TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 19, Số 9 (2022): 1518-1530

Vol. 19, No. 9 (2022): 1518-1530

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.9.3484(2022)

Bài báo nghiên cứu

BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH BÌNH LƯU – KHUẾCH TÁN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO THỜI GIAN

***Lê Minh Triết*[1*], *Lưu Hồng Phong*[1], *Phạm Nguyễn Hoàng Long*[2],**

[1]*Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam*

[2]*Trường Trung học Cơ sở Bình Tây, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Lê Minh Triết – Email: lmtriet@sgu.edu.vn*

Ngày nhận bài: 13-6-2022; ngày nhận bài sửa: 21-7-2022; ngày duyệt đăng: 25-9-2022

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán Cauchy của phương trình bình lưu – khuếch tán bậc phân theo biến thời gian với $0 < \alpha \leq 1$ *dưới dạng đạo hàm bậc không nguyên Caputo. Như đã biết, bài toán nêu trên là đặt không chỉnh theo nghĩa Hadamard. Chi tiết hơn, các phần tử có tần số cao trong "nhân" gây ra tính không chỉnh của bài toán được đưa ra trong (Liu et al., 2019), vì thế chúng tôi xây dựng phương pháp chỉnh hóa bằng cách áp dụng phương pháp tựa giá trị biên để chỉnh hóa "nhân" này, trong đó "nhân" chỉnh hóa cần thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Sau đó, chúng tôi đưa ra một cách chọn tham số chỉnh hóa phù hợp và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác. Đây là phương pháp nghiên cứu mới, áp dụng cho một bài toán có rất ít các tác giả đã nghiên cứu và dựa trên nền tảng những kết quả liên quan đã có trước đó, do đó mang tính ứng dụng cao trong các lĩnh vực khoa học và công nghệ (Benson et al., 2000; Berkowitz et al., 2006; Cetinkaya, & Kiymaz, 2013). Bên cạnh đó, kết quả của bài báo này đóng góp vào việc nghiên cứu sự chỉnh hóa các dạng bài toán đặt không chỉnh, có tiềm năng phát triển để tiến đến nghiên cứu các bài toán phức tạp hơn.*

Từ khóa: bài toán Cauchy; đạo hàm bậc không nguyên Caputo; tốc độ hội tụ; chỉnh hóa; phương pháp tựa giá trị biên; phi tuyến, phương trình bình lưu – khuếch tán phi tuyến theo thời gian, tham số chỉnh hóa

1. Giới thiệu

Trong vài thập kỉ qua, phương trình đạo hàm riêng được sử dụng để mô hình hóa một số lớp bài toán trong các lĩnh vực như toán tài chính (Benson et al., 2013, pp.479-497; Deng et al., 2006), vật lí (Francesco, 2010; Garra et al., 2014, pp.424-439), lí thuyết điều khiển [9] (Podlubny, 1999), thủy văn học (Diethelm, 2010), vật liệu đàn hồi nhớt (Liu et al., 2003, p.233-245; Meerschaert, 2004, pp.65-77), nghiên cứu về sự hỗn loạn của dòng chảy, hay tia plasma (Tate & Dinde, 2015, p.8-11; Hilfer, 2000). Phương trình đạo hàm riêng có chứa đạo

Cite this article as: Le Minh Triet, Luu Hong Phong, & Pham Nguyen Hoang Long (2022). A Cauchy problem for a time-fractional nonlinear advection-dispersion equation. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *19*(9), 1518-1530.

hàm bậc không nguyên được dùng để mô hình hóa một số hiện tượng có tính phi địa phương, cũng như trong bộ môn cơ học vật chất rắn, phương trình này thể hiện tính ghi nhớ và di truyền của các chất khác nhau. Ngoài ra, phương trình đạo hàm riêng bậc không nguyên còn được ứng dụng rộng rãi trong vật lí như mô tả quy trình động lực trong các cấu trúc tự đồng dạng và có lỗ hổng; trong hóa học, phương trình này mô tả cho sự ăn mòn điện hóa; trong quang học và lưu biến học. Việc nghiên cứu các dạng phương trình đã đề cập ở trên đóng góp to lớn vào lĩnh vực giải tích phi tuyến, giúp mô hình hóa được các hiện tượng vật lí phức tạp. Phương trình bình lưu – khuếch tán bậc không nguyên với nguồn tác động phi tuyến được xây dựng bằng cách thay thế đạo hàm bậc nguyên theo thời gian trong phương trình khuếch tán bằng khái niệm đạo hàm bậc không nguyên α với $0<\alpha\le 1$. Khác với phương trình khuếch tán cơ bản, phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian có thể mô tả bộ nhớ và thuộc tính di truyền của các chất khác nhau và dự đoán sự hội tụ theo thời gian và khoảng cách trong môi trường kín, với độ dày đặc α- ổn định cho trước như trong bài báo (Benson et al., 2013). Deng và cộng sự (2006) đã giải nghiệm bằng phương pháp số của phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên. Tate và Dinde, (2015, pp.8-11) áp dụng công thức biến đổi tích phân để giải phương trình khuếch tán không thuần nhất có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian, đồng thời trình bày ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của công thức đã nói ở trên. Nhóm tác giả Çetinkaya và cộng sự (2013) đã thu được nghiệm của phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian với phương pháp biến đổi tích phân suy rộng. Kết quả trong (Çetinkaya et al., 2013) là một trong những nghiên cứu đầu tiên của bài toán này trong trường hợp có nguồn tác động và những điều kiện ban đầu được cho trước. Việc xem xét bài toán thuận cho phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian đã được nghiên cứu bởi rất nhiều tác giả, nhưng chủ yếu là trong trường hợp thuần nhất (Nigmatulin, 1986, pp.425-430; Samko et al., 1987; Wang et al., 2011, pp.810-816; Deng et al., 2004, pp.422-431) song, các bài báo nghiên cứu về trường hợp hàm nguồn không thuần nhất là rất hiếm.

Từ những phân tích trên, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình bình lưu – khuếch tán trong trường hợp không thuần nhất như sau

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}u(x,t)+bu_x(x,t)-au_{xx}(x,t)=S\left(x,t\right), & x\in(0,1), t>0, \\ u(0,t)=g(t), & t>0, \\ u_x(0,t)=f(t), & t>0, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó, u là hàm mật độ chất tan, x là một biến không gian, t là biến thời gian, a là hằng số phân tán, b là vận tốc trung bình của chất lỏng và hàm S là hàm nguồn. Đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian ${}_0D_t^{\alpha}$ là đạo hàm Caputo bậc α $(0<\alpha\le 1)$ được định nghĩa trong (Huang et al., 2005, pp.317-330).

$$
{}_0D_t^{\alpha}u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial u(x,s)}{\partial s} \dfrac{ds}{(t-s)^{\alpha}}, & 0<\alpha<1, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}
$$

Trong trường hợp hàm nguồn $S(x,t) := 0,$ bài toán (1) trở thành bài toán ngược cho phương trình bình lưu – khuếch tán bậc không nguyên thuần nhất theo thời gian đã được nghiên cứu bởi nhóm tác giả Liu và Feng (2019). Ngoài ra, nếu $\alpha = 1,$ bài toán (1) trở thành bài toán bình lưu – khuếch tán bậc nguyên được nghiên cứu trong (Ahmed et al., 2008). Bên cạnh đó, việc áp dụng đạo hàm Caputo cũng mang nhiều ý nghĩa ứng dụng trong các lĩnh vực vật lí, cụ thể là từ thủy động lực học trong (Ali et al., 2016), lí thuyết điều khiển trong (Goufo, 2018). Theo hiểu biết của chúng tôi, bài toán (1) là hơn các công trình trước đó vì được xem xét trong trường hợp chứa đạo hàm bậc không nguyên và đặc biệt hơn là với nguồn không thuần nhất. Bài toán (1) là mô hình được xây dựng dựa trên định luật bảo toàn khối lượng và định luật khuếch tán của Fick. Trong môi trường và vật chất có nhiều lỗ hổng, vận tốc của dòng chảy thỏa mãn định luật Darcy. Nhận thấy tính không chỉnh của bài toán (1), chúng tôi xây dựng -công thức nghiệm chỉnh hóa bằng cách áp dụng phương pháp chỉnh hóa tựa giá trị biên. Cuối cùng, chúng tôi đề xuất một luật chọn tham số chỉnh hóa để đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa.

Phần chính của bài báo này bao gồm bốn phần. Trong đó, Phần 1 nhằm giới thiệu bài toán, lịch sử nghiên cứu và những điểm mới. Phần 2 là nội dung chính của nghiên cứu bao gồm những định lí, mệnh đề và bổ đề cơ bản cần thiết cho bài báo. Tiếp đến, chúng tôi đưa ra một nghiệm chỉnh hóa nhằm thu được tốc độ hội tụ dưới dạng Hölder. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một kết luận và hướng nghiên cứu có thể phát triển trong tương lai ở Phần 3.

2. Nội dung

2.1. Các định lí và bổ đề cơ bản

Trong Phần 2.1, chúng tôi phát biểu các kiến thức cơ bản liên quan đến không gian hàm được sử dụng và định nghĩa phép biến đổi Fourier nhằm bổ trợ cho việc chứng minh các kết quả chính ở Phần 2.2.

Định nghĩa 2.1.1. Ta định nghĩa

$$
L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ đo được Lebesgue và } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt < \infty \right\}
$$

với chuẩn

$$
\|f\| := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Định nghĩa 2.1.2. Ta có định nghĩa biến đổi Fourier $\widehat{f}$ của hàm $f \in L^2(\mathbb{R})$ như sau

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt,$$

với ξ thuộc $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.1.3. *Với $p > 0$, không gian Sobolev $H^p(R)$ được định nghĩa*

$$H^p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^p \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty \right\},$$

với chuẩn

$$\| f \|_{H^p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^p \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sau đây chúng tôi trình bày các bước tìm nghiệm chính xác của bài toán (1). Áp dụng biến đổi Fourier theo t cho hai vế của bài toán (1), ta thu được hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} (i\xi)^\alpha \hat{u}(x,\xi) + b\hat{u}_x(x,\xi) - a\hat{u}_{xx}(x,\xi) = \hat{S}(x,\xi), \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{g}(\xi), \\ \hat{u}_x(0,\xi) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \tag{2}$$

Giải bài toán (2), ta thu được nghiệm như sau

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,\xi) \;=\; & e^{\frac{b}{2a}x} \left[2a\hat{f}(\xi) \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} + b\hat{g}(\xi) \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} - \hat{g}(\xi)\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right) \right] \\ & + \int_0^x \frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}} e^{\frac{b}{2a}(x-y)} \hat{S}(y,\xi) \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right) dy, \end{aligned}$$

trong đó,

$$\Delta(\xi) = b^2 + 4a(i\xi)^\alpha, \tag{3}$$

$$(i\xi)^\alpha = |\xi|^\alpha \left[\cos\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right) + i\,sign(\xi)\sin\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right) \right]. \tag{4}$$

Từ đó, suy ra được nghiệm chính xác của bài toán (1) như sau

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; & \int_{\mathbb{R}} \Bigg\{ e^{\frac{b}{2a}x} \left[2a\hat{f}(\xi) \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} + b\hat{g}(\xi) \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} - \hat{g}(\xi)\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right) \right] \\ & + \int_0^x \frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}} e^{\frac{b}{2a}(x-y)} \hat{S}(y,\xi) \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right) dy \Bigg\} \exp(i\xi t)\, d\xi. \end{aligned}$$

Ta thấy

$$\left|\sqrt{\Delta(\xi)}\right| = \sqrt{\left|\Delta(\xi)\right|} = \left(b^4 + 16a^2|\xi|^{2\alpha} + 8ab^2|\xi|^{\alpha}\cos(\alpha\pi/2)\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (5)$$

Suy ra

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\left|\sqrt{\Delta(\xi)}\right| = \infty,$$

vì thế các nhân tử $\left|\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right|$ và $\left|\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right|$ tiến nhanh về ∞ với $0 \le x \le 1$ khi $|\xi|$ tiến về ∞. Do đó, những sai số nhỏ trong thành phần có tần số cao có thể tăng nhanh và gây ra sai lệch trong nghiệm của bài toán tại $0 \le x \le 1.$ Ý tưởng ban đầu để chỉnh hóa bài toán này là thay thế các nhân tử trên bằng các "nhân" xấp xỉ. Do đó, nghiệm chỉnh hóa u_β^ε ứng với dữ liệu đo $(f^\varepsilon, g^\varepsilon) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ được chúng tôi xây dựng như sau

$$\begin{aligned} u_\beta^\varepsilon(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ e^{\frac{b}{2a}x}\left[2a\widehat{f^\varepsilon}(\xi)\frac{\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} + b\widehat{g^\varepsilon}(\xi)\frac{\cosh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} - \widehat{g^\varepsilon}(\xi)\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x \frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}} e^{\frac{b}{2a}(x-y)}\hat{S}(y,\xi)\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right)dy \right\}\exp(i\xi t)\,d\xi, \end{aligned} \qquad (6)$$

trong đó

$$\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right) := \frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2\left(1+\beta(\varepsilon)e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\right)} - \frac{e^{\frac{-\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2}, \qquad (7)$$

$$\cosh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right) := \frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2\left(1+\beta(\varepsilon)e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\right)} + \frac{e^{\frac{-\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2}, \qquad (8)$$

$$\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right) := \frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)}}{2\left(1+\beta(\varepsilon)e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\right)} - \frac{e^{\frac{-\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)}}{2}, \qquad (9)$$

và tham số chỉnh hóa $\beta(\varepsilon) := \beta$ được chọn sao cho $\lim_{\varepsilon\to 0}\beta = 0.$

2.2. *Ước lượng sai số*

Đầu tiên, chúng tôi xét đến các điều kiện sau

(H1): Với $\varepsilon > 0,$ chúng tôi xét dữ liệu đo $(f^{\varepsilon}, g^{\varepsilon}) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left\| f^{\varepsilon} - f \right\| + \left\| g^{\varepsilon} - g \right\| \le \varepsilon.$

(H2): Tồn tại một số dương A sao cho

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left| \frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a} \right|^2} \left[\left| \hat{u}(x,\xi) \right|^2 + \left| \tfrac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x,\xi) \right|^2 \right] d\xi \le A.$$

(H3): Tồn tại một số dương B sao cho

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left| \frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(1+\gamma) \right|^2} \left[\left| \hat{u}(x,\xi) \right|^2 + \left| \tfrac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x,\xi) \right|^2 \right] d\xi \le B,$$

với $\gamma > 0.$

(H4): Tồn tại một số dương B_p sao cho

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^p e^{\left| \frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(1+\gamma) \right|^2} \left[\left| \hat{u}(x,\xi) \right|^2 + \left| \tfrac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x,\xi) \right|^2 \right] d\xi \le B_p,$$

với $p > 0$ và $\gamma > 0.$

Tiếp theo, chúng tôi có Bổ đề 3.1 chứng minh các bất đẳng thức sử dụng trong bài báo.

Bổ đề 2.2.1. *Xét $\xi \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le x \le 1,\ \Delta(\xi)$ được cho bởi (3), b là vận tốc trung bình của chất lỏng trong bài toán (1) và sai số $\varepsilon > 0,$ ta có các bất đẳng thức sau*

i) $\left| \sqrt{\Delta(\xi)} \right| \ge b,$

ii) $\left| \cosh_{\beta}^{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a} x \right) \right| \le \beta^{-x},$

iii) $\left| \sinh_{\beta}^{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a} x \right) \right| \le \beta^{-x},$

iv) $\left| \sinh_{\beta}^{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a} (x-y) \right) \right| \le \beta^{-x+y}.$

Chứng minh.

i) Để chứng minh i), ta xét $0 \le \alpha \le 1$ nên $\cos \dfrac{\alpha\pi}{2} \ge 0.$

Suy ra, $b^4 + 16a^2 |\xi|^{2\alpha} + 8a^2 b |\xi|^{\alpha} \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2} \right) \ge b^4.$

Do đó,

$$\left[b^4 + 16a^2 |\xi|^{2\alpha} + 8a^2 b |\xi|^{\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \ge \left(b^4\right)^{\frac{1}{4}} = b.$$

Ta hoàn thành chứng minh-i).

ii) Để chứng minh ii), ta xét bất đẳng thức

$$\sup_{\eta\geq 0}\frac{\exp(\eta x)}{1+\beta\exp(\eta)}\leq \beta^{-x}. \tag{10}$$

Kết hợp (8) và (10), ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\cosh_{\beta}^{\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\frac{\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{1+\beta\left|\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right)\right|}\right|+\frac{1}{2}\left|\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right| \\
&=\frac{1}{2}\frac{\exp\left(\Re\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right)x\right)}{1+\beta\exp\left(\Re\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right)x\right)}+\frac{1}{2}\exp\left(-\Re\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\beta^{-x}+\frac{1}{2}\beta^{-x}=\beta^{-x}.
\end{aligned}$$

trong đó, $\Re(z)$ là phần thực của z, với mọi $z\in\mathbb{C}$.

Chứng minh tương tự ta thu được kết quả của iii) và iv). ■

Tiếp theo, chúng tôi đánh giá sai số thu được giữa nghiệm chính xác u và nghiệm chỉnh hóa u_{β}^{ε} trong không gian $L^2(\mathbb{R})$ được đưa ra trong định lí sau.

Định lí 2.2.2. *Với* $\varepsilon>0$, *xét dữ liệu chính xác* (f,g) *và dữ liệu đo* $(f^{\varepsilon},g^{\varepsilon})$ *thỏa mãn điều kiện (H*$_1$*) ta có các phát biểu sau.*

1. *Nếu nghiệm chính xác u thỏa mãn điều kiện (H*$_3$*), ta có ước lượng*

$$\left\|u_{\beta}^{\varepsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|\leq K\beta^{(-x)}\varepsilon+\beta^{(1-x)}L_1, \tag{11}$$

trong đó, $K=\sqrt{8\left(2\frac{a^2}{b^2}+1\right)e^{\frac{b}{2a}}}$ *và* $L_1=2\sqrt{A\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}.$

2. *Nếu nghiệm chính xác u thỏa mãn điều kiện (H*$_4$*), ta có ước lượng*

$$\left\|u_{\beta}^{\varepsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|\leq K\beta^{(-x)}\varepsilon+\beta^{1+\gamma-x}L_2, \tag{12}$$

với $\gamma>0$, *và* $L_2=2\sqrt{B\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}e^{4\frac{a^2}{b^2}e^{\frac{b}{a}}H_S^2}.$

Chứng minh. Ta xét hàm $\tilde{u}_{\beta}^{\varepsilon}$ với biến đổi Fourier được cho như sau

$$\widehat{u_\beta^\varepsilon}(x,\xi) = e^{\frac{b}{2a}x}\left[2a\hat{f}(\xi)\frac{\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} + b\hat{g}(\xi)\frac{\cosh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}} - \hat{g}(\xi)\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right]$$

$$+\int_0^x \frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}} e^{\frac{b}{2a}(x-y)} \hat{S}(y,\xi)\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right)dy. \tag{13}$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác như sau

$$\left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\| \le \left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)\right\| + \left\|\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|. \tag{14}$$

Ta chia chứng minh này ra làm ba bước như sau.

Bước 1. Ước lượng sai số của nghiệm chỉnh hóa $\left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)\right\|$.

Áp dụng đẳng thức Parseval, ta có

$$\left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-\widetilde{u_\beta^\varepsilon}(x,\cdot)\right\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left|2ae^{\frac{b}{2a}x}\frac{\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\left(\widehat{f^\varepsilon}(\xi)-\hat{f}(\xi)\right) + be^{\frac{b}{2a}x}\frac{\cosh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\left(\widehat{g^\varepsilon}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right)\right.$$

$$\left. - e^{\frac{b}{2a}x}\left(\widehat{g^\varepsilon}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right)\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)d\xi\right.$$

$$\le 4e^{\frac{b}{a}}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f^\varepsilon}(\xi)-\hat{f}(\xi)\right|^2\left|\frac{\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right|^2 d\xi + 4e^{\frac{b}{a}}b^2\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{g^\varepsilon}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right|^2\left|\frac{\cosh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right|^2 d\xi$$

$$+ 4e^{\frac{b}{a}}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{g^\varepsilon}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right|^2\left|\sinh_\beta^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)\right|^2 d\xi$$

$$\le 4\tfrac{a^2}{b^2}e^{\frac{b}{a}}\beta^{-2x}\left\|f^\varepsilon-f\right\|^2 + 4e^{\frac{b}{a}}\beta^{-2x}\left\|g^\varepsilon-g\right\|^2.$$

Nghĩa là,

$$\left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)\right\| \le K\beta^{-x}\varepsilon,$$

trong đó, $K = \sqrt{8\left(2\frac{a^2}{b^2}+1\right)}e^{\frac{b}{2a}}$. (15)

Bước 2. Ước lượng sai số tựa giá trị biên (MQBV) $\left\|\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|$.

Từ (6), ta suy ra

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)=\frac{b}{2a}\hat{u}(x,\xi)+e^{\frac{b}{2a}x}\Bigg[\hat{f}(\xi)\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)+\frac{b}{2a}\hat{g}(\xi)\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)$$
$$-\hat{g}(\xi)\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right)+\int_0^x\hat{S}(y,\xi)e^{-\frac{b}{2a}y}\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)\right)dy\Bigg]. \qquad (16)$$

Thực hiện phép chia đẳng thức (16) với $\dfrac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}$ và cộng kết quả thu được với (6), ta được

$$\left(1-\frac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right)\hat{u}(x,\xi)+\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)$$
$$=e^{\frac{b}{2a}x}\left[\hat{f}(\xi)\frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}+b\hat{g}(\xi)\frac{e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{\sqrt{\Delta(\xi)}}-\hat{g}(\xi)e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}+\int_0^x\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\hat{S}(y,\xi)e^{-\frac{b}{2a}y}e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)}dy\right].$$

Mặt khác, kết hợp (6) và (13) ta có

$$\widehat{u_\beta^\varepsilon}(x,\xi)-\hat{u}(x,\xi)$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}e^{\frac{b}{2a}x}\hat{f}(\xi)\frac{-\beta e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2\left(1+\beta e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right)}+\frac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}e^{\frac{b}{2a}x}\hat{g}(\xi)\frac{-\beta e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2\left(1+\beta e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right)}-e^{\frac{b}{2a}x}\hat{g}(\xi)\frac{-\beta e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x}}{2\left(1+\beta e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right)}$$
$$+\int_0^x\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}e^{\frac{b}{2a}(x-y)}\frac{-\beta e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(x-y)}}{2\left(1+\beta e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right)}\hat{S}(u)(y,\xi)dy$$
$$=\frac{-\beta\left|e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right|}{2\left(1+\beta\left|e^{\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}}\right|\right)}\left[\left(1-\frac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right)\hat{u}(x,\xi)+\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)\right].$$

Từ đó, ta thu được ước lượng sau

$$\left|\widehat{u_\beta^\varepsilon}(x,\xi)-\hat{u}(x,\xi)\right|^2$$
$$\le\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}x\right|}}{1+\beta e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}}\right)^2\left|e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\left(\left(1-\frac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right)\hat{u}(x,\xi)+\frac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)\right)\right|^2.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.1, ta được

$$\left\|\widetilde{u_\beta^\varepsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|^2$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \beta^{2-2x}\left|\left(1-\tfrac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right)e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi+\int_{\mathbb{R}}\beta^{2-2x}\left|\tfrac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\le 2\beta^{2-2x}\left(1+\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\tfrac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right|^2\right)\int_{\mathbb{R}}\left|e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi+\beta^{2-2x}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\tfrac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right|^2\int_{\mathbb{R}}\left|e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}\right|}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\le 4\beta^{2-2x}A+4\beta^{2-2x}\tfrac{a^2}{b^2}A.$$

Nghĩa là

$$\left\|\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|\le\beta^{1-x}L_1, \qquad (17)$$

với $L_1=2\sqrt{A\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}$.

Bước 3. Ước lượng sai số $\left\|u^{\varepsilon,\beta}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|$.

Kết hợp (14), (15) và (17), ta thu được

$$\left\|u_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|\le K\beta^{-x}\varepsilon+\beta^{1-x}L_1. \qquad (18)$$

Mặt khác, trong **Bước 2**, nếu nghiệm chính xác u thỏa mãn điều kiện *(H4)*, ta được

$$\left\|\widetilde{u_\beta^\varepsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|^2$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \beta^{2+2\gamma-2x}\left|\left(1-\tfrac{b}{\sqrt{\Delta(\xi)}}\right)e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(1+\gamma)\right|}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi+\int_{\mathbb{R}}\beta^{2+2\gamma-2x}\left|\tfrac{2a}{\sqrt{\Delta(\xi)}}e^{\left|\frac{\sqrt{\Delta(\xi)}}{2a}(1+\gamma)\right|}\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}(x,\xi)\right|^2 d\xi.$$

Do đó, ta suy ra

$$\left\|\tilde{u}_\beta^\varepsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\right\|\le\beta^{1+\gamma-x}L_2,$$

với $L_2=2\sqrt{B\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}$.

Kết thúc chứng minh. ■

Chú ý 2.2.1. *Phần chứng minh Định lí 3.1 cho thấy tốc độ hội tụ của một nghiệm chỉnh hóa dựa vào sai số MQBV* $\left\|\tilde{u}_1^{\varepsilon,\beta}(x,\cdot)-u_1(x,\cdot)\right\|$. *Mặt khác, ước lượng sai số dạng Hölder đúng cho mọi* $x\in[0,1]$, *nhưng tại* $x=1$, *ước lượng (11) cho ta thấy sai số bị chặn bởi* L_1, *nghĩa là sự hội tụ của nghiệm chỉnh hóa tại* $x=1$, *chưa được chứng minh. Vì vậy, chúng tôi cần* *một điều kiện mạnh hơn (H₃) để thay thế điều kiện (H₂) qua đó đánh giá tốc độ hội tụ tại* $x=1$. *Cụ thể, ta thu được*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(1,\cdot) - u(1,\cdot) \right\| \le K\beta^{-1}\varepsilon + \beta^\gamma L_2.$$

Ngoài ra, chúng tôi đưa ra quy tắc chọn β *thỏa mãn (18). Ta có thể chọn*

$$\beta = \varepsilon^k, 0 < k \le 1,$$

hoặc

$$\beta = \varepsilon^k \left(\frac{a_0}{\ln\left(\frac{a_1}{\varepsilon}\right)} \right)^b, 0 < k \le 1, b \ge 0, a_0 \ge 0, a_1 > 0.$$

Chú ý 2.2.2. *Nếu ta thay điều kiện (H₃) bằng (H₄) với* $p > 0$, *ta thu được ước lượng sai số* $\left\| u^{\varepsilon,\beta}(x,\cdot) - u(x,\cdot) \right\|_{H^p(\mathbb{R})}$ *trong không gian* $H^p(\mathbb{R})$ *như sau*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(x,\cdot) - u(x,\cdot) \right\|_{H^p(\mathbb{R})} \le K\beta^{-x}\varepsilon + \beta^{1+\gamma-x} B_p.$$

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã nghiên cứu về một bài toán Cauchy cho phương trình bình lưu – khuếch tán bậc không nguyên với nguồn tác động S. Cụ thể, chúng tôi áp dụng phương pháp chỉnh hóa tựa giá trị biên để giải quyết tính không chỉnh của bài toán nhằm đưa ra nghiệm xấp xỉ ổn định cho bài toán. Bên cạnh đó, tốc độ hội tụ của ước lượng sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác cũng được đưa ra với điều kiện tiên nghiệm của nghiệm chính xác. Trong tương lai, chúng tôi dự kiến tiếp tục nghiên cứu về Phương trình bình lưu – khuếch tán bậc không nguyên với nguồn tác động phi tuyến trong trường hợp tổng quát hơn, ví dụ như khi S là hàm Lipschitz địa phương phi tuyến.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmed, E., & Elgazzar, Ahmed, & Shehata, Mohamed Ibrahim (2008). On Differences between Fractional and Integer Order Differential Equations for Dynamical Games. *Zeitschrift für Naturforschung A., 63,* 152-154. 10.1515/zna-2008-3-406

Ali, F., Gohar, M., & Khan, I. (2016). MHD Flow of Water-Based Brinkman Type Nanofluid over a Vertical Plate Embedded in a Porous Medium with Variable Surface Velocity, Temperature and Concentration. *Journal of Molecular Liquids, 223,* 412-419. https://doi.org/10.1016/j.molliq.2016.08.068

Benson, D. A., Wheatcraft, S. W., & Meerschaert, M. M. (2000). Application of a fractional advection-dispersion equation. *Water resources research*, *36*(6), 1403-1412.

Berkowitz, B, Cortis, A, Dentz, M., & Scher, H. (2006). Modelling non-Fickian transport in geological formations as a continuous time random walk. *Rev Geophys*, 44, RG2003.

Çetinkaya, A., & Kıymaz, O. (2013). The solution of the time-fractional diffusion equation by the generalized differential transform method. *Math. Comput*. Model., Elsevier.

Benson, D. A., Meerschaert, M. M., & Revielle, J. (2013). Fractional calculus in hydrologic modeling: A numerical perspective. *Adv. in Water Resour*, *51*, 479-497.

Deng, Z. Q., & Singh, V. P. (2006). A fractional dispersion model for overland solute transport. *Water Resour. Res*., *42*, W03416.

Doungmo Goufo, & Emile Franc (2018). An application of the Caputo-Fabrizio operator to replicator-mutator dynamics: Bifurcation, chaotic limit cycles and control. *European Physical Journal Plus*, *133*(2), 1-13. doi:101140/epjp/i2018-11933-0

Francesco Mainardi (2010). *Fractional calculus and wave in linear viscoelasticity*. Imperial College Press, London.

Garra R, Giusti A, Mainardi F, & Pagnini G. (2014). Fractional relaxation with time-varying coefficient. *Fractional Calc Appl Anal., 172*, 424-439.

Huang, F., & Liu, F. (2005). The time fractional diffusion equation and the advection–dispersion equation. *ANZIAM J., 46,* 317-330.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations.* Academic Press, London.

Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equationst*. Springer, Berlin.

Liu, F., Anh, V. V., Turner, I., & Zhuang, P. (2003). *Time fractional advection–dispersion equation*, *J. Appl. Math. Comput.*, 13, 233-245.

Liu, S., & Feng, L. (2019). Filter regularization method for a time-fractional inverse advection–dispersion problem. *Adv Differ Equ*, 2019, 222. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2155-8

Meerschaert, M. M., & Tadjeran, C. (2004). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *J. Comput. Appl. Math., 172*, 65-77.

Tate, Mr. S., & Dinde R. Dr. H. T. (2015). *Approximate solution of time fractional advection-dispersion equation*. Intl. *Journal of Latest Research in Science and Technology*. *4*(6), 8-11.

Hilfer, R. (2000). *Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore.

Lukasz, P. (2015). Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications, *Commun. in Nonl. Sci. and Numerical Sim*., *24*, 169183.

Nigmatulin, R. (1986). The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. *Phys. Stat. Sol. B*, *133*, 425-430.

Samko, S.G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*. Gordon and Breach Science, Naukai Tekhnika, Minsk.

Wang, K., & Wang, H., (2011). *A fast characteristic finite difference method for fractional advection-diffusion equations*. *Adv. Water Resour*, *34*, 810-816.

A CAUCHY PROBLEM FOR A TIME-FRACTIONAL NONLINEAR ADVECTION-DISPERSION EQUATION

Le Minh Triet*[1*]*, Luu Hong Phong*[1]*, Pham Nguyen Hoang Long*[2]*,

Saigon University, Vietnam

Binh Tay Secondary School Ho Chi Minh City, Vietnam

[*]Corresponding author: Le Minh Triet – Email: lmtriet@sgu.edu.vn

Received: June 13, 2022; Revised: July 21, 2022; Accepted: September 25, 2022

ABSTRACT

In this paper, we propose a nonlinear case of the time fractional advection-dispersion equation in which the time-derivative with variable $0 < \alpha \leq 1$*, is taken in the sense of Caputo. The problem is not well-posed in the sense of Hadamard. Therefore, we constructed a filter regularization method by applying the modified quasi-boundary value method based on the modified "kernel" idea presented by Liu et al. (2019). Accordingly, we gave a rule for choosing the regularization parameter to obtain the convergence rate of the regularized solution. The above regularization method is a new technique applied to a problem that few authors have studied on previous related results. Therefore, the results of this paper are highly applicable in the fields of science and technology (Benson et al., 2000; Berkowitz et al., 2006; Cetinkaya & Kiymaz, 2013). Additionally, the result presented in this paper will contribute to the study of regularizing the ill-posed problems and more complicated ones.*

Keywords: Cauchy problem; Caputo derivative; convergence rate; filter regularization; modified quasi-boundary value method; nonlinear, time fractional advection-dispersion equation; regularization parameter