TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 19, Số 8 (2022): 1362-1370

Vol. 19, No. 8 (2022): 1362-1370

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3512(2022)

Bài báo nghiên cứu

KHÔNG GIAN BESOV-MORREY LIÊN KẾT VỚI TOÁN TỬ TỰ LIÊN HỢP KHÔNG ÂM

Lê Thị Hằng[1*], Phạm Thị Hoài Nhi[2], Nguyễn Bình Di[3]

[1]Trường THPT Gia Định, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[2]Trường Đại học Sài Gòn, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[3]Trường THPT Nguyễn Hiền, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[*]Tác giả liên hệ: Lê Thị Hằng – Email: hanglethi905@gmail.com

Ngày nhận bài: 04-7-2022; ngày nhận bài sửa: 07-8-2022; ngày duyệt đăng: 17-8-2022

TÓM TẮT

Không gian Besov đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết không gian hàm và phương trình đạo hàm riêng. Hai hướng phát triển gần đây của hướng nghiên cứu này là liên kết không gian Besov với không gian Morrey hoặc toán tử tự liên hợp không âm. Kết quả trong bài báo này sẽ tổng quát cả hai hướng tiếp cận trên. Chúng tôi chứng minh kết quả chính quy cho phương trình dạng fractional $L^s u = f$

Để làm được điều đó, chúng tôi thiết lập đặc trưng liên tục cho không gian Besov-Morrey $BM^{\alpha,L}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ *liên kết với một toán tử tự liên hợp không âm L trên* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *sao cho nhân nhiệt của L thỏa mãn điều kiện bị chặn trên Gaussian, trong đó* $0 < p, q \le \infty, p \le r < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$*. Kết quả của chúng tôi tổng quát các kết quả đã có của (Bui et al., 2020; Dao et al., 2018).*

Từ khóa: không gian Besov-Morrey; đặc trưng liên tục; điều kiện bị chặn trên Gaussian; tính chính quy

1. Giới thiệu

Lí thuyết không gian Besov trên $\mathbb{R}^n$ có một lịch sử lâu dài, đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết không gian hàm, giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng. Không gian Besov cổ điển có thể xem là không gian liên kết với toán tử Laplace hoặc căn bậc hai của nó trên $\mathbb{R}^n$. Tuy nhiên, lớp không gian Besov cổ điển không phải lúc nào cũng phù hợp cho việc nghiên cứu tích phân kì dị. Để khắc phục nhược điểm đó, bằng cách thay toán tử Laplace bằng một toán tử vi phân nào đó, lí thuyết không gian Besov liên kết với toán tử đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Theo hướng này, nhóm nghiên cứu của Bùi vào năm 2020 (Bui et al., 2020) đã thiết lập lí thuyết không gian Besov liên kết với toán tử tự

Cite this article as: Le Thi Hang, Pham Thi Hoai Nhi, & Nguyen Binh Di (2022). Besov-Morrey spaces associated with non-negative self-adjoint operators. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(8), 1362-1370.

liên hợp không âm. Đây là kết quả tổng quát nhất cho đến lúc này vì các tác giả chỉ giả sử tính bị chặn trên Gaussian mà không cần tính liên tục Holder của nhân nhiệt cũng như tính chất Markov như (Georgiadis et al., 2017)

Một hướng nghiên cứu tiếp theo cũng rất được quan tâm: nhiều tác giả xem xét không gian loại Besov-Morrey $BM^{\alpha,-\Delta}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ tổng quát hóa không gian Besov cổ điển bằng cách thay thế chuẩn L^p bởi chuẩn Morrey. Không gian này được nghiên cứu lần đầu tiên bởi tác giả (Kozono et al, 1994). Nhu cầu nghiên cứu lớp không gian này nảy sinh từ việc nghiên cứu phương trình NavierStoke và áp dụng (xem Baraka, 2017; Lin (2013); Mazzucato, 2003). Không gian Besov-Morrey không chỉ kế thừa nhiều tính chất của không gian Besov mà còn diễn tả sâu sắc hơn về tính chất dao động địa phương và tính kì dị của hàm số (xem Mazzucato, 2003). Gần đây, tác giả (Dao et al, 2018) đã xây dựng phân tích phân tử cho không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử Hermite $H=-\Delta+|x|^2$ và từ đó thu được tính chính quy cho phương trình fractional $H^s u=f$.

Tiếp nối hai kết quả trên, chúng tôi xét toán tử tự liên hợp không âm L trên $L^2(\mathbb{R}^n)$. Kí hiệu $\left(e^{-tL}\right)_{t>0}$, và $k_t(x,y)$ lần lượt là nửa nhóm và nhân nhiệt liên kết với toán tử L. Từ đây về sau, chúng tôi luôn giả sử toán tử L thỏa mãn điều kiện chặn trên Gaussian (GUB) như sau: tồn tại các hằng số C và c sao cho với mọi $x,y\in\mathbb{R}^n$ và $t>0$,

$$\left|k_t(x,y)\right|\le\frac{C}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right).$$

Chú ý rằng toán tử L của chúng tôi là trường hợp tổng quát của toán tử Schrodinger $-\mathrm{div}\left(A\left(x\right)\nabla u\right)+Vu$ với thế vị không âm V thỏa mãn điều kiện Holder ngược và ma trận A thỏa mãn điều kiện elliptic đều. Do đó nó cũng tổng quát trường hợp toán tử Hermite.

Kết quả chính của bài báo này là thiết lập một định nghĩa phù hợp cho không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử L và xây dựng đặc trưng liên tục để thu được tính chính quy cho phương trình $L^s u=f$.

Cấu trúc của bài báo: mục 1 giới thiệu lịch sử của vấn đề, mục 2 dành một phần cho một số kiến thức chuẩn bị như các đánh giá cho hàm cực đại, không gian Morrey và không gian hàm phân bố liên kết với toán tử L. Nội dung chính của mục này là xây dựng lí thuyết không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử L. Cuối cùng, tính chính quy cho một lớp phương trình fractional được ra trong mục 3.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng C và c là các hằng số dương độc lập với các tham số chính và có thể khác nhau ở từng dòng. Kí hiệu $A\lesssim B$ nếu tồn tại hằng số dương C độc lập với các tham số chính trong A và B sao cho $A\le CB$. Kí hiệu $A\sim B$ nếu $A\lesssim B$ và $B\lesssim A$. $\mathbb{N}=\{1;2;3;...\}$ và $\mathbb{N}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Với $1\le p\le\infty$, kí hiệu p' là số mũ liên hợp của

p, tức là $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Ngoài ra, với $\lambda>0$ và quả cầu $B=B(x_B,r_B)$, kí hiệu λB là quả cầu cùng tâm với B và bán kính $r_{\lambda B}=\lambda r_B$. Kí hiệu $S(\mathbb{R})$ cho không gian các hàm Schwart. Cuối cùng, với $a,b\in\mathbb{R}$, đặt $a\wedge b=\min\{a,b\}$ và $a\vee b=\max\{a,b\}$.

2. Không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử tự liên hợp không âm

2.1. Hàm cực đại Hardy-Littlewood

Cho $0<\theta<\infty$. Hàm cực đại Hardy-Littlewood $\mathcal{M}_\theta$ được xác định như sau

$$\mathcal{M}_\theta f(x)=\sup_{x\in B}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^\theta\,dy\right)^{1/\theta},$$

trong đó supremum lấy trên tất cả các quả cầu B chứa x. Ta sẽ bỏ qua kí hiệu θ nếu $\theta=1$.

Bổ đề 2.1. (Bui et al, 2018) *Cho* $s,\varepsilon>0$ *và* $p\in[1,\infty]$.

(1) $$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(1+|x-y|/s\right)^{-n-\epsilon}\right]^p dy\right)^{1/p}\lesssim s^{n/p},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

(2) Với mọi $f\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right), x\in\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{s^n}\left(1+|x-y|/s\right)^{-n-\epsilon}|f(y)|\,dy\lesssim \mathcal{M}f(x).$$

2.2. Không gian Morrey

Với $0<p\le r<\infty$, không gian Morrey M^r_p được định nghĩa như sau

$$M^r_p=\left\{f\in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right):\|f\|_{M^r_p}=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{R>0}R^{n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{L^p\left(B\left(x_0,R\right)\right)}<\infty\right\}$$

Ta cần đến tính chất sau đây của hàm cực đại.

Bổ đề 2.2 [Trong et al, *2020, Bổ đề 2.6*] *Cho* $0<p\le r\le\infty$ *và* $0<\theta<p\wedge 1$. *Khi đó toán tử* $\mathcal{M}_\theta$ *bị chặn trên* M^r_p.

2.3. Đánh giá nhân nhiệt

$E_L(\lambda)$ là phân tích phổ của toán tử L. Khi đó, theo lí thuyết phổ, với mọi hàm Borel bị chặn $F:[0,\infty)\to\mathbb{C}$, chúng ta có thể xét toán tử bị chặn trên $L^2(\mathbb{R}^n)$ định bởi

$$F(L)=\int_0^\infty F(\lambda)dE_L(\lambda).$$

$K_G(x,y)$ gọi là nhân của toán tử G. Chúng ta có kết quả quan trọng sau đây.

Bổ đề 2.3. (Bui et al, 2020, Bổ đề 2.6)

(1) Cho hàm chẵn $\varphi \in S(\mathbb{R})$. *Với mọi* $N > 0$, *tồn tại* $C > 0$ *sao cho* $\left|K_{\varphi(t\sqrt{L})}(x,y)\right| \le Ct^{-n}\left(1+|x-y|/t\right)^{-N}$, $\forall t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Cho hai hàm chẵn $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R})$. *Với mọi* $N > 0$, *tồn tại* $C > 0$ *sao cho* $\left|K_{\varphi_1(t\sqrt{L})\varphi_2(s\sqrt{L})}(x,y)\right| \le Ct^{-n}\left(1+|x-y|/t\right)^{-N}$ *với mọi* $t \le s < 2t$ và $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(3) *Cho* $\ell \in \mathbb{Z}^+$ *và hai hàm chẵn* $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R})$ *sao cho* $\varphi_2^{(\nu)}(0) = 0$ *với* $\nu = 0,1,\dots,2\ell$. *Với mọi* $N > 0$, *tồn tại* $C > 0$ *sao* cho: $\left|K_{\varphi_1(t\sqrt{L})\varphi_2(s\sqrt{L})}(x,y)\right| \le C\left(\frac{s}{t}\right)^{2\ell} t^{-n}\left(1+|x-y|/t\right)^{-N}$, $\forall t \ge s > 0$ và $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Hơn nữa, các kết quả trên vẫn đúng cho hàm thuộc $S(\mathbb{R})$ *có giá compact chứa trong* $(0,\infty)$

2.4. Không gian phân bố liên kết với toán tử L.

Tiểu mục này được lấy từ (Georgiadis et al., 2018). $\mathcal{S}$ là tập hợp tất cả các hàm $\phi \in \bigcap_{m\ge 1} D\left(L^m\right)$ sao cho

$$\mathcal{P}_{m,\ell}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+|x|\right)^m \left|L^\ell \phi(x)\right| < \infty,\ \forall m > 0, \ell \in \mathbb{N}.$$

Nếu $\varphi \in S(\mathbb{R})$ thì $K_{\varphi(t\sqrt{L})}(x,\cdot) \in \mathcal{S}$ và $K_{\varphi(t\sqrt{L})}(\cdot,y) \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}'$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{S}$ với tích đối ngẫu $\langle f,\phi\rangle = f(\phi)$, cho mọi $f \in \mathcal{S}'$ và $\phi \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}_\infty$ là tập hợp tất cả các hàm $\phi \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}$ đều tồn tại $g_k \in \mathcal{S}$ sao cho $\phi = L^k g_k$. Khi đó g_k sẽ tồn tại duy nhất. Topo trên $\mathcal{S}_\infty$ được sinh ra bởi họ nửa chuẩn $\mathcal{P}^*_{m,\ell,k}(\phi) = \mathcal{P}_{m,\ell}(g_k)$, $m > 0, \ell, k \in \mathbb{N}$, với $\phi = L^k g_k$.

Ta gọi $\mathcal{S}'_\infty$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{S}_\infty$. Nếu $\varphi \in S(\mathbb{R})$ với $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,\infty)$, thì $K_{\varphi(t\sqrt{L})}(x,\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$ và $K_{\varphi(t\sqrt{L})}(\cdot,y) \in \mathcal{S}_\infty$. Do đó, chúng ta có thể định nghĩa

$$\varphi\left(t\sqrt{L}\right)f(x) = \langle f, K_{\varphi(t\sqrt{L})}(x,\cdot)\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty.$$

2.5. Hàm cực đại Peetre

Cho $\lambda > 0, j \in \mathbb{Z}$ và $\varphi \in S(\mathbb{R})$, hàm cực đại Peetre được định nghĩa như sau

$$\varphi^*_{j,\lambda}(\sqrt{L})f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi_j(\sqrt{L})f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^\lambda},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó, $\varphi_j(\lambda) = \varphi(2^{-j}\lambda)$ và $f \in \mathcal{S}'$. Chúng ta có

$$\varphi^*_{j,\lambda}(\sqrt{L})f(x) \ge |\varphi_j(\sqrt{L})f(x)|,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Với $s, \lambda > 0$, đặt

$$\varphi_\lambda^*\left(s\sqrt{L}\right)f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi\left(s\sqrt{L}\right)f(y)|}{\left(1+|x-y|/s\right)^\lambda},\ f \in \mathcal{S}'.$$

$\psi \in S(\mathbb{R})$ là một phân hoạch của đơn vị nếu $\operatorname{supp}\psi \subset [1/2, 2]$, $\int \frac{\psi(s)}{s} ds \neq 0$ và $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\lambda) = 1, \lambda \in (0,\infty)$.

Bổ đề 2.4. (Bui et al., 2020, Mệnh đề 2.16)

Cho $\psi \in S(\mathbb{R})$ *với* $\operatorname{supp}\psi \subset [1/2, 2]$ *và* $\varphi \in S(\mathbb{R})$ *là một phân hoạch của đơn vị. Khi đó*

$$\sup_{s\in[2^{-j-1},2^{-j}]} \psi_\lambda^*(s\sqrt{L})f(x) \lesssim \sum_{k=j-2}^{j+3} \varphi_{k,\lambda}^*(\sqrt{L})f(x), \tag{1}$$

với mọi $\lambda > 0, j \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{S}_\infty'$ *và* $x \in \mathbb{R}^n$.

Bổ đề 2.5. (Bui et al., 2020, Mệnh đề 2.18)

Cho ψ *là một phân hoạch của đơn vị và* $\varphi \in S(\mathbb{R})$ *là một hàm chẵn sao cho* $\varphi \neq 0$ *trên* $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. *Khi đó*

$$|\psi_j(\sqrt{L})f(x)| \lesssim \left(\int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} |\varphi_\lambda^*(s\sqrt{L})f(x)|^r \frac{ds}{s}\right)^{1/r}.$$

với mọi $\lambda, r > 0, j \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{S}'$ *và* $x \in \mathbb{R}^n$.

2.6. Không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử L

Định nghĩa 2.6. Cho ψ là một phân hoạch của đơn vị. Với $0 < p \le r \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa không gian Besov-Morrey $BM_{p,q,r}^{\alpha,\psi,L}$ như sau

$$BM_{p,q,r}^{\alpha,\psi,L} = \left\{f \in \mathcal{S}_\infty' : \|f\|_{BM_{p,q,r}^{\alpha,\psi,L}} < \infty\right\},$$

trong đó

$$\|f\|_{BM_{p,q,r}^{\alpha,\psi,L}} = \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{j\alpha} \left\|\psi_j\left(\sqrt{L}\right)f\right\|_{M_p^r}\right)^q\right]^{1/q}.$$

Từ Bổ đề 2.4 ta có:

Bổ đề 2.7. *Cho hai phân hoạch của đơn vị* ψ, φ *với* $\operatorname{supp}\psi, \operatorname{supp}\varphi \subset [1/2, 2]$, $0 < p \le r < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *và* $\lambda > 0$. Ta có:

$$\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{j\alpha} \left\|\psi_{j,\lambda}^*(\sqrt{L})f\right\|_{\mathbf{M}_p^r}\right)^q\right]^{1/q} \sim \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{j\alpha} \left\|\varphi_{j,\lambda}^*(\sqrt{L})f\right\|_{\mathbf{M}_p^r}\right)^q\right]^{1/q},\quad \forall f \in S_\infty'.$$

Ta cần đến kết quả sau đây.

Bổ đề 2.8. *Cho phân hoạch của đơn vị* ψ. *Ta có*

$$\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\alpha}\left\|\psi^*_{j,\lambda}\left(\sqrt{L}\right)f\right\|_{\mathbf{M}^r_p}\right)^q\right]^{1/q}\sim\|f\|_{BM^{\alpha,\psi,L}_{p,q,r}}$$

với mọi $0<p\le r<\infty,\ 0<q\le\infty,\ \alpha\in\mathbb{R}$ *và* $\lambda>\max\{n/p,\ n/q\}$.

Chứng minh. Nhờ Bổ đề 2.7, chúng tôi chỉ cần chứng minh

$$\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\alpha}\left\|\psi^*_{j,\lambda}\left(\sqrt{L}\right)f\right\|_{M^r_p}\right)^q\right]^{1/q}\lesssim\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\alpha}\left\|\psi_j\left(\sqrt{L}\right)f\right\|_{M^r_p}\right)^q\right]^{1/q}.$$

Lấy $\theta<\min\{p,q\}$ sao cho $\lambda>n/\theta$. Từ (1) và Bổ đề 2.1 đưa đến

$$\psi^*_{j,\lambda}(\sqrt{L})f(x)\lesssim\left[\int_{\mathbb{R}^n}2^{jn}\,|\psi_j(\sqrt{L})f(z)|^\theta\,(1+2^j\,|x-z|)^{-\lambda\theta}dz\right]^{1/\theta}\lesssim\mathcal{M}_\theta(|\psi_j(\sqrt{L})f|)(x).$$

Kết hợp với Bổ đề 2.2 chúng tôi có điều phải chứng minh.□

Kết hợp Bổ đề 2.7 và Bổ đề 2.8 chúng tôi khẳng định được sự độc lập của định nghĩa không gian $BM^{\alpha,\psi,L}_{p,q,r}$ với ψ.

Định lí 2.9. *Cho hai phân hoạch của đơn vị* ψ *và* φ. *Khi đó với mọi* $0<p\le r<\infty,\ 0<q\le\infty,$ $\alpha\in\mathbb{R}$, *hai không gian* $BM^{\alpha,\psi,L}_{p,q,r}$ *and* $BM^{\alpha,\varphi,L}_{p,q,r}$ *trùng nhau với chuẩn tương đương. Do đó ta có thể định nghĩa không gian* $BM^{\alpha,L}_{p,q,r}$ *là một trong các không gian* $BM^{\alpha,\psi,L}_{p,q,r}$ *với bất kì phân hoạch của đơn vị* ψ.

3. Kết luận

Trước tiên, chúng tôi xây dựng đặc trưng liên tục của của không gian $BM^{\alpha,L}_{p,q,r}$.

Định lí 3.1. *Cho phân hoạch của đơn vị* ψ. *Với mọi* $0<p\le r<\infty,\ 0<q\le\infty,\ \alpha\in\mathbb{R}$ *và* $\lambda>\max\{n/p,\ n/q\}$, *ta có:*

$$\|f\|_{BM^{\alpha,L}_{p,q,r}}\sim\left(\int_0^\infty\left[t^{-\alpha}\left\|\psi(t\sqrt{L})f\right\|_{M^r_p}\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\sim\left(\int_0^\infty\left[t^{-\alpha}\left\|\psi^*_\lambda(t\sqrt{L})f\right\|_{M^r_p}\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

với mọi $f\in S'_\infty$

Chứng minh.

Lấy $t\in[2^{-j-1},2^{-j}]$ với $j\in\mathbb{Z}$, nhờ (1) ta có

$$\sup_{t\in[2^{-j-1},2^{-j}]}|\psi(t\sqrt{L})f(x)|\lesssim\sum_{k=j-2}^{j+3}\psi^*_{k,\lambda}(\sqrt{L})f(x).$$

Kết hợp với Bổ đề 2.8 chúng tôi có

$$\left(\int_0^\infty \left[t^{-\alpha}\left\|\psi(t\sqrt{L})f\right\|_{M_p^r}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \lesssim \|f\|_{BM_{p,q,r}^{\alpha,L}}.$$

Tiếp theo, nhờ Bổ đề 2.5 chúng tôi có

$$|\psi_j(\sqrt{L})f(x)| \lesssim \Big(\int_{2^{-j-2}}^{2^{-j+2}} |\psi_\lambda^*(s\sqrt{L})f(x)|^q \frac{ds}{s}\Big)^{1/q}.$$

Do đó

$$\|f\|_{BM_{p,q,r}^{\alpha,L}} \lesssim \left(\int_0^\infty \left[t^{-\alpha}\left\|\psi_\lambda^*(t\sqrt{L})f\right\|_{M_p^r}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Cuối cùng, lấy $\theta < \min\{p,q\}$ sao cho $\lambda > n/\theta$. Vận dụng (1) chúng tôi có:

$$|\psi_\lambda^*(2^{-j}t\sqrt{L})f(x)|^\theta \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}|\psi(2^{-j}t\sqrt{L})f(z)|^\theta (1+2^j|x-z|)^{-\lambda\theta}dz$$

với mọi $t\in[1,2]$.

Vì $\theta < q$ nên sử dụng bất đẳng thức Minkowski dạng tích phân thu được

$$\Big(\int_1^2 |\psi_\lambda^*(2^{-j}t\sqrt{L})f(x)|^q \frac{dt}{t}\Big)^{\theta/q} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\Big(\int_1^2 |\psi(2^{-j}t\sqrt{L})f(z)|^q \frac{dt}{t}\Big)^{\theta/q}(1+2^j|x-z|)^{-\lambda\theta}dz.$$

Qua bước đổi biến đưa đến

$$\left[\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} (t^{-\alpha}|\psi_\lambda^*(t\sqrt{L})f(x)|)^q \frac{dt}{t}\right]^{\theta/q}$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\left[\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} (t^{-\alpha}|\psi(t\sqrt{L})f(z)|)^q \frac{dt}{t}\right]^{\theta/q}(1+2^j|x-z|)^{-\lambda\theta}dz.$$

Nếu $\lambda\theta > n$ thì nhờ Bổ đề 2.1 chúng tôi có

$$\Big(\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} |\psi_\lambda^*(t\sqrt{L})f(x)|^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q} \lesssim \mathcal{M}_\theta\left[\Big(\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} |\psi(t\sqrt{L})f|^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}\right](x).$$

Áp dụng Bổ đề 2.2 chúng tôi có

$$\left\|\Big(\int_0^\infty [t^{-\alpha}\psi_\lambda^*(t\sqrt{L})f]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}\right\|_{\mathbf{M}_p^r} \lesssim \left\|\Big(\int_0^\infty [t^{-\alpha}|\psi(t\sqrt{L})f|]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}\right\|_{\mathbf{M}_p^r}.$$

Chúng tôi kết thúc chứng minh của định lí. □

Trước khi chứng minh tính chất chính quy cho phương trình $L^s u = f$ chúng tôi đưa ra định nghĩa như sau: với $s\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}, m>s$, đặt $L^s:\mathcal{S}_\infty \to \mathcal{S}_\infty$ bởi

$$L^s f = \frac{1}{\Gamma\left(m-\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty t^{-s}(tL)^m e^{-tL} f\frac{dt}{t}$$

Từ (Bui et al., 2020) chúng tôi có $L^s f$ hội tụ trên $\mathcal{S}_\infty$, được định nghĩa tốt như một toán tử từ $\mathcal{S}_\infty$ vào $\mathcal{S}_\infty$ và không phụ thuộc vào cách chọn m. Hơn nữa, $L^\alpha\left(L^\beta f\right) = L^{\alpha+\beta} f, \quad \forall f \in \mathcal{S}_\infty$.

Định lí 3.2. *Cho* $s, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < q \le \infty, 0 < p \le r \le \infty$ *và* $f \in BM^{\alpha,L}_{p,q,r}$. *Khi đó tồn tại* $C > 0$ *sao cho với u là nghiệm của phương trình* $L^s u = f$ *chúng tôi có*

$$\|u\|_{BM^{\alpha+2s,L}_{p,q,r}} \le C\|f\|_{BM^{\alpha,L}_{p,q,r}}.$$

Chứng minh.

Lấy ρ là phân hoạch của đơn vị. Từ (Bui et al.., 2020) ta có

$$\left|\rho\left(t\sqrt{L}\right)L^{-s}f(x)\right| \lesssim t^{2s}\rho^*_\lambda\left(t\sqrt{L}\right)f(x).$$

Kết hợp điều này với Định lí 3.1 chúng tôi có

$$\begin{aligned}\|u\|_{BM^{\alpha+2s,L}_{p,q,r}} = \left\|L^{-s}f\right\|_{BM^{\alpha+2s,L}_{p,q,r}} &\sim \left(\int_0^\infty \left[t^{-\alpha-2s}\left\|\rho\left(t\sqrt{L}\right)L^{-s}f\right\|_{\mathbf{M}^r_p}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left[t^{-\alpha}\left\|\rho^*_\lambda\left(t\sqrt{L}\right)f\right\|_{\mathbf{M}^r_p}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\sim \|f\|_{BM^{\alpha,L}_{p,q,r}}.\end{aligned}$$

Chúng tôi kết thúc chứng minh của định lí. □

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Baraka, A. E., & Toumlilin, M. (2017). Global Well-Posedness for Fractional Navier-Stokes Equations in critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, *3*(1), 1-13.

Besov, O. V. (1959). On a family of function spaces, embedding theorems and extensions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 126, 1163-1165.

Besov, O. V. (1961). On a family of function spaces in connection with embeddings and extensions. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 60, 42-81.

Bui, H. Q., Bui, T. A., & Duong, X. T. (2020). Weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces associated with operators and applications. *Forum Math. Sigma., 8*(11), 1-95. DOI: https://doi.org/10.1017/fms.2020.6.

Dao, N. A., Nguyen, N. T., & Le, X. T. (2018). Besov-Morrey Spaces Associated to Hermite Operators and applications to Fractional Hermite Equations. *Electron. J. Differ. Equ. 2018*(187), 1-14.

Georgiadis, A. G., Kerkyacharian, G., Kyriazis, G., & Petrushev, P. (2017). Homogeneous Besov and Triebel–Lizorkin spaces associated with non–negative self–adjoint operators. *J. Math. Anal. Appl.*, *449*(2), 1382-1412.

Kozono, H., & Yamazaki, M. (1994). Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in the new function spaces as initial data. *Comm. Partial Differential Equations*, *19*(5-6), 959-1014.

Lin, C. C., & Yang, Q. (2013). Semigroup characterization of Besov type Morrey spaces and well-posedness of generalized Navier–Stokes equations. *J. Differential Equations*, 254, 804-846.

Mazzucato, Anna L. (2003). Decomposition of Besov-Morrey spaces. *Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, Contemp. Math, 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 279-294.

Nguyen, N. T., Le, X. T., Tran, T. D., & Vo, H. N. (2020). Triebel-Lizorkin-Morrey spaces associated with Hermite operators. *Rev. Mat. Complut.*, *33*, 527-555.

BESOV-MORREY SPACES ASSOCIATED WITH NON-NEGATIVE SELF-ADJOINT OPERATORS

Le Thi Hang[1*], Pham Thi Hoai Nhi[2], Nguyen Binh Di[3]

[1]*Gia Dinh High School, Ho Chi Minh City, Vietnam*

[2]*Saigon University, Vietnam*

[3]*Nguyen Hien High School, Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Le Thi Hang – Email: hanglethi905@gmail.com*

Received: July 04, 2022; Revised: August 07, 2022; Accepted: August 17, 2022

ABSTRACT

Besov spaces play an important role in the theory of functional spaces and partial differential equations. Two recent developments of this research direction are linking Besov spaces with Morrey spaces or non-negative self-adjoint operators. The results in this paper will generalize both approaches. We proved regularity for the fractional equation.

$L^s u = f$

To do that, we established a continuous characterization for the Besov-Morrey spaces $BM^{\alpha,L}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ *associating with non – negative self – adjoint operators L in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *such that the heat kernel of L satisfies the Gaussian upper bounds, where* $0 < p, q \le \infty, p \le r < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$. *Our results generalize the existing results by Bui et al. (2020) and Dao et al. (2018).*

Keywords: Besov-Morrey space; continuous characterizations; Gaussian upper bound; regularity