo</p>	<p>Chỉ ra được các vị trí cần đo (đo độ dài hoặc đo góc)</p>	<p>Chỉ ra được các vị trí cần đo (đo độ dài hoặc đo góc) Hình dung được cách sử dụng dụng cụ đo (thước dây, giác kế...) nhưng thao tác chưa chính xác</p>	<p>Chỉ ra được các vị trí cần đo (đo độ dài hoặc đo góc) Hình dung được cách sử dụng dụng cụ đo (thước dây, giác kế...), thao tác đo chính xác, đặt đúng vị trí thước và giác kế</p>	<p>Chỉ ra được các vị trí cần đo (đo độ dài hoặc đo góc) Hình dung được cách sử dụng dụng cụ đo (thước dây, giác kế...), thao tác đo chính xác, đặt đúng vị trí thước và giác kế Lựa chọn được cách đo tối ưu</p>
		<p>Sử dụng những kiến thức, kĩ năng được học, cụ thể là sử dụng công thức định lí côsin, định lí sin, công thức tính độ dài đường trung tuyến hay công thức tính diện tích tam giác để</p>	<p>Không kết nối được các kiến thức, thông tin liên quan dẫn đến không tìm được phương pháp, công cụ toán học nào, không lựa chọn được công thức để giải quyết bài toán trong mô hình toán học</p>	<p>Kết nối được một phần các kiến thức, thông tin liên quan, biết phải sử dụng kiến thức hệ thức lượng trong tam giác để giải quyết bài toán nhưng không lựa chọn được chính xác công thức nào</p>	<p>Kết nối được các kiến thức, thông tin liên quan, xác định được cần phải sử dụng công thức định lí côsin, định lí sin, công thức tính độ dài đường trung tuyến hay công thức tính diện tích tam giác</p>

	giải quyết mô hình toán học				Giải thích được lí do vì sao áp dụng công thức đó
	Trình bày lời giải rõ ràng, lập luận chặt chẽ, logic, tính toán chính xác	Lập luận toán học không chặt chẽ, tính toán chưa chính xác, trình bày lời giải còn lủng củng	Lập luận toán học có phần chặt chẽ, tính toán chưa chính xác, trình bày lời giải chưa rõ ràng	Lập luận toán học chặt chẽ nhưng tính toán chưa chính xác, trình bày lời giải chưa rõ ràng	Lập luận toán học chặt chẽ, tính toán chính xác, trình bày lời giải rõ ràng
Năng lực phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được	Liên hệ lại các vấn đề trong thực tế. - Chuyên dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu - Kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế, đôi chiều thực tiễn mô hình	- Không trả lời được yêu tố (tham số) cần tìm trong tình huống thực tế ban đầu - Giải thích sai hoặc không diễn giải được kết quả toán học thu được - Không xác thực lại hoặc xác thực sai lời giải	- Trả lời được yêu tố (tham số) cần tìm trong tình huống thực tế. - Giải thích, diễn giải kết quả toán học không đầy đủ, còn sai sót. - Không xét đến tính hợp lí trong thực tế	- Trả lời được yêu tố (tham số) cần tìm trong tình huống thực tế ban đầu - Giải thích, diễn giải kết quả toán học không đầy đủ, còn sai sót. - Kiểm tra được tính hợp lí trong thực tế	- Trả lời được yêu tố (tham số) cần tìm trong tình huống thực tế ban đầu. - Giải thích, diễn giải đầy đủ, chính xác kết quả toán học thu được. - Kiểm tra được tính hợp lí trong thực tế. - Phản hồi lời giải thực tế, đôi chiều thực tiễn, cải tiến mô hình

### 3. Kết quả nghiên cứu

#### 3.1. Khảo sát đối với giáo viên

Chúng tôi đã tiến hành khảo sát đánh giá của 51 giáo viên bộ môn Toán ở các trường THPT về thang tiêu chí đánh giá năng lực mô hình hóa gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10 nêu trên. Kết quả khảo sát cho thấy đa số giáo viên nhận định thang tiêu chí được xây dựng rõ ràng hoặc rất rõ ràng. Ngoài ra, hầu hết các giáo viên cho rằng các tiêu chí đánh giá được xây dựng trong thang tiêu chí đánh giá đã phản ánh đầy đủ nội dung, mục tiêu học tập chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10, các mức độ đánh giá khác nhau và giá trị điểm số của nó được xây dựng trong thang tiêu chí đánh giá là phù hợp, các thông tin được mô tả rõ ràng, thể hiện theo một chuỗi liên kết và đảm bảo cho sự phát triển của học sinh. Bên cạnh đó, thang tiêu chí đánh giá dễ dàng sử dụng đối với giáo viên và ngôn ngữ sử dụng rõ ràng, dễ hiểu đối với học sinh. Như vậy, thang tiêu chí đánh giá này có tính phù hợp, có thể dùng để đánh giá được năng lực mô hình hóa của học sinh gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10. Chúng tôi cũng đã xin ý kiến của các giáo viên và không có giáo viên nào đề xuất thêm tiêu chí khác để đánh giá năng lực mô hình hóa của học sinh.

### 3.2. Thực nghiệm đối với học sinh

Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm trên 84 học sinh lớp 10A1 và lớp 10A3 Trường THPT Tân Thông Hội, Củ Chi, Thành phố Hồ Chí Minh. Đây là hai lớp học theo Chương trình môn Toán lớp 10 cơ bản, trình độ chung của cả hai lớp là trung bình – khá. Thời gian thực nghiệm là sau khi học sinh học xong chủ đề hệ thức lượng trong tam giác.

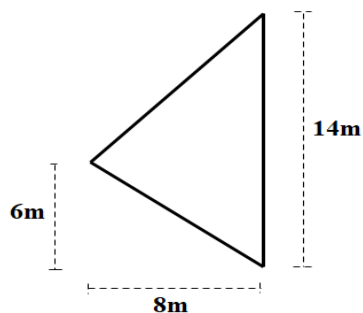
#### 3.2.1. Giới thiệu bài toán thực nghiệm

Xuất phát từ ý tưởng của Tran (2014), chúng tôi đề xuất một bài toán thực tế “Công viên hình tam giác”.

Ông Tân là chủ đầu tư của một dự án khu chung cư cao cấp sắp được xây dựng ở Quận 2, Thành phố Hồ Chí Minh. Ông Tân dự định xây dựng một công viên cây xanh nhỏ hình tam giác như Hình 5 trong khuôn viên chung cư với mục đích đưa mảng xanh vào không gian sống thoải mái, gần gũi với thiên nhiên. Để công việc được tiến hành thuận lợi, người ta đo đạc và mô phỏng kích thước công viên như Hình 6. Ông Tân và nhà thiết kế của dự án bàn bạc với nhau sẽ đặt một trụ đèn công cộng có độ cao 5m trong công viên để chiếu sáng toàn bộ công viên, biết công suất chiếu sáng của đèn là 180W.



Hình 1. Hình minh họa công viên.



Hình 2. Hình mô phỏng kích thước công viên.

1. Em hãy tư vấn giúp ông Tân nên đặt cây đèn ở vị trí nào để toàn bộ công viên sẽ được chiếu sáng?
  - a) Trọng tâm tam giác
  - b) Trực tâm tam giác
  - c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác
  - d) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác
 Hãy giải thích sự lựa chọn của em?

2. Sử dụng kiến thức đã học, em hãy giúp ông Tân xác định vị trí chính xác của cây đèn nên đặt ở đâu để toàn bộ công viên sẽ được chiếu sáng. Giải thích sự lựa chọn của em?

Chúng tôi xây dựng bài toán này với mong muốn có thể đánh giá được kỹ năng sau đây:

1. Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu.

Kết quả phân tích sách giáo khoa và sách bài tập Hình học 10 cho thấy các thông tin được cho trong các bài toán thực tế gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác đã được đơn giản hóa, yếu tố không cần thiết không được xuất hiện, mô hình toán học hầu hết đã được định sẵn, học sinh chỉ cần vận dụng công thức để tính toán. Việc sử dụng tất cả những dữ kiện trong bài toán đã trở nên quen thuộc với học sinh (học sinh luôn giải những bài toán được cho vừa đủ thông tin). Điều này giúp học sinh rèn luyện được kỹ năng giải toán như kỹ năng phân tích nhưng việc lựa chọn thông tin cần thiết để có thể chuyển về mô hình toán



học lại không được chú trọng. Khi tiếp xúc với các bài toán có thông tin thừa hoặc thiếu, học sinh buộc phải lựa chọn những thông tin cần thiết để rèn luyện kỹ năng thực hiện quá trình mô hình hóa. Vì vậy, chúng tôi lựa chọn *cho thừa thông tin* trong bài toán thực nghiệm để kiểm tra mức độ của kỹ năng đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu ở học sinh.

2. Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài.

Mục tiêu ban đầu là cần đưa ra được phương án vị trí đặt trụ đèn theo tiêu chí toàn bộ công viên đều được chiếu sáng từ các dữ kiện cho sẵn. Từ mục tiêu này đồng thời kết hợp với kỹ năng đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu, học sinh đi đến được mục tiêu cụ thể là phải tìm được các đối tượng trung gian là độ dài các cạnh của công viên hình tam giác cũng như diện tích của công viên để từ đó, xác định được bán kính đường tròn ngoại tiếp công viên hình tam giác.

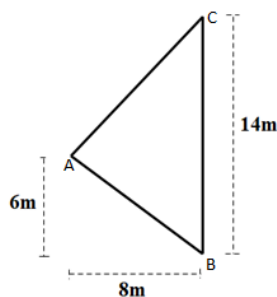
3. Sử dụng những kiến thức, kỹ năng được học để tìm kiếm phương pháp, công cụ toán học phù hợp để giải quyết mô hình toán học.

4. Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn (thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu, kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế).

### 3.2.2. Lời giải mong đợi

1. Vùng mà trụ đèn chiếu sáng được biểu diễn bằng một hình tròn mà điểm đặt cây đèn là tâm nên để chiếu sáng toàn bộ công viên ta cần đặt cây đèn ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

2.



$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (m)}$$

$$AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ (m)}$$

Gọi  $p$  là nửa chu vi của tam giác ABC

$$\text{Ta có: } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{10 + 8\sqrt{2} + 14}{2} = 12 + 4\sqrt{2} \text{ (m)}$$

$$\text{Diện tích } S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = 56 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC } R = \frac{abc}{4S} \approx 7,1 \text{ (m)}$$

Vậy nên đặt trụ đèn tại vị trí cách đều ba đỉnh của khu đất hình tam giác một khoảng 7,1 m .

### 3.2.3. Thang tiêu chí đánh giá chi tiết

**Bảng 4.** Thang hướng dẫn đánh giá chi tiết bài toán thực nghiệm

Kĩ năng	Mức độ	Biểu hiện cụ thể của mỗi mức độ
Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu	Mức 4	Bài toán này chỉ yêu cầu học sinh đạt được kĩ năng đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu ở mức 3 nên học sinh nào đạt được mức 3 là mức cao nhất trong kĩ năng này
	Mức 3	Chuyển đổi được ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học để biết được mối quan hệ giữa cây đèn và các cạnh, các đỉnh của công viên Loại bỏ được thông tin thừa là trụ đèn cao 5 m và công suất chiếu sáng của đèn là 180W
	Mức 2	Chuyển đổi được ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học để biết được mối quan hệ giữa cây đèn và các cạnh, các đỉnh của công viên Chỉ loại bỏ được thông tin thừa là công suất chiếu sáng của đèn là 180W
	Mức 1	Không đơn giản được giả thiết nào
Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài	Mức 4	Xác định và làm rõ được mục tiêu ban đầu là cần đưa ra được phương án vị trí đặt trụ đèn theo tiêu chí toàn bộ công viên đều được chiếu sáng từ các dữ kiện cho sẵn. Xác định và làm rõ được mục tiêu cụ thể là cần tìm được các đối tượng trung gian là độ dài các cạnh của công viên hình tam giác cũng như diện tích của công viên để đi đến được mục tiêu tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác
	Mức 3	Xác định được mục tiêu ban đầu là cần đưa ra được phương án vị trí đặt trụ đèn theo tiêu chí toàn bộ công viên đều được chiếu sáng từ các dữ kiện cho sẵn, xác định được mục tiêu cụ thể là cần tìm được các đối tượng trung gian là độ dài các cạnh của công viên hình tam giác nhưng không xác định được diện tích của công viên
	Mức 2	Xác định được mục tiêu ban đầu là cần đưa ra được phương án vị trí đặt trụ đèn theo tiêu chí toàn bộ công viên đều được chiếu sáng từ các dữ kiện cho sẵn nhưng không xác định được mục tiêu cụ thể là cần tìm được các đối tượng trung gian là độ dài các cạnh của công viên hình tam giác cũng như diện tích của công viên
	Mức 1	Không xác định được mục tiêu, yêu cầu đề bài
Sử dụng những kiến thức, kĩ năng được học để tìm kiếm phương pháp, công cụ toán học phù hợp để giải quyết mô hình toán học	Mức 4	- Sử dụng định lí Pytago để tìm độ dài các cạnh của công viên hình tam giác - Sử dụng công thức Hê-rông để tính diện tích tam giác - Sử dụng công thức $R = \frac{abc}{4S}$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của công viên hình tam giác, để tính được độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác
	Mức 3	Học sinh chỉ tính được độ dài các cạnh của công viên hình tam giác và diện tích nhưng không tìm được độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác
	Mức 2	Học sinh chỉ tính được độ dài các cạnh của công viên hình tam giác
	Mức 1	Học sinh không lựa chọn được kiến thức, công thức nào phù hợp để giải quyết mô hình toán học

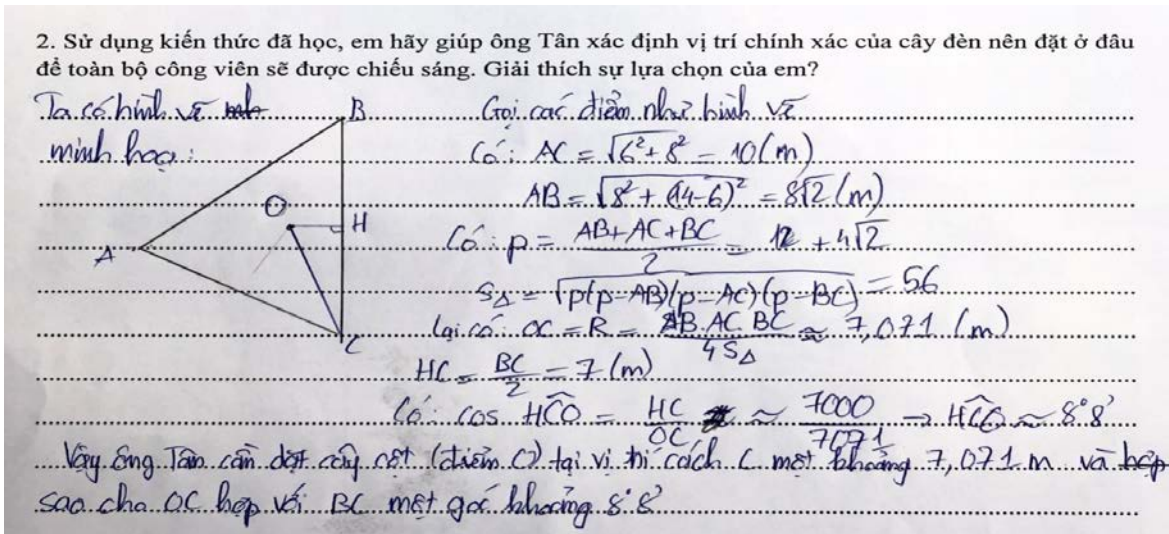
Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn (thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu, kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế)	Mức 4	Bài toán này chỉ yêu cầu học sinh đạt được kỹ năng liên hệ thực tiễn, thông dịch kết quả toán học, tư vấn phương án cho ông Tân nên học sinh nào đạt được mức 3 là mức cao nhất trong kỹ năng này
	Mức 3	Sau khi tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp công viên hình tam giác, học sinh kiểm tra tính hợp lý trong thực tế và phiên dịch được kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu. Cụ thể là, học sinh cần đưa ra phương án ông Tân nên đặt trụ đèn tại vị trí cách đều ba đỉnh của khu đất hình tam giác một khoảng $7,1 m$ để có thể chiếu sáng toàn bộ khu công viên Đưa ra thông báo, giải thích, cải tiến mô hình có độ phức tạp cao hơn sao cho phù hợp với thực tiễn: Nếu trụ đèn có độ cao khác và đèn có công suất chiếu sáng khác thì có ảnh hưởng đến vùng chiếu sáng hay không?
	Mức 2	Sau khi tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp công viên hình tam giác, học sinh kiểm tra tính hợp lý trong thực tế và phiên dịch được kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu. Cụ thể là, học sinh cần đưa ra phương án ông Tân nên đặt trụ đèn tại vị trí cách đều ba đỉnh của khu đất hình tam giác một khoảng $7,1 m$ để có thể chiếu sáng toàn bộ khu công viên
	Mức 1	Dừng lại ở kết quả toán học, không đưa ra được phương án ông Tân nên đặt chính xác vị trí của trụ đèn ở đâu

### 3.2.4. Kết quả thực nghiệm

Đối với câu hỏi số 1 trong bài toán thực nghiệm, chúng tôi nhận được 47/84 học sinh lựa chọn vị trí đặt cây đèn là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (trong đó có 37 học sinh giải thích sự lựa chọn của mình chính xác và hợp lý, 4 học sinh giải thích sai và 6 học sinh không giải thích), 17/84 học sinh lựa chọn vị trí đặt cây đèn là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, 19/84 học sinh lựa chọn vị trí đặt cây đèn là trọng tâm của tam giác và 1/84 học sinh lựa chọn phương án đặt đèn ở trực tâm của tam giác.

Đối với câu hỏi 2, chúng tôi nhận được câu trả lời từ 19/84 học sinh, còn lại 65 học sinh bỏ giấy trắng. Đối với các học sinh không có câu trả lời, chúng tôi chỉ đánh giá mức độ của KN1, KN2, KN3 lần lượt là 1, 1, 1, vì chúng tôi nhận thấy học sinh không đơn giản được giả thiết, không xác định được mục tiêu, yêu cầu đề bài nên không lựa chọn được kiến thức, công thức nào để giải quyết mô hình toán học. Chúng tôi không đánh giá mức độ của KN4 vì chúng tôi cho rằng không đủ cơ sở để đánh giá.

Dựa trên thang hướng dẫn đánh giá chi tiết bài toán thực nghiệm, chúng tôi tiến hành đánh giá bài làm của học sinh đối với câu hỏi 2. Sau đây là bài làm của HS9:



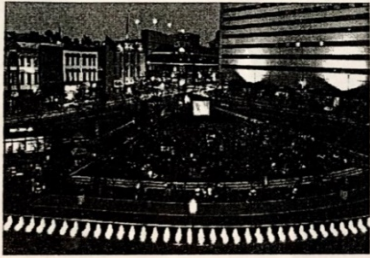
Hình 3. Trích bài làm của HS 9

Chúng tôi đánh giá bài làm của HS 9 như sau:

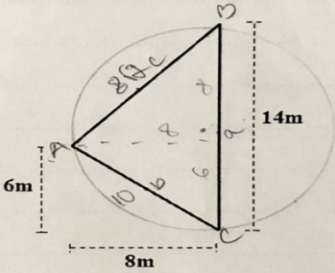
Bảng 5. Kết quả đánh giá bài làm của HS 9

KN	Căn cứ biểu hiện	Mức
KN 1	Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu	3
KN 2	Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài	4
KN 3	Sử dụng những kiến thức, kỹ năng được học để tìm kiếm phương pháp, công cụ toán học phù hợp để giải quyết mô hình toán học	4
KN4	Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn (thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu, kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế)	2

Học sinh này đã chuyển đổi được ngôn ngữ từ thực tế cuộc sống sang ngôn ngữ hình học để biết được mối quan hệ giữa cây đèn và các cạnh, các đỉnh của công viên, loại bỏ được thông tin thừa là chiều cao của trụ đèn và công suất chiếu sáng của đèn. Đồng thời, xác định được mục tiêu ban đầu và mục tiêu cụ thể để từ đó lựa chọn công cụ toán học phù hợp để tính được độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. HS 9 đạt được mức cao nhất ở ba kỹ năng đầu, riêng KN4 chúng tôi đánh giá đạt được mức 2 vì sau khi tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác, học sinh đã đưa ra được phương án giúp ông Tân tìm vị trí đặt trụ đèn nhưng chưa đưa ra được thông báo, giải thích, cải tiến mô hình có độ phức tạp cao hơn sao cho phù hợp với thực tiễn.



Hình 4.1.



Hình 4.2.

1. Em hãy tư vấn giúp ông Tân nên đặt cây đèn ở vị trí nào để toàn bộ công viên sẽ được chiếu sáng?

a) Trọng tâm tam giác      b) Trực tâm tam giác  
 c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác      d) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác

Hãy giải thích sự lựa chọn của em?

*c.) Tâm đường tròn ngoại tiếp A*

*$S = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a$*

*$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 14 = 56$*        *$P = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 14}{4 \cdot 56} = 7,07$*

Hình 4. Trích bài làm của HS12

Chúng tôi đánh giá bài làm của HS12 như sau:

Bảng 6. Kết quả đánh giá bài làm của HS 12

KN	Căn cứ biểu hiện	Mức
KN 1	Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu	3
KN 2	Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài	4
KN 3	Sử dụng những kiến thức, kỹ năng được học để tìm kiếm phương pháp, công cụ toán học phù hợp để giải quyết mô hình toán học	4
KN4	Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn (thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu, kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế)	1

Tương tự như HS 9, HS 12 đã đạt được mức cao nhất ở KN1, KN2, KN3 nhưng chỉ dừng lại ở bước tính bán kính đường tròn ngoại tiếp công viên hình tam giác mà không thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế. Vì vậy, chúng tôi đã đánh giá KN4 của HS 12 đạt mức 1 (mức thấp nhất).

Kết quả thống kê các mức năng lực mô hình hóa toán học của học sinh theo thang đánh giá chi tiết bài toán được tổng hợp trong Bảng 7.

**Bảng 7.** Bảng thống kê tỉ lệ các mức năng lực của KN1, KN2, KN3, KN4 theo thang đánh giá chi tiết bài toán

Kỹ năng thành phần	Các mức độ của biểu hiện			
	Mức 4	Mức 3	Mức 2	Mức 1
Đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu	0/84 (0 %)	19/84 (22,62 %)	0/84 (0 %)	65/84 (77,38 %)
Làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu của đề bài	18/84 (21,43 %)	1/84 (1,19 %)	0/84 (0 %)	65/84 (77,38 %)
Sử dụng những kiến thức, kỹ năng được học để tìm kiếm phương pháp, công cụ toán học phù hợp để giải quyết mô hình toán học	18/84 (21,43 %)	0/84 (0 %)	1/84 (1,19 %)	65/84 (77,38 %)
Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn (thông dịch kết quả toán học với tình huống thực tế ban đầu, kiểm tra và phản hồi lời giải thực tế)	0/19 (0 %)	0/19 (0 %)	10/19 (52,63 %)	9/19 (47,37 %)

Từ Bảng thống kê 7, chúng tôi chứng tỏ rằng kỹ năng đơn giản giả thiết, loại bỏ các yếu tố gây nhiễu, làm rõ mục tiêu, xác định được yêu cầu đề bài của học sinh còn rất thấp. Trong quá trình thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy, chỉ cần học sinh đơn giản được giả thiết, loại bỏ yếu tố gây nhiễu, làm rõ được mục tiêu, nghĩa là hoàn thành được bước đầu của quá trình mô hình hóa thì sẽ giải quyết được bài toán.

#### 4. Kết luận

Kết quả thực nghiệm cho thấy ưu điểm của thang hướng dẫn đánh giá chi tiết mà chúng tôi đã xây dựng là chỉ ra được các mức độ năng lực của từng kỹ năng thành phần và thang đánh giá chi tiết này cũng giúp người đánh giá có thể nhận ra học sinh đang yếu kém ở kỹ năng nào để có những biện pháp cụ thể giúp đỡ các em ngày càng tiến bộ. Ngoài ra, kỹ năng đơn giản được giả thiết, loại bỏ yếu tố gây nhiễu, làm rõ được mục tiêu là kỹ năng mấu chốt giúp học sinh có thể giải các bài toán mô hình hóa nói chung và gắn với chủ đề hệ thức lượng trong tam giác ở lớp 10 nói riêng. Tuy nhiên, thực nghiệm cho thấy kỹ năng này ở học sinh còn khá hạn chế. Vì vậy, để đạt được các yêu cầu cần đạt của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 về năng lực mô hình hóa toán học ở học sinh trung học phổ thông, việc chọn lựa, xây dựng và đưa vào dạy học các tình huống thực tế phù hợp, gắn liền với từng kỹ năng thành phần của năng lực mô hình hóa là thực sự cần thiết.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- Heidi Goodrich Andrade (2000). *Using Rubrics to Promote Thinking and Learning*. Association for Supervision and Curriculum Development, USA.
- Kaiser, G. (2007). *Modeling and modeling competencies in school*. Journal: Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics, 110-119.
- Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113-142.
- Ministry of Education and Training (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn toán [Mathematics general education curriculum]*. Hanoi.
- Natalie Pham (2010). “Rubrics”. Retrieved from <http://www.docstoc.com/docs/54132218/Rubrics--PowerPoint>.
- Nguyen, T. N. (2014). *Ban ve van de day hoc mo hinh hoa toan hoc o trung pho thong [Teaching of mathematical modeling in secondary education]*. *Journal of science of HNUE, Educational Sci.*, 59(8), 69-75.
- Nguyen, T. N. (2019). *Danh gia nang luc mo hinh hoa trong day hoc bai toan tim gia tri lon nhat, gia tri nho nhat cua ham so o lop 12 [Assessment of competence modeling in teaching the problem of finding the maximum and minimum values of the numerical function in grade 12]*. Master thesis, Ho Chi Minh City University of Education.
- Tran, K., & Nguyen, T. L. P. (2009). *Chi dao doi moi danh gia ket qua hoc tap cua hoc sinh [Supervision for innovation of student learning outcomes assessment]*. Hanoi.
- Tran, M. T. (2014). *Phuong phap day hoc bang mo hinh hoa trong day hoc mon Toan bac trung hoc pho thong [Teaching method of modeling in Math teaching in high school]*. Graduation thesis, Can Tho University.

---

**ASSESSMENT OF STUDENTS' MATHEMATICAL MODELING COMPETENCES:  
CASE OF THE TOPIC OF TRIGONOMETRIC SYSTEM IN GRADE 10**

*Nguyen Thi Nga<sup>1\*</sup>, Tran Ngoc Thanh Truc<sup>2</sup>*

*Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam*

*\*Corresponding author: Nguyen Thi Nga – Email: ngant@hcmue.edu.vn*

*Received: June 16, 2020; Revised: July 02, 2020; Accepted: February 20, 2022*

**ABSTRACT**

*The paper presents some fundamental concepts as the basis for building an assessment criteria scale of mathematical modeling competences, such as mathematical modeling competences, component skills of modeling competences, a rubric in testing – assessment, and modeling perspectives in the teaching of the trigonometric system in the current textbook “Geometry 10.” At the same time, the paper also proposed a criteria scale to assess the modeling competences in the topic of the trigonometric system and then the application of this scale for one specific problem. Finally, the survey results on teachers and experiments on students show the feasibility and effectiveness of the built assessment criteria scales.*

**Keywords:** assessment criteria scale; mathematical modeling competences; trigonometric system in a triangle